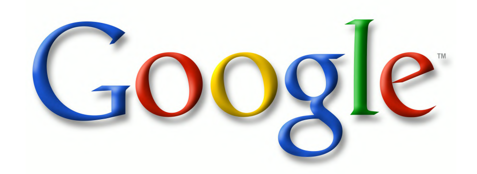
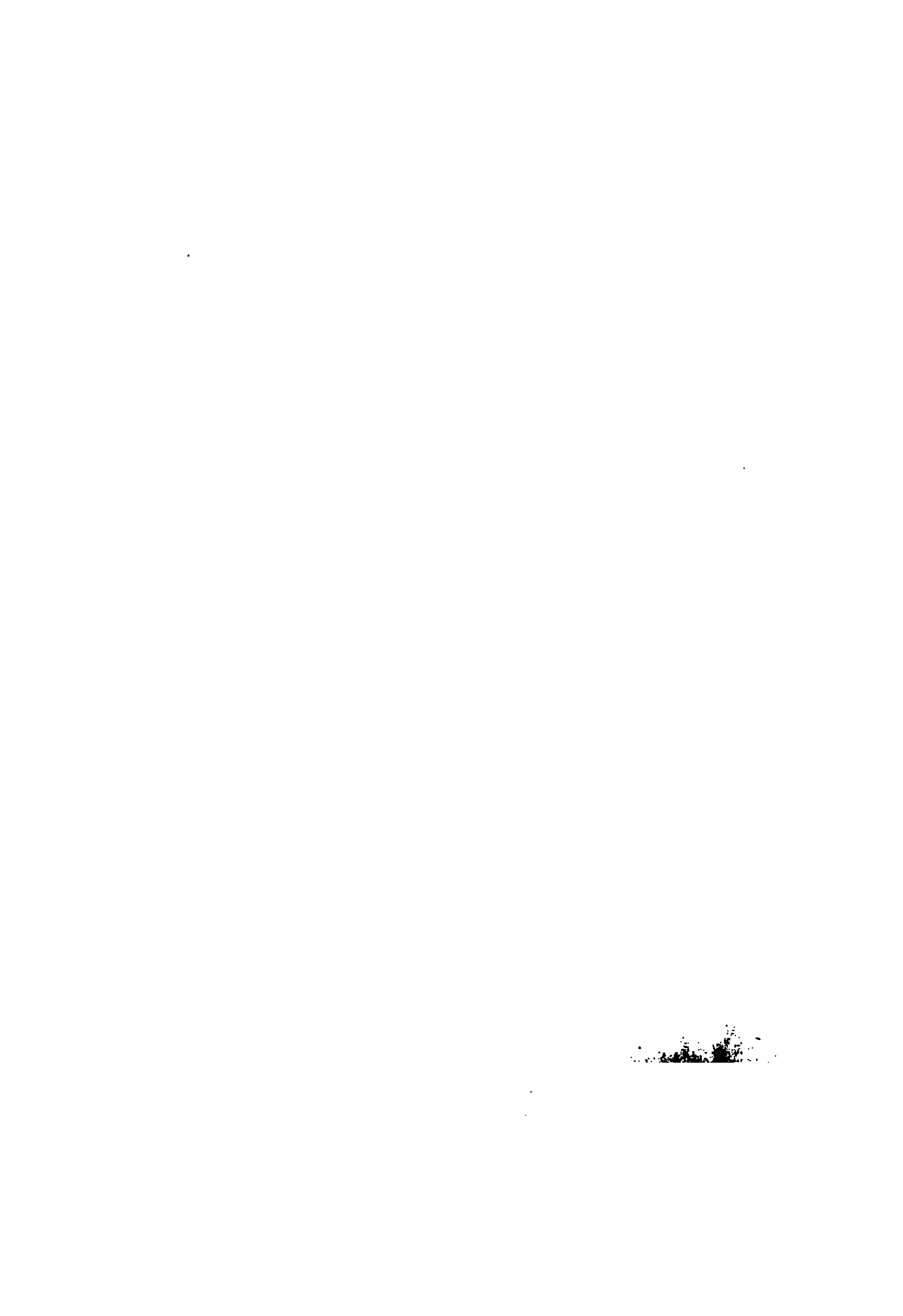



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06274658 5









Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.



Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Vierter Theil.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.
1844.

Inhaltsverzeichniss des vierten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Optik.

Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Literarische Berichte *).

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber gradlinige, circulare und elliptische Polarisation des Lichtes.

Von

Herrn Flesch

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Trier.

I.

Der Lichtäther wird im Zustande des Gleichgewichtes gehalten hauptsächlich durch abstossende Kräfte, welche die einzelnen Theilchen auf einander ausüben, theils aber auch durch eine besondere Einwirkung, welche er von Seiten der Moleküle der ponderabilen Materie erleidet. Im leeren Raume muss derselbe also gleichförmig verbreitet sein, überall gleiche Dichtigkeit und nach allen Richtungen dieselbe Elasticität haben. In einem mit wägbarer Materie erfüllten Raume dagegen kann seine Dichtigkeit von jener verschieden sein und seine Elasticität sich mit der Richtung ändern. Letzteres findet jedoch nur bei denjenigen crystallisirten Substanzen Statt, deren primitive Form kein reguläres Polyeder ist. Diesen Fall schliessen wir von unserer gegenwärtigen Betrachtung aus.

II.

Ein Aetherthcilchen sei um eine im Verhältniss zur Entfernung der einzelnen Theilchen von einander sehr kleine Grösse ζ aus der Lage seines Gleichgewichtes gebracht: so wird die Gesammtwirkung der benachbarten Theilchen auf dasselbe eine abstossende Kraft sein, deren Richtung durch die Gleichgewichtslage jenes Theilchens geht und deren Intensität, da ζ sehr klein ist, der Grösse ζ selbst proportional gesetzt werden darf. Ist also x der Abstand des Theilchens von der ursprünglichen Lage nach der Zeit t, so ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ex \quad (1)$$

die Differentialgleichung der Bewegung, wo e die Grösse der abstossenden Kraft in der Einheit der Entfernung ausdrückt und offenbar proportional der Elasticität des Fluidums ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich folgendes Integral (s. Traité élément. de calcul différ. et intégral par Lacroix, 4. édition 316):

$$x = \alpha \cos (t \sqrt{e} + c), \quad (2)$$

welches die Gesetze der Bewegung des Theilchens enthält. Setzt man zur Bestimmung der willkührlichen Constanten in dieser Gleichung

$$x = \alpha \text{ für } t = 0,$$

so kommt

$$c = 0 \,.$$

folglich

$$x = \alpha \cos t \sqrt{e} \quad (3)$$

wo α die Oscillations-Amplitude des Theilchens bedeutet. Die Schwingungsdauer τ ist offenbar bestimmt durch die Relation

$$\tau \sqrt{e} = 2\pi \quad (4)$$

folglich ist

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cos 2\pi \,.\, \frac{t}{\tau} \\ \frac{dx}{dt} = v &= a \sin 2\pi \,.\, \frac{t}{\tau} \end{aligned}\right\} (5)$$

wenn man der Kürze halber durch $\pm \frac{2\pi}{\tau} \alpha = a$, ohne Unterschied des Zeichens, die grösste Oscillationsgeschwindigkeit — Vibrations-Intensität — des Theilchens bezeichnet. Nimmt man die Intensität der abstossenden Kraft in der Einheit der Entfernung als Einheit an, so ist

$$e = 1$$

und folglich (4)

$$\sqrt{e} = \frac{2\pi}{\tau} = 1$$

mithin

$$a = \alpha$$

und obige Gleichungen (5) geben unter dieser Voraussetzung über in folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cos 2\pi \,.\, \frac{t}{\tau} \\ v &= \alpha \sin 2\pi \,.\, \frac{t}{\tau} \end{aligned}\right\} (6)$$

Da τ die Dauer einer Oscillation bedeutet, so ist also $\frac{t}{\tau}$ die Anzahl der Schwingungen, welche das Aethertheilchen während der Zeit seiner Bewegung gemacht hat, und man sieht also, wie durch diese Anzahl und die Schwingungsweite des Theilchens seine Geschwindigkeit und Entfernung von der ursprünglichen Gleichgewichtslage bedingt sind. Es sei nun auf demselben Strahle homogenen Lichtes E die Entfernung eines zweiten Aethertheilchens von jenem und l die entsprechende Länge einer Aetherwelle, so ist

$$\frac{E}{l} = n$$

die Anzahl der Wellen zwischen beiden Theilchen. Da nun nach der Zeit

$$t = \tau,\ t = 2\tau,\ t = 3\tau \ldots . t = n\tau$$

die Bewegung erst in der Entfernung vom ersten Theilchen

$$E = l,\ E = 2l,\ E = 3l \ldots\ldots E = nl$$

anlangt: so hat das erste Theilchen also schon n Schwingungen vollbracht, wenn jenes andere seine Bewegung erst beginnt; folglich ist die Anzahl der Oscillationen dieses letzteren nach der Zeit t offenbar

$$\frac{t}{\tau} - n = \frac{t}{\tau} - \frac{E}{l},$$

und bezeichnet α die Ausschlagsweite desselben Theilchens, so sind also

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{E}{l}\right) \\ v &= \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{E}{l}\right) \end{aligned}\right\} (7)$$

die Gleichungen seiner Bewegung. Ist

$$E = nl + \varphi$$

wo n eine ganze Zahl und φ irgend einen Theil der Aetherwelle bezeichnet und mithin

$$\varphi > 0 < l$$

ist, so können obige Gleichungen (7) auch unter die Form

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) \\ v &= \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) \end{aligned}\right\} (8)$$

gebracht werden, da eine Verminderung des ganzen Bogens um $2n\pi$ weder dessen Cosinus noch Sinus ändert. Jener Theil φ der Aetherwelle heisst die Phase des vibrirenden Theilchens.

Aus den Gleichungen (6) und (8) folgt

$$x^2 + v^2 = \alpha^2 \quad (9).$$

Durchläuft also während der Schwingungsdauer eines Aethertheilchens ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Peripherie eines Kreises, dessen Radius gleich ist der Schwingungsweite jenes Theilchens: so bezeichnen die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes die gleichzeitige Geschwindigkeit und Entfernung des Aethertheilchens von der ursprünglichen Lage seines Gleichgewichtes.

Die Vibrationen des Lichtes sind transversale, d. h. sie erfolgen senkrecht zur Fortpflanzungs-Richtung, oder, was dasselbe heisst, senkrecht zum Lichtstrahl, liegen also in einer auf letzterem normalen Ebene. Ein Strahl, dessen Aethertheilchen alle nach derselben constanten Richtung oscilliren, heisst gradlinig polarisirt. Die Gleichungen (8) enthalten die Gesetze der Bewegung seiner Theilchen. Zwei zusammenfallende Strahlen sind senkrecht zu einander polarisirt, wenn ihre Schwingungsrichtungen rechtwinklig gegen einander sind. In Betreff der linearen Polarisation erlauben wir uns auf Aufsatz L. im 1. Theile des Archiv's zu verweisen.

III.

Unterliegt dasselbe Aethertheilchen der Einwirkung eines zweiten Vibrationssystemes von gleicher Schwingungsdauer τ, gleicher Wellenlänge l, aber verschiedener Phase φ_1 und verschiedener Schwingungsweite α_1, oder, was unserer Voraussetzung nach dasselbe heisst, verschiedener Intensität $\alpha_1{}^2$, und bezeichnen v_1 und y die Geschwindigkeit des Theilchens und dessen Entfernung von der ursprünglichen Lage seines Gleichgewichtes nach der Zeit t: so enthalten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \\ v_1 &= \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \end{aligned}\right\} (10)$$

die entsprechenden Gesetze der Bewegung. In Folge der Einwirkung eines jeden dieser Vibrationssysteme allein würde die Bewegung des Theilchens geradlinig und durch obige Gleichungen (8) oder (10) bestimmt sein. Wirken aber beide Systeme gleichzeitig auf das Theilchen und sind z. B. ihre Vibrationsrichtungen zu einander senkrecht, so ist die Bahn des Theilchens eine ebene Curve, worin

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) \\ y &= \alpha_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \end{aligned}\right\} (11)$$

die gleichzeitigen rechtwinkligen Coordinaten des Aethertheilchens ausdrücken. Eliminirt man die Zeit t aus diesen Gleichungen, so

findet man die Gleichung der Bahn selbst. Man erhält nämlich zunächst

$$\frac{x}{\alpha} = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right)$$

$$\frac{y}{\alpha_1} = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right)$$

folglich

$$2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) = \text{arc } \left(\cos = \frac{x}{\alpha}\right)$$

$$2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) = \text{arc } \left(\cos = \frac{y}{\alpha_1}\right)$$

und durch Subtraction

$$2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \text{arc } \left(\cos = \frac{x}{\alpha}\right) - \text{arc } \left(\cos = \frac{y}{\alpha_1}\right)$$

oder wenn man auf jeder Seite die Cosinus nimmt

$$\cos 2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{y}{\alpha_1} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{\alpha_1^2}}$$

und hieraus nach einigen Reductionen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha_1^2} - 2\frac{x}{\alpha} \cdot \frac{y}{\alpha_1} \cos 2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \sin^2 2\pi \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} \quad (12).$$

Das Aethertheilchen beschreibt also im Allgemeinen eine Ellipse, welche unter gewissen Bedingungen in einen Kreis übergehen kann. Pflanzen sich also zwei Strahlen homogenen Lichtes, welche von einer Lichtquelle ausgehen und senkrecht zu einander polarisirt sind, nach derselben Richtung fort: so ist jedes Aethertheilchen dieser beiden zusammenfallenden Strahlen der gleichzeitigen Einwirkung zweier zu einander orthogonalen Vibrationssysteme unterworfen, deren Gleichungen (8) und (10) sein mögen, und folglich hört die Bahn des Theilchens auf eine grade Linie zu sein und geht im Allgemeinen in eine Ellipse über, welche während der Schwingungsdauer τ von dem Theilchen durchlaufen wird. Der Lichtstrahl geht durch die ursprüngliche Gleichgewichtslage, den Mittelpunkt der Ellipse und steht normal auf der Ebene derselben. Ein solcher Strahl, dessen Aethertheilchen sich in einer Ellipse oder einem Kreise bewegen, heisst elliptisch oder kreisförmig polarisirt und ist im Allgemeinen also identisch mit einem Systeme zweier gradlinig und rechtwinklig zu einander polarisirten Strahlen von gemeinschaftlicher Fortpflanzungsrichtung, aber verschiedenen Intensitäten und Phasen.

IV.

Die Axen der von dem Aethertheilchen beschriebenen elliptischen Bahn (12) fallen mit der Richtung jener auf das Theilchen gleichzeitig einwirkenden orthogonalen Vibrationssysteme (8) und

Goniometrie und Trigonometrie.

Geodäsie.

Statik und Mechanik.

so vereinfachen sich dieselben folgendergestalt:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \cos B, \quad y = \alpha_1 \cos B_1 \\ v = \alpha \sin B, \quad v_1 = \alpha_1 \sin B_1 \end{array}\right\} (19)$$

Mithin ist

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + v^2 = \alpha^2 \\ y^2 + v_1{}^2 = \alpha_1{}^2 \end{array}\right\} (20)$$

Ist ferner ds das Differential des Bogens der von dem Aethertheilchen beschriebenen Curve und V die Tangentialgeschwindigkeit des Theilchens im Punkte xy seiner Bahn, so ist (s. Poisson Mécanique, édition 2. 145)

$$\frac{ds}{dt} = V$$

und

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

also

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2}$$

oder

$$v^2 + v_1{}^2 = V^2. \quad (21)$$

Aus (19) ergibt sich durch Differentiation

$$dx = -\alpha \sin B \,.\, dB = -v \,.\, dB$$
$$dy = -\alpha_1 \sin B_1 \,.\, dB_1 = -v_1 \,.\, dB_1$$

und da während derselben Zeit die Aenderung der Phase des Aethertheilchens bei beiden Strahlen dieselbe ist, folglich

$$d\varphi = d\varphi_1$$

so ist also auch

$$dB = dB_1$$

und mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha_1 \sin B_1}{\alpha \sin B} = \frac{v_1}{v} = \operatorname{tang} \delta \quad (22)$$

wo δ den Winkel bezeichnet, den die Tangente im Punkte xy an die Curve (12) mit der Abscissenaxe bildet. Sind ferner ε und η die Winkel, welche mit derselben Axe respective die Normale in demselben Punkte xy und der Radius Vector vom Centrum der Ellipse nach diesem Punkte machen: so ist (s. Biot Géométrie analytique, édit. 8. 50)

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} \varepsilon = -\dfrac{\alpha \sin B}{\alpha_1 \sin B_1} = -\dfrac{v}{v_1} \\ \operatorname{tang} \eta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\alpha_1 \cos B_1}{\alpha \cos B} \end{array}\right\} (23)$$

folglich ist der Winkel ϑ, den die beiden letzteren Linien mit einander bilden, gegeben durch den Ausdruck (Biot Géom. anal. 50)

$$\text{tang}\ \vartheta = \frac{\text{tang}\ \varepsilon - \text{tang}\ \eta}{1 + \text{tang}\ \varepsilon\ .\ \text{tang}\ \eta} = -\frac{vx + v_1 y}{v_1 x - vy} = \frac{vx + v_1 y}{vy - v_1 x} \quad (24).$$

Aus den Gleichungen (20) und (22) erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{a_1^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{xv_1 - yv}{v^3} \quad (25).$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ in irgend einem Punkte einer Curve ist gegeben durch den Ausdruck (Lacroix calcul diff. et intégral 4. édit. 76)

$$\varrho = \frac{\{1 + (\frac{dy}{dx})^2\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Substituirt man hierin für die beiden Differential-Coeffizienten ihre Werthe aus (22) und (25), so kommt

$$\varrho = \frac{(v^2 + v_1^2)^{\frac{3}{2}}}{xv_1 - yv} = \frac{V^3}{xv_1 - yv} \quad (26).$$

Die Centrifugalkraft F des Theilchens in demselben Punkte seiner Bahn ist bestimmt durch die Gleichung (s. Poisson Mécanique 169)

$$F = \frac{V^2}{\varrho} = \frac{xv_1 - yv}{V} \quad (27)$$

wenn man für ϱ seinen Werth aus der vorhergehenden Gleichung subsituirt. Aus (24) folgt

$$\text{tang}\ \vartheta = \frac{vx + v_1 y}{vy - v_1 x} = \frac{\sin\ \vartheta}{\cos\ \vartheta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\ \vartheta}}{\cos\ \vartheta}$$

mithin

$$(vx + v_1 y)^2\ \cos^2\ \vartheta = (vy - v_1 x)^2\ (1 - \cos^2\ \vartheta)$$
$$= (vy - v_1 x)^2 - (vy - v_1 x)^2\ \cos^2\ \vartheta,$$
$$\{(vx + v_1 y)^2 + (vy - v_1 x)^2\}\ \cos^2\ \vartheta = (vy - v_1 x)^2$$

oder wenn man entwickelt

$$(v^2 + v_1^2)\ (x^2 + y^2)\ \cos^2\ \vartheta = (vy - v_1 x)^2$$
$$V^2\ .\ r^2\ .\ \cos^2\ \vartheta = (vy - v_1 x)^2$$
$$Vr\ \cos\ \vartheta = vy - v_1 x$$
$$r\ \cos\ \vartheta = \frac{vy - v_1 x}{V} \quad (28).$$

Im Punkte xy, dessen Entfernung von der Lage des Gleichgewichtes $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, ist die beschleunigende Kraft, welche das Aethertheilchen von der Einwirkung der benachbarten Theilchen erleidet, nach dem Centrum der Ellipse gerichtet und dem Radius Vector proportional. Nehmen wir also, wie oben (II) geschehen, die abstossende Kraft in der Einheit der Entfernung als Kraft-Einheit an, so ist dieselbe in der Entfernung r ausgedrückt durch r und nach der Normalen an die Bahn im Punkte xy zerlegt durch

$$J = r \cos \vartheta \quad (29).$$

Aus (27), (28), (29) folgt

$$J = \frac{vy - v_1 x}{V} = -F \quad (30).$$

Die Centrifugalkraft des Aethertheilchens in irgend einem Punkte seiner Bahn ist also gleich, aber entgegengesetzt der nach der Richtung der Normalen in diesem Punkte zerlegten beschleunigenden Kraft. Obgleich also — soviel wir wenigstens zu wissen glauben — dem allgemeinen Gravitationsgesetze nicht unterworfen, folgt dennoch der Lichtäther in seiner Bewegung denselben Gesetzen der rationellen Mechanik, denen auch die ponderabilen Körper unterliegen.

Aus (28), (19), (18), (17) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} Vr \cos \vartheta = vy - v_1 x &= \alpha\alpha_1 (\sin B \cos B_1 - \cos B \sin B_1) \\ &= \alpha\alpha_1 \sin (B - B_1) = \alpha\alpha_1 \sin A = QQ_1 \end{aligned}\right\} (31).$$

Also ist

$$VJ = QQ_1$$

mithin

$$J = \frac{QQ_1}{V} = -F \quad (32).$$

Die Centrifugalkraft des Aethertheilchens in irgend einem Punkte seiner elliptischen Bahn ist also umgekehrt proportional seiner Geschwindigkeit in diesem Punkte.

Aus (31) schliessen wir

$$r = \frac{QQ_1}{V} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta}$$

folglich

$$J_1 = r \sin \vartheta = \frac{QQ_1}{V} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{QQ_1}{V} \cdot \operatorname{tang} \vartheta = J \cdot \operatorname{tang} \vartheta \quad (33).$$

Diese nach der Richtung der Tangente an die Bahn auf das Aethertheilchen einwirkende Componente J_1 der gesammten abstossenden Kraft bewirkt die Veränderungen in der Geschwindigkeit des Theilchens und ist also proportional der Centrilfugalkraft und der Tangente desjenigen Winkels, den der Radius Vector mit der Normalen auf die Bahn bildet. In den Endpunkten der Axen ist also $r_1 = 0$.

Aus den Gleichungen (20) und (21) ergibt sich

$$x^2 + y^2 + v^2 + v_1{}^2 = \alpha^2 + \alpha_1{}^2$$

oder

$$r^2 + V^2 = \alpha^2 + \alpha_1{}^2$$

folglich

$$V = \sqrt{\alpha^2 + \alpha_1{}^2 - r^2}.$$

Setzt man

$$\alpha^2 + \alpha_1{}^2 = R^2 \quad (34)$$

so kommt

$$V = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (35).$$

Diese Gleichung ist analog der Gleichung (9)

$$v = \sqrt{\alpha^2 - x^2};$$

x und r bezeichnen die Entfernung des Aethertheilchens von der Gleichgewichtslage.

Aus (35) folgt

V=Maximum in den Endpunkt, der kleinen Axe der Ellipse.
V=Minimum - - - - grossen - - -
Also $J = -F$=Minimum - - - - kleinen - - -
=Maximum - - - - grossen - - -

Die Gleichung (27) liefert die Relation

$$F \cdot \varrho = V^2 \quad (36)$$

Die Tangentialgeschwindigkeit des Aethertheilchens in irgend einem Punkte seiner Bahn ist also die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Centrifugalkraft des Theilchens und dem Krümmungshalbmesser der Curve in diesem Punkte.

VI.

Zwei rechtwinklig zu einander polarisirte Strahlen (homogenen Lichtes) R und R_1 von gleicher Schwingungsdauer τ, gleicher Wellenlänge l, aber verschiedenen Intensitäten α^2 und $\alpha_1{}^2$ und verschiedenen Phasen φ und φ_1 bringen durch ihre Vereinigung nach derselben Fortpflanzungsrichtung einen elliptisch polarisirten Strahl hervor, bei welchem die Geschwindigkeiten der Componenten gegeben sind durch die Formeln

$$U = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right), \quad U_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \quad (37)$$

und die gleichzeitigen Coordinaten des Aethertheilchens durch die Gleichungen

$$x = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right),\ y = a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \quad (38).$$

Setzt man den Phasen-Unterschied

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \frac{2\psi}{l},$$

so kann man, da die Zeit von jedem beliebigen Momente angerechnet werden darf, entweder

$$\varphi = -\frac{\psi}{l} \text{ und } \varphi_1 = +\frac{\psi}{l}$$

oder

$$\varphi = +\frac{\psi}{l} \text{ und } \varphi_1 = -\frac{\psi}{l}$$

nehmen, je nachdem der Strahl R dem Strahle R_1, oder umgekehrt dieser jenem vorgeeilt ist. Im ersteren Falle gehen obige Gleichungen (37), (38) über in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} U = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right),\ U_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right) \\ x = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right),\ y = a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right) \end{array}\right\} (39)$$

Im andern Falle sind dieselben

$$\left.\begin{array}{l} u = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right),\ u_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right) \\ x = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right),\ y = a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right) \end{array}\right\} (40).$$

In Folge eines jeden dieser beiden Systeme (39) oder (40) würde das Aethertheilchen während der Schwingungsdauer dieselbe Ellipse durchlaufen, nur mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung. Existiren aber beide Systeme zu gleicher Zeit und pflanzen sich die aus ihnen hervorgehenden Strahlen von entgegengesetzt elliptischer Polarisation nach derselben Richtung fort: so bewegt sich das Aethertheilchen, welches ihrer gleichzeitigen Einwirkung unterliegt, wieder gradlinig. Um dieses zu beweisen setzen wir die Vibrationen U und u, sowie U_1 und u_1, welche parallel erfolgen, respective den Axen OX und OY, je zwei in eine zusammen; alsdann erhalten wir

$$V = U + u = a\left\{\sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right)\right\}$$

$$= 2a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l}$$

$$V_1 = U_1 + u_1 = a_1\left\{\sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right)\right\}$$

$$= 2a_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} V &= 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l} \\ V_1 &= 2\alpha_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l} \end{aligned}\right\} (41).$$

Also ist das System der beiden Strahlen von entgegengesetzt elliptischer Polarisaton identisch mit einem Systeme zweier gradlinig und rechtwinklig zu einander polarisirten Strahlen von gleicher Phase, aber verschiedenen Intensitäten, welches letztere wiederum einen einzigen gradlinig polarisirten Strahl bildet. Der Winkel ω, den die Vibrationsrichtung dieses Strahles mit der Axe der x macht, ist gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{V_1}{V} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \quad (42)$$

Folglich macht die Polarisationsebene desselben Strahles mit derselben Axe einen Winkel ω_1, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \omega_1 = -\frac{\alpha}{\alpha_1} \quad (43).$$

Aus (39) und (40) folgt

$$\operatorname{tang} \eta = \frac{y}{x} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot \frac{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right)}{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right)}$$

$$\operatorname{tang} \eta_1 = \frac{y}{x} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot \frac{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right)}{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right)}$$

mithin

$$\operatorname{tang} \eta \cdot \operatorname{tang} \eta_1 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2} \quad (44).$$

Hieraus schliessen wir, dass die trigonometrischen Tangenten beider Winkel stets gleiches Vorzeichen haben; ist also

$$\left.\begin{aligned} &\eta > 0 < \frac{\pi}{2} \\ \text{so ist}\quad &\eta_1 > \pi < \frac{3\pi}{2} \\ \text{und ist}\quad &\eta > \frac{\pi}{2} < \pi \\ \text{so ist}\quad &\eta_1 > \frac{3\pi}{2} < 2\pi \end{aligned}\right\} (45).$$

Ferner ergibt sich aus derselben Gleichung (44), dass das Produkt der trigonometrischen Tangenten der bezeichneten Winkel constant ist; — beide Folgerungen vereint rechtfertigen obige Behauptung, dass das Aethertheilchen in Folge der Einwirkung der Vibrationssysteme (39), (40) dieselbe Ellipse nach entgegengesetzter Richtung durchlaufen würde.

Die Richtung desjenigen Durchmessers dieser Ellipse, auf welchen die beiden elliptischen Bewegungen das Aethertheilchen nach jedem halben Umlaufe in demselben Augenblicke zurückführen, ist bedingt durch

$$\eta_1 = \eta$$

folglich (44) bestimmt durch die Gleichung

$$\text{tang}^2\ \eta = \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}$$

oder

$$\text{tang}\ \eta = \frac{\alpha_1}{\alpha} = \omega \quad (46)$$

mithin steht derselbe senkrecht auf der Polarisationsebene jenes einen gradlinig polarisirten Strahles, welcher mit dem Systeme der beiden Strahlen von entgegengesetzt elliptischer Polarisation identisch ist.

Ist

$$\alpha = \alpha_1 \text{ und } \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \frac{2\psi}{l} = \frac{1}{4},$$

so ist die von dem Aethertheilchen beschriebene Bahn (12) ein Kreis

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad (47)$$

und in dieser Voraussetzung gehen obige Gleichungen (39), (40), (41), (42), (43), (44), (46) über in folgende:

$$\left.\begin{array}{ll} U = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right), & U_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right) \\ x = \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right), & y = \alpha_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right) \end{array}\right\} (48)$$

$$\left.\begin{array}{ll} U = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right), & U_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) \\ x = \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right), & y = \alpha_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) \end{array}\right\} (49)$$

$$V = 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \alpha\sqrt{2} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{\tau} = V_1 \quad (50)$$

$$\text{tang}\ \omega = +1, \ \text{tang}\ \omega_1 = -1 \quad (51)$$

$$\text{tang}\ \eta \cdot \text{tang}\ \eta_1 = +1 \quad (52)$$

$$\text{tang}\ \eta = +1 = \text{tang}\ \omega. \quad (53).$$

II.

Eine einfachere, auf einer neuen Analyse beruhende Auflösung der sectio aurea, nebst einer kritischen Beleuchtung der gewöhnlichen Auflösung dieses Problems und der Betrachtung ihres pädagogischen Werthes.

Von

Herrn J. Helmes

Professor am Gymn. Josephinum zu Hildesheim.

Wenn ich eine neue Auflösung des angeführten Problems der öffentlichen Mittheilung für nicht ganz unwerth erachte, so ist es ganz vorzüglich ihre pädagogische Beziehung, die mich dazu bestimmt. In durchaus keinem andern Unterrichtszweige ist das Lernen selbst, das Erwerben und Suchen, im Gegensatze des Erworbenen, Gewonnenen, so sehr Hauptaufgabe und Zweck, als in der Mathematik. Sie mag wohl ihre edelste Bestimmung erfüllt haben an dem ehemaligen Schüler, der nun später von ihren Resultaten nicht mehr behalten hat, als der erstarkte Mann noch nachmachen kann von den kunstvollen Uebungsstücken, die seinen Körper in der Jugend bildeten. Alles geistige Zuthun von Seiten des Schülers, alle Lust und Liebe zur Sache ist durch solche Auffassung ihrer Aufgaben bedingt. Kurz ist ja die Freude des spielenden Kindes über das fertige Kartenhäuschen, und überhaupt nur möglich, wenn es sich selber das Werkchen bildete; aller geistige Gewinn und edlere Gewöhnung liegt in dem sinnigen Aufbau; Wieder-Abbruch und Zerstörung sind das nicht bedauerte Ende des Spieles; keiner soll ja in dem Hause wohnen. — Und, wie die Verhältnisse bislang an unsern gelehrten Schulen stehen, wird der Schüler der Mathematik auf ein eigentliches Feld der Anwendung des Gelernten nur in so spärlicher und dürftiger Beschränkung geführt, dass dies die Mühe der sauern Vorbildung nicht entgelten könnte. Denn wohl lohnt ihm die Lectüre der Classiker die schweren Anstrengungen seiner grammatischen Studien, und gibt so auch der gelernten Sprache einen neuen, hohen Werth; die erworbene Kenntniss der Geschichte benutzt jede Stelle, jeder Augenblick des Lebens: aber die Werke, die in jener andern Sprache, der Mathematik, geschrieben sind, die Gesetzbücher der Natur und des Himmels, werden nicht vor ihm auf-

geschlagen, höchstens Bruchstücke einer Vorrede mit ihm durchbuchstabirt.

Wünschten wir nun gleichwohl von ganzem Herzen, dass auch in dieser Beziehung das Gymnasium seine treuen Schüler der Mathematik besser belohnen, und ihnen in den inhaltsreichen Sätzen der Physik und Elementar-Astronomie eben so schön und unvergesslich die bedeutungsvollen Resultate jener Wissenschaft ans Herz fesseln möge, als in den schönen Sentenzen eines Tacitus und Virgil's die trivialen Lehren der Grammatik: so liegt doch, so lange dieses nur frommer Wunsch noch bleiben muss, viel Trost in der besondern Natur und ausgezeichneten Beschaffenheit der mathematischen Lehren, vermöge welcher sie vor allen andern Erkenntnissen für die studirende Jugend Zweck an sich zu sein geeignet sind. Sie sind ja die natürlichen, nothwendigen, überall sich gleich ergebenden Bewegungen des gleichsam wie körperlich aus Lebensorganen zusammengesetzt zu denkenden Geistes auf einem grossen, fast von allen Dingen durchwachsenen Felde der Grössen und Grössen-Verhältnisse; die eigenthümliche, durch die Natur des vernünftigen Wesens selbst vorgeschriebene und bedingte Entwickelung jener geistigen Kräfte, deren gleichen und zu gleicher Frucht treibenden Keim der Schöpfer in das Wesen des Menschen gelegt hat, und der in verschiedenen Menschen nur den verschiedenen Boden gefunden haben kann. Aber darum muss alles äussere Zuthun dieser Entwickelung auch jene organischen Kräfte benutzen, nur sie anregen und nicht gleichsam durch Linie und Maschine Hand und Fuss des eingeschnürten und festgebundenen Kindes fleissig hin und her bewegen wollen, wenn letzteres gehen und den Gebrauch der Hände lernen soll. Anregung der Selbstthätigkeit und Leitung derselben auf die Wege, wo sie in leichtester, natürlichster Folge den nur noch versteckt liegenden Schatz des eigenen Geistes-Magazins auffinde, ist die alleinige Aufgabe des Lehrers der Mathematik, dem alsdann sein Schüler verpflichtet sein muss, und wenn er von jenem Schatze selbst auch niemals ferner den mindesten Gebrauch machen kann, sondern sich nur desselben bewusst geworden, sich in diesen Theilen seines geistigen Reiches nur orientirt hat. Kurz, diese formelle Bildungskraft ist ein auszeichnender Vorzug des mathematischen Unterrichts; kein anderer Unterrichtszweig, selbst der der zum Eigenthume gewordenen Muttersprache nicht, kann sich darin mit ihm messen. Und, wenn ihm darum zu einiger Belohnung dafür eine sich so mächtig aufdringende Erweiterung materieller Anwendung angelegentlichst zu wünschen wäre: so muss doch vorzugsweise jene Seite seiner Behandlung dem Gymnasium zugekehrt sein und bleiben; aller Werth mehr auf die Art des Lernens, als auf das Gelernte selbst gelegt werden.

Diese und ähnliche Betrachtungen, die hier weiter auszuführen nicht wohl der Ort ist, mögen der folgenden Entwickelung, die aus ihnen hervorgegangen ist, ihren Werth bestimmen, und den Hauptzweck derselben im Voraus andeuten. Sie betrifft die analytische Betrachtung der ältern und die einfachere Begründung einer neuen Auflösung eines geometrischen Problems, wodurch diese Auflösung für den Schüler aus dem Geheimnisse fremder Erfindung und Ausbildung in den Kreis eigener, klar bewusster Selbstthätigkeit herübergezogen, und gleichsam ein fremdes Patent zum Eigenthums-

rechte abgelöst werden möge. Denn nur die Analyse ist es, die uns das geheime Schaffen des fremden Geistes erschliesst, und dem eigenen die freien Bahnen eröffnet.

Betrachtung der ältern Auflösung.

Unter den mannichfachen Theilungen der geraden Linie, die schon bei den Alten zu den vorzüglichen Lieblingsspielen des Geistes gehörten, wurde doch eine gar bald eine nothwendige Sprosse schon in der untersten Leiter, die nur vom allertiefsten Grunde der Wissenschaft aus in die nächsten Höhen des systematischen Gebäudes der Geometrie aufführt. — Wenn andere solche Theilungen, als da sind die sectio spatii, sectio rationis etc. durch gelegentliche Aufgaben veranlasst wurden, so trat die sectio aurea als gebieterische Forderung auf, sobald man nur den früh und tief unten im Systeme der Elementar-Geometrie liegenden Satz: „Um jedes regelmässige Vieleck lässt sich ein Kreis beschreiben" zu dem Probleme umkehrte: „In den gegebenen Kreis jedes regelmässige Vieleck einzuschreiben." Denn derselbe Geist der Analyse, der uns bei Betrachtung dieser Aufgabe für das Sechseck den Radius als Seite bestimmt, fordert für das Zehneck das grössere Stück des nach der sectio aurea getheilten Radius *). Und leitet

---

*) Denken wir uns die Seite AB (Taf. I. Fig. 1.) gefunden, und vom Centro O des Kreises nach ihren Endpunkten die Radien gezogen, so ist in diesem (charakteristischen) gleichschenklichen Dreieck OAB der Winkel am Scheitel $O = \frac{4R}{10} = \frac{2R}{5}$, mithin die beiden Winkel an der Basis zusammengenommen $= 2R - \frac{2R}{5} = \frac{8R}{5}$, also jeder gleich $\frac{4R}{5}$, d. h. doppelt so gross als $\sphericalangle$ am Scheitel.

Obgleich nun die Elementar-Geometrie ausser dem pythagoräischen Lehrsatze, der sich nur auf das rechtwinkliche Dreieck anwendet, im Allgemeinen kein Mittel besitzt, die Verhältnisse der Seiten eines Dreiecks aus den Verhältnissen seiner Winkel zu bestimmen, so lässt uns doch die ganz ausgezeichnete Natur der Winkelverhältnisse im vorliegenden Falle den Versuch machen, etwa durch die Bedingungen der Aehnlichkeit unter den Dreiecken, die sich von dem gegeben leicht und natürlich ableiten, solchen Verhältnissen nachzuforschen.

Halbiren wir nur einmal den $\sphericalangle A$, so erkennen wir augenblicklich das gleichschenkliche Dreieck ADB, worin ja $\sphericalangle \delta = o + \gamma = \alpha + \gamma = \beta \infty$ dem ganzen OAB (wegen Gleichheit der Winkel) woraus sich:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BO}$$

oder in Betracht, dass, weil sowohl Dreieck ADB als auch DAO nach der Construction gleichschenklich sind, und darum

$$AB = AD = OD$$

ist,

$$\frac{BD}{OD} = \frac{OD}{OB},$$

d. h., da $OD = AB$ war, die Seite des Zehnecks ist das grössere Stück des im mittleren und äusseren Verhältnisse getheilten Radius.

gleichwohl den Euklides (IV. 11.) ein scheinbar etwas anderer Gang zunächst auf das Fünfeck, fo führt dieser dennoch durch den vorbereitenden, begründenden Satz IV. 10. wieder grade auf dasselbe Problem zurück. Wie findet sich nun diese Aufgabe zuerst und bei Euklides selbst gelöset?

Die beiden, scheinbar ganz unabhängigen und in den Mitteln sehr verschiedenen Auflösungen, die sich in den Elem. II. 11. und VI. 30. finden, beruhen gleichwohl auf einer und derselben Analyse, wodurch die ursprüngliche Aufgabe auf ein und dieselbe näherliegende zurückgeführt wird; nur dass zur Auflösung dieser letztern denn in dem Zusammenhangs-Netze der mathematischen Wahrheiten von dem übrigens schon nahe am Ziele liegenden Trennungs- und Abgangspunkte aus zwei verschiedene Wege gewählt werden.

Es dient, gleich hier zu bemerken, wie diese Analyse nicht auf die Aufgabe, wie wir sie hier fassen, unmittelbar gestellt ist, sondern auf die Construction von Flächen, namentlich Rechtecken, über den fraglichen Theilen der Linie und über ihr selbst, aus denen alsdann nur mittelbar die gesuchten Verhältnisse der Linie und ihrer Theile selbst nach später (VI. 14.) erörterten Zusammenhange dieser Grössen unter sich abgeleitet werden. Es ergibt sich aus diesen spätern Betrachtungen namentlich, dass eine Linie mittlere Proportionale zwischen zwei andern ist, wenn das Quadrat über ihr gleich ist dem Rechtecke zwischen diesen beiden Linien (VI. 17.). Um die erste Form dieses Ausspruchs ganz unbekümmert, sucht Euklides also eine Linie AB (Taf. I. Fig. 2.) so zu schneiden, dass das Quadrat über AQ gleich dem Rechtecke über AB und QB.

Analyse: Sei nun AQ ein solcher Theil der Linie AB, dass wirklich $AQ^2 = AB \,.\, QB$ (wo ich der Kürze wegen diese algebraische Bezeichnung im geometrischen Sinne gebrauche), so ist, wofern über AQ und AB die Quadrate AH und $A\Delta$ beschrieben, und die Linie HQ bis K verlängert wird, Quadrat $AH =$ Rechteck KB, und auf beiden Seiten das gleiche Rechteck AK addirt, Rechteck ZK gleich Quadrat $A\Delta$, so dass demnach endlich als letzte Aufgabe vorliegt:

„Eine Linie VA um ein solches Stück AZ zu verlängern, dass das Rechteck aus der so verlängerten Linie VZ und der Verlängerung $ZH = ZA$, gleich ist einer gegebenen Grösse, nämlich dem Quadrate $A\Delta$ jener zu verlängernden Linie."

Zur Auflösung dieser Aufgabe bieten dem Euklides die Sätze, einmal II. 6., und ein anderes Mal VI. 28., 29., die vollkommensten Mittel dar. Demnach liegen Auflösung und Beweis, wie sie zunächst II. 30. gegeben sind, ganz nahe, und sind eine unmittelbare Eingebung der Analyse und des Satzes II. 6.; dieselbe Analyse, aber mit andern Mitteln ihrer endlichen Erfüllung, liegt uns VI. 30. klar vor Augen, nur dass letztere uns fremder vorkommen, und ferner zu liegen scheinen; da es wirklich auffallend erscheint, wie Euklides nur zum Behufe dieser, doch schon nach anderer Weise gelösten Aufgabe, die neue Reihe von Sätzen: VI. 28. 29. 30. von der sechsten Erklärung desselben Buches aus eröffnet.

Eben dieselbe Analyse endlich ist es nun auch, die der jetzt gewöhnlichen Auflösung, welche ebenso nur die Verlängerung der gegebenen Linie fordert (das ausserhalb des Kreises liegende Stück

der Secante), dass das Rechteck aus der so verlängerten Linie in die Verlängerung = dem Quadrate der gegebenen Linie, zum Grunde gelegt werden sollte, damit sie mit freier Selbstentscheidung aus dem Schatze eigener Erfindung heraus vom Schüler gegeben, und ihr Beweis mit wirklicher Verstandesthätigkeit und klarer Durchschauung der Beweismittel geführt werden könnte. Denn einen andern Werth hätte ja das Ganze nicht; die Aufgabe ist schon vor Jahrhunderten ohne den Schüler gelöst, das spätere Leben wird ihm meistens nie eine Anwendung davon absondern.

Doch da zeigt sich allermeistens eine unverantwortliche Lücke und ein unvermittelter Sprung in der gewöhnlichen Behandlung dieser Aufgabe. Man gibt scheinbar den Ursprung einer durch Betrachtung wirklicher Flächen und ihrer Verhältnisse vermittelten Auflösung auf, hat es mit blossen Zahlenwerthen von Linien zu thun, und ahmt dennoch in den sie betreffenden Sätzen und Gleichungen alle Operationen von Flächen-Subtraction u. s. w. nach, die nun durch Nichts mehr vermittelt werden, als durch ein vages Probieren, durch welche der vielen möglichen Proportions-Verwandlungen, dividendo, addendo etc. am leichtesten das sonst schon bekannte Ziel erreicht werden könne.

Ich will mich näher erklären. Entweder sollte man bei Betrachtung der vorliegenden Aufgabe ausser allem Zusammenhange mit Flächen, aus denen sie Euklides erst folgert, rein an Verhältnisse von Zahlen denken, durch welche die Theile einer Linie dargestellt sind: und dann würde auf die Auflösung unserer Aufgabe der bekannte Satz von der Tangente freilich in einer ganz anders vermittelten Analyse angewandt werden; Auflösung und Beweis würden ganz anders werden, ich glaube eben die, welche ich gleich unten als die möglichst einfachen in diesem Sinne zur Darstellung bringen werde. Oder man halte die der gewöhnlichen Auflösung zum Grunde liegende Vorstellung wirklicher Flächen auch durch die Behandlung der ganzen Aufgabe fest, damit der Beweis ein Ausfluss der Analyse sein, und daraus verständlich werden könne.

Denn eine ganz einzeln dastehende Construction des freilich leicht sich ergebenden algebraischen Ausdrucks für den grössten Theil x der so zu theilenden Linie, des Ausdrucks

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2},$$

die also nicht die ganze Secante, sondern nur den bis an's Centrum reichenden Theil derselben benutzt, wie sie sich in einzelnen Lehrbüchern findet, halte ich für durchaus verfehlt, da der vermeintlich geometrische Beweis alsdann nichts als eine reine Auflösung einer Gleichung durch viele Mittelstufen hindurch ist, ohne dass der Schüler sich des leitenden Gedankens bewusst werden könne.

Es wird uns nun bei letzterer Art bei weitem leichter und ist dem Standpunkte unserer heutigen Geometrie weit angemessener zu beweisen, dass die Tangente die mittlere Proportionale zwischen u. s. w. sei, als dass das wirklich über der Tangente construirte Quadrat gleich sei dem Rechtecke zwischen u. s. w. Darum möge man immerhin diesen und ähnliche Sätze in ersterer leichterer Weise ableiten, muss dann aber, um ihn zu einem angemessenen

Beweissatze unserer fraglichen Auflösung anwenden zu können, so lange sie nach der obigen Analyse geschehen ist, ihm auch den andern vollen Gehalt zu geben suchen, durch welchen allein er geeignet ist, der so gegebenen Auflösung das Fundament eines durchsichtigen Beweises zu geben. So wie darum Euklides durch VI. 14. 16. 17. u. s. f. seinen frühern nur von Flächen bewiesenen Sätzen auch diese andere Bedeutung und Geltung von Linien und ihren Zahlenwerthen gibt, und somit seine lange vorher gegebene Auflösung Elem. II. 30. erst durch solche ausdrückliche Erweiterung für unsere so gefasste Aufgabe: „Eine Linie stetig zu theilen" gelten lassen kann (siehe andere Auflösung VI. 30.): so wird umgekehrt für uns, die wir solche und ähnliche Sätze eher und lieber über Linien und ihre Zahlenwerthe, als über die an ihnen construirten Flächen beweisen, die umgekehrte Erweiterung nöthig, wenn wir unsere Sätze für Fälle gebrauchen wollen, denen solche von wirklicher Flächen-Construction entnommene Analysen zum Grunde liegen, d. h., auf unsern Fall angewandt, so lange wir bei der obigen Auflösung bleiben. Alles das leistet z. B. die Art der Beweisführung, wie sie sich bei Grunert Geom. §. 392. durch die angezogenen §§. 372. und 386. vervollständigt findet, während bei Ohm, Legendre und Andern der Beweis durch eine gar nicht vermittelte Anwendung der Proportions-Verwandlung aus der reinen Arithmetik in seiner Leichtigkeit und Natürlichkeit getrübt, seinem Ursprunge entfremdet wird. Dort nimmt wirklich der Satz: „Die Tangente ist mittlere Proportionale u. s. w." nach §§. 372. und 386. auch die zweite Geltung an: „Das Quadrat über der Tangente = u. s. w." und ist in dieser Form erst geeignet, den Beweis der so nach der Euklides'schen Analyse gegebenen Auflösung zu führen. Denn dass wir statt des Euklid. II. 6. benutzten Satzes der Auflösung den obengenannten mit Euklid. III. 36. übereinstimmenden, doch ganz in II. 6. beruhenden und daraus abgeleiteten, also eigentlich spätern, anwenden, kann keinen Unterschied im Beweise begründen, der ja lediglich von der Analyse, die in beiden Fällen dieselbe ist, abhängt; und ist nur daher gekommen, dass wir diesen Satz von der Tangente, der uns in seiner arithmetischen Form so leicht und wie von selbst hervortritt, durch eine ein und für alle Mal abgethane Betrachtung über die Identität der arithmetischen und geometrischen Geltung solcher Sätze, viel bequemer in den Inhalt des II. 6. als einzelnen Fall hineinbringen, als dass wir diesen Satz II. 6. in seiner ganzen, uns übrigens mehr gleichgültigen Allgemeinheit fest halten.

Nach dem Vorhergehenden würde demnach, wofern man sich an die Euklides'sche Analyse hielte, die vollständige Auflösung dieser Aufgabe folgende sein:

Analyse wie oben.

Alle algebraischen Hülfsmittel (Meier Hirsch. Geom. Aufgab. S. 120) dieser Auflösung verschmähend, würde ich zu der darauf gegründeten Synthese also fortgehen: Es ist uns eine Linie bekannt, die Secante, so beschaffen, dass das Rechteck über ihr und dem ausserhalb des Kreises liegenden Theile von ihr, welcher also die fragliche Verlängerung werden muss, = dem Quadrate einer von ihrem Endpunkte ausgehenden Tangente. (Denn so dürfen wir nach den obengestellten Forderungen des Unterrichts den bekannten Satz der Tangente aussprechen.) Diese Tangente ist in un-

sern Falle gleich der zu verlängernden Linie, d. h. also, dem innerhalb des Kreises liegenden Stücke der Secante, die, um das Stück so für alle Lagen constant zu haben, nur durch's Centrum zu gehen braucht, und zwar eines Kreises, dessen Durchmesser eben jener Tangente gleich wäre. Woraus sich augenblicklich ganz und in allen ihren Theilen die bekannte, gewöhnliche Auflösung dieser Aufgabe ergibt. Der Beweis, der hier natürlich also immer an Flächen und Rechtecke zu denken hat, wie sie die Analyse schuf, würde ganz nach §. 392. bei Grunert zu führen sein, und so erst Einheit in die Analyse, Synthese und den Beweis gebracht sein. Dennoch scheint mir die Aufgabe nach dem jetzigen Standpunkte unserer Geometrie, eine angemessenere und leichter vermittelte Auflösung, die namentlich von allen vorgängigen Flächenbetrachtungen unabhängig wäre, zu verdienen, zu der ich durch folgende Betrachtungen gelange.

Neue Auflösung der Aufgabe.

Analyse. Es bietet sich ganz ungesucht und leicht irgend eine in mittlere und äussere Verhältnisse getheilte Linie dar. Diese benutze man alsdann nur, um nach dem ganz elementar-bekannten Verfahren (Eukl. VI. 10.): „Eine Linie so oder in den Verhältnissen zu theilen, wie eine andere getheilt ist," das Problem augenblicklich gelöst zu haben. Jene so zuerst in mittlere und äussere Verhältnisse getheilte Linie geht aber augenblicklich in der Secante (BD) eines leicht bestimmten Kreises hervor. Da nämlich die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante u. s. w. ist, so brauchte die Construction nur so angelegt zu sein, dass die Tangente immer gleich wäre dem innerhalb des Kreises liegenden Stücke der Secante, damit letztere verlangter Maassen getheilt wäre.

Wählen wir darum, um auf die einfachste, sicherste Weise eine so unveränderliche Grösse des innerhalb des Kreises liegenden Stückes der Secante für jeden Fall zu gewinnen, die durch's Centrum gehende, deren innerhalb des Kreises liegender Theil alsdann immer unveränderlich gleich dem Durchmesser des Kreises ist: so brauchte man also nur zu einer beliebig als Tangente angenommenen Linie (AB) einen Kreis, dessen Durchmesser gleich dieser Tangente zu construiren, von dem andern nicht am Kreise liegenden Endpunkte (B) dieser Tangente eine Secante durch's Centrum zu ziehen, so würde diese in dem Punkte (C), wo sie den Kreis zunächst schneidet, im mittleren und äussern Verhältnisse getheilt sein. An diese, in geforderter Weise getheilte Linie lege man nun die zu solcher Theilung aufgegebene Linie, und verfahre nach der bekannten, ganz elementar-geläufigen Weise, diese Linie nach Art der andern zu theilen. Um jedoch nicht ein abermaliges, neues Anlegen unserer zu theilenden Linie nöthig zu haben, wird es zweckmässig sein, eben sie selbst gleich als jene sonst willkührliche Tangente (AB), die uns nur überhaupt zu der so getheilten Secante verhelfen sollte, zu benutzen, und es wird sich demnach daraus folgende, als die zweckmässigste, durch die einfache Analyse begründete Auflösung herausstellen.

Synthese: Auf dem Endpunkte A (Taf. I. Fig. 3.) der zu theilenden Linie AB errichte man eine $\perp AO = \frac{1}{2}AB$; beschreibe

aus O mit dem Radius OA einen Kreis; ziehe von B durch's Centrum O die Secante BD, (die demnach in mittlere und äussere Verhältnisse getheilt ist, da ja $BA^2 = CD^2$ (Constr.) $= BC \,.\, BD$); verbinde alsdann D mit A, und ziehe endlich aus C die Linie $CE \parallel DA$, so wird ja natürlich BA wie BD, d. h. ebenfalls in mittlere und äussere Verhältnisse getheilt sein müssen; so dass

$$\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB} \text{ oder } AE^2 = AB \,.\, EB \text{ ist.}$$

Wollte man selbst die sicherlich früher vorgekommene Auflösung: „Eine Linie AB in dieselben Verhältnisse zu theilen, wie eine andere DB getheilt ist," nicht als bekannt voraussetzen, so würde sich demnach der ganze Beweis in zwei Linien also zusammenfassen lassen:

a) BD ist in mittlere und äussere Verhältnisse getheilt (schon in der Auflösung selbst anticipirt).

b) $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{DC}$ $(CE \parallel DA) = \frac{DC}{DB}$ (BD ist ja nach der sect. aur. getheilt) $= \frac{AE}{AB}$ $(CE \parallel DA)$.

Doch dieses Beweises muss es an dieser Stelle der Geometrie durchaus nicht mehr bedürfen und somit die ganze Auflösung weiter nichts sein, als eine spezielle Anwendung einer längst bekannten Theilung einer Linie nach einer andern, die in unserm Falle die Eigenschaft besitzt, welche wir den Theilen der andern geben wollen. Da nun auch bei der andern, allgemein üblichen, Auflösung dieses Problems der Umstand, dass die Secante BD verlangter Maassen getheilt ist, das Hauptmoment des Beweises hergibt, so glaubte ich dasselbe durch obige Auflösung, die eine blosse Verbindung dieser neuerkannten Eigenschaft der Linie BD mit einer allerfrühest schon gelernten Construction, die Theilung einer Linie nach Maassgabe einer andern betreffend, ist, der Unmittelbarkeit der Erkenntniss, und klarer, selbstbewusster Durchschauung, die doch immer ein Hauptaugenmerk des Unterrichts sein sollten, in etwas näher und gleichsam auf das eigene Gebiet des Schülers zurückgeführt zu haben, wo er mit mehr Muth und Selbstvertrauen den Feind des schwierigen Verhältnisses angreift und besiegt.

III.

Ueber einige durch bestimmte Integrale summirbare Reihen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

---

§. 1.

Die Untersuchung über die Summen gewisser Reihen gründet sich auf den Werth des Integrales

$$\int_0^1 (1-x)^p x^{n-1} dx$$

in welchem p eine beliebige Grösse, n eine ganze positive Zahl bedeutet. Man kann denselben entweder aus der Theorie der Gammafunktionen ableiten, oder mittelst einer Reduktionsformel entwickeln, wobei sich die Rechnung sehr einfach folgendermassen gestaltet. Es ist nach einer bekannten Formel

$$\int (1-x^m)^p x^{n-1} dx$$

$$= -\frac{(1-x^m)^{p+1}}{n+mp} x^{n-m} + \frac{n-m}{n+mp} \int (1-x^m)^p x^{n-m-1} dx$$

folglich für $m=1$ und $x=1$, $x=0$:

$$\int_0^1 (1-x)^p x^{n-1} dx = \frac{n-1}{n+p} \int_0^1 (1-x)^p x^{n-2} dx.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$\int_0^1 (1-x)^p x^{n-1} dx = \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(n+p)(n+p-1)\ldots(3+p)(2+p)} \int_0^1 (1-x)^p dx.$$

Für $x = 1-x$ wird aber

$$\int_0^1 (1-x)^p dx = -\int_1^0 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

und folglich

$$\int_0^1 (1-z)^p z^{n-1} dz = \frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{(p+1)(p+2)\ldots.(p+n)}.$$

Für $z = 1 - x$ geht dasselbe in das folgende über:

$$\int_0^1 x^p (1-x)^{n-1} dx = \frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{(p+1)(p+2)\ldots.(p+n)}$$

und wenn man noch $n+1$ für n, $p-1$ für p setzt, so ist

$$\int_0^1 (1-x)^n x^{p-1} dx = \frac{1.2\ldots\ldots n}{p(p+1)\ldots..(p+n)}.$$

Wir wollen nun der Kürze wegen $1.2.3\ldots n$ mit n' bezeichnen und haben jetzt:

$$\frac{1}{n'} \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1} dx = \frac{1}{p(p+1)\ldots.(p+n)}. \quad (1)$$

§. 2.

In der so eben entwickelten Gleichung setzen wir der Reihe nach $p+m$, $p+2m$, $p+3m$ u. s. w. für p, wobei m eine ganz beliebige Grösse bedeutet, und addiren alle so entstehenden Glieder, das erste (1) mit gerechnet; auf der rechten Seite erscheint dann die Reihe

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)}+\frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)}+\frac{1}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)}+\ldots\quad(2)$$

d auf der linken, als Summe derselben, eine Reihe von Integra-
, welche wegen der gleichen Integrationsgränzen in ein einziges
sammengefasst werden können und zwar in das folgende:

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n [x^{p-1} + x^{p+m-1} + x^{p+2m-1} + \ldots] dx$$
$$= \frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n [1 + x^m + x^{2m} + \ldots\ldots] x^{p-1} dx$$
$$= \frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x) \cdot \frac{x^{p-1}}{1-x^m}\, dx. \qquad (3)$$

Der Werth dieses Integrales ist leicht zu finden. Entwickelt man nämlich das Binom $(1-x)^n$ und bezieht die Integration auf jedes einzelne Glied, so wird jenes Integral in die $n+1$ folgenden zerlegt, deren Coeffizienten $n_0, n_1, n_2 \ldots n_n$ die Binomialcoeffizienten bedeuten:

$$\frac{1}{n'}\left[n_0 \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-x^m} - n_1 \int_0^1 \frac{x^p dx}{1-x^m} + n_2 \int_0^1 \frac{x^{p+1}dx}{1-x^m} - \ldots\ldots\right].$$

Was nun auch p und m sein mögen, so lässt sich doch jedes einzelne Integral durch die gehörige Substitution einer neuen Veränderlichen auf die Form

$$\int_0^1 \frac{z^{\mu-1}dz}{1-z^\nu}$$

bringen, worin μ und ν ganze positive Zahlen sind. Man kennt aber den unbestimmten Werth eines solchen Integrales, folglich auch den zwischen den Gränzen 0 und 1. Die Aufgabe von der Summirung jener Reihe ist daher vollständig gelöst in der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)}+\frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)}+\frac{1}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)}+\ldots\ldots\\&=\frac{1}{m}\left[n_0\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{1-x^m}-n_1\int_0^1\frac{x^p dx}{1-x^m}+n_2\int_0^1\frac{x^{p+1}dx}{1-x^m}-\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\end{aligned}\right\}(4)$$

nke Seite unendlich viele, deren rechte aber bloss $n+1$
enthält.

Im Allgemeinen führen die angedeuteten Integrationen Kreisbogen und Logarithmen, für $m=1$ aber auf eine algebi sche Grösse. In diesem Falle gestaltet sich das Integral (3) e facher so:

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^{n-1} x^{p-1} dx$$

dessen Werth man aus Formel (1) erhält, wenn man $n-1$ fü setzt; derselbe ist

$$=\frac{1}{n'}\cdot\frac{(n-1)'}{p(p+1)\ldots.(p+n-1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{p(p+1)\ldots.(p+n-1)}$$

Also haben wir, in (4) $m=1$ setzend,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{p(p+1)\ldots\ldots(p+n)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n+1)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)\ldots\ldots(p+n+2)}+\ldots\ldots\\=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{p(p+1)\ldots\ldots(p+n-1)}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ne Summe, welche schon bekannt ist und auch auf elementarem
ege ermittelt werden kann.

Für $m>1$ werden oft die einzelnen Integrale in (4) jedes für
:h unendlich, was natürlich nicht hindert, dass ihre Differenzen
ıdliche Grössen sein können. Diesem Uebelstande hilft man bei
aktischer Berechnung specieller Fälle sehr leicht dadurch ab,
ss man erst alle Integrationen unbestimmt ausführt, die gefunde-
n logarithmischen und Kreisfunktionen so weit als möglich mit

einander verbindet und erst dann zur Substitution der Gränzwerthe 0 und 1 schreitet.

Z. B. für $p = 1$, $m = 2$, $n = 2$ ist

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \ldots.$$
$$= \frac{1}{1.2}\left[\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} - 2\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^2} + \int_0^1 \frac{x^2dx}{1-x^2}\right].$$

Integrirt man auf der rechten Seite unbestimmt, so ergiebt sich

$$\frac{1}{1.2}\left[\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x} + l(1-x^2) + \tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x} - x\right]$$

ein Ausdruck, der sich in den folgenden zusammenziehen lässt:

$$\tfrac{1}{2}[2l(1+x) - x]$$

und daraus folgt für $x = 1$, $x = 0$:

$$l2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \ldots. \quad (6).$$

Anderweit bemerkenswerthe Resultate erhält man für $p = 2$, $m = 2$, $n = 2$ und $p = \frac{1}{2}$, $m = 2$, $n = 2$, nämlich die folgenden beiden Reihen:

$$\frac{3}{4} - l2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \ldots \quad (7)$$
$$\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{9.11.13} + \ldots \quad (8)$$

§. 3.

Eben so leicht findet man die Summe einer Reihe, deren einzelne Glieder die nämlichen wie der in (4) sind, aber mit wechselnden Zeichen fortgehen. Es folgt nämlich aus (1), wenn man daselbst $p + m$, $p + 2m$ u. s. w. für p setzt und alle so entstehenden Glieder, die Formel (1) eingerechnet, mit wechselnden Zeichen zusammennimmt, dass die Summe der fraglichen Reihe gleich sei

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n[x^{p-1} - x^{p+m-1} + x^{p+2m-1} - \ldots\ldots]dx$$
$$= \frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n \cdot \frac{x^{p-1}}{1+x^m}\,dx$$

Entwickelt man wieder das Binom $(1-x)^n$ und integrirt jedes einzelne Glied, so gelangt man zu der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)}-\frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)}+\frac{1}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots\ldots(p+2m+n)}-\ldots\ldots\\&=\frac{1}{n!}\left[n_0\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{1+x^m}-n_1\int_0^1\frac{x^p dx}{1+x^m}+n_2\int_0^1\frac{x^{p+1}dx}{1+x^m}-\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

emerkenswerthe spezielle Fälle sind z. B. für $m=2$, $n=2$ und ann der Reihe nach für $p=1$, $p=2$, $p=\frac{1}{2}$:

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}l2=\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}-\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}-\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{16\sqrt{2}}\left[\pi-l\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]=\frac{1}{1.3.5}-\frac{1}{5.7.9}+\frac{1}{9.11.13}-\ldots \quad (12)$$

Entwickelt man in jedem der Integrale der Gleichung (9) den Bruch $\frac{1}{1+x^m}$ in die Reihe $1-x^m+x^{2m}$ u. s. w. und integrirt jedes einzelne Glied, so findet man, dass jene Reihe auch unter folgender Form dargestellt werden kann:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{n_0}{n'}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+m}+\frac{1}{p+2m}-\frac{1}{p+3m}+\ldots\ldots\right)\\ -\frac{n_1}{n'}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+1+m}+\frac{1}{p+1+2m}-\frac{1}{p+1+3m}+\ldots\right)\\ +\frac{n_2}{n'}\left(\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+2+m}+\frac{1}{p+2+2m}-\frac{1}{p+2+3m}+\ldots\right)\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \quad (13)$$

welches eine algebraische Zerlegung jener Reihe ist.

§. 4.

Man kann das bisher befolgte Verfahren noch verallgemeinern und auf solche Reihen ausdehnen, welche nach den steigenden Potenzen einer beliebigen Hauptgrösse u fortgehen.

Man setze nämlich in Formel (1) der Reihe nach $p=p$, $p+m$, $p+2m$ u. s. w., multiplizire die entstehenden Glieder mit 1, u, u^2 u. s. w. und addire sie, so steht auf der einen Seite die Reihe

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)}+\frac{u}{(p+m)\,(p+m+1)\ldots(p+m+n)}+\frac{u^2}{(p+2m)\,(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)}+\ldots \quad (14)$$

d auf der anderen als Summe derselben das Integral

$$\frac{1}{n^2}\int_0^1 (1-x)^n[x^{p-1}+ux^{p+m-1}+u^2x^{p+2m-1}+\ldots]dx$$

$$=\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n \cdot \frac{x^{p-1}}{1-ux^m}\,dx$$

welches sich wieder in folgende Reihe zerlegen lässt:

$$\frac{1}{n'}\left[n_0\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{1-ux^m}-n_1\int_0^1\frac{x^p dx}{1-ux^m}+n_2\int_0^1\frac{x^{p+1}dx}{1-ux^m}-\ldots\right] \quad (15)$$

Ein allgemeines Glied aus dieser Reihe ist

$$\int_0^1\frac{x^{r-1}dx}{1-ux^m}$$

und geht durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z=u^{\frac{1}{m}}x$ in das folgende über:

$$\frac{1}{u^{\frac{r}{m}}}\int_0^{u^{\frac{1}{m}}}\frac{z^{r-1}dz}{1-z^m}$$

welches nach den gewöhnlichen Regeln gefunden werden kann. So hat man z. B. für $m=1$, $n=2$, $p=1$ aus (14) und (15)

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{u}{2.3.4}+\frac{u^2}{3.4.5}+\ldots..$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\int_0^1\frac{dx}{1-ux}-2\int_0^1\frac{xdx}{1-ux}+\int_0^1\frac{x^2dx}{1-ux}\right]$$

und für $z=ux$ werden die Integrale

$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\int_0^u\frac{dz}{1-z}-\frac{2}{u^2}\int_0^u\frac{zdz}{1-z}+\frac{1}{u^3}\int_0^u\frac{z^2dz}{1-z}\right]$$

Durch Ausführung derselben erhält man leicht, sobald der absolute Werth von u die Einheit nicht übersteigt,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2.3}+\frac{u}{2.3.4}+\frac{u^2}{3.4.5}+\ldots..\\ =&\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}-\frac{(u-1)^2}{2u^3}\,l(1-u)\end{aligned}\right\}(+1=u=-1). \quad (16).$$

Ist der absolute Werth von $u>1$, so divergirt jene Reihe und die Integrale werden unendlich gross.

Für $u=1$, $u=-1$ entstehen die Reihen

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots. \quad (17)$$

$$2l2-\frac{5}{4}=\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}-\ldots. \quad (18)$$

wie sich aus den Gleichungen (5) und (9) ebenfalls findet, wenn man $m=1$, $n=2$, $p=1$ nimmt.

§. 5.

Auch solche Reihen, die nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortgehen und deren einzelne Glieder Coefficienten der bisher betrachteten Form haben, können durch die vorige Methode summirt werden.

Man setze wieder in (1) $p = p$, $p + m$, $p + 2m$ u. s. w. und multiplizire die entstehenden Gleichungen mit 1, cos v, cos $2v$ u. s. w. so giebt die Addition aller auf der einen Seite die Reihe

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{\cos v}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \frac{\cos 2v}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)} + \ldots \quad (19)$$

und auf der anderen die Summe derselben

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n[x^{p-1}+x^{p+m-1}\cos v+x^{p+2m-1}\cos 2v+\ldots]dx$$
$$=\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n[1+x^m \cos v+x^{2m}\cos 2v+\ldots\ldots]x^{p-1}dx.$$

Die eingeklammerte Reihe kann mittelst der bekannten Formel

$$\frac{1-r\cos v}{1-2r\cos v+r^2}=1+r\cos v+r^2\cos 2v+\ldots\ldots,\ +1>r>-1,$$

summirt werden, und dann geht jenes Integral für $r=x^m$ in das folgende über:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{n'}\int_0^1(1-x)^n\cdot\frac{1-x^m\cos v}{1-2x^m\cos v+x^{2m}}x^{p-1}dx\\ &=\frac{1}{n'}\Big[n_0\int_0^1\frac{1-x^m\cos v}{1-2x^m\cos v+x^{2m}}x^{p-1}dx\\ &\qquad -n_1\int_0^1\frac{1-x^m\cos v}{1-2x^m\cos v+x^{2m}}x^p dx+\ldots\Big]\end{aligned}\right\}(20)$$

wodurch die Summe jener Reihe (19) dargestellt wird, indem man Mittel besitzt einen Ausdruck von der Form

$$\int\frac{x^{\nu-1}dx}{1-ax^\mu+x^{2\mu}}$$

zu integriren.

Eben so leicht erhält man aus Formel (1)

$$\frac{\sin v}{p(p+1)\ldots(p+n)}+\frac{\sin 2v}{(p+m)\,(p+m+1)\ldots(p+m+n)}+\frac{\sin 3v}{(p+2m)\,(p+2m+1)\ldots\ldots(p+2m+n)}+\ldots \quad (21)$$

$$=\frac{1}{n'}\int_0^1(1-x)^n[x^{p-1}\sin v+x^{p+m-1}\sin 2v+x^{p+2m-1}\sin 3v+\ldots\ldots]dx$$

$$=\frac{1}{n'}\int_0^1(1-x)^n[\sin v+x^m\sin 2v+x^{2m}\sin 3v+\ldots\ldots]x^{p-1}dx$$

wobei die eingeklammerte Reihe nach der Formel

$$\frac{\sin v}{1-2r\cos v+r^2}=\sin v+r\sin 2v+r^2\sin 3v+\ldots\ldots\ldots$$

summirt werden kann. Man erhält

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n \frac{\sin v}{1-2x^m \cos v + x^{2m}} x^{p-1}dx$$

$$= \frac{\sin v}{n'} [n_0 \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-2x^m \cos v + x^{2m}} - n_1 \int_0^1 \frac{x^p dx}{1-2x^m \cos v + x^{2m}} + \ldots] \quad (22)$$

womit die Summe der Reihe (21) gefunden ist.

Für $p = m = n = 1$ ist z. B.

$$\frac{\sin v}{1.2} + \frac{\sin 2v}{2.3} + \frac{\sin 3v}{3.4} + \ldots\ldots$$

$$= \sin v \int_0^1 \frac{dx}{1-2x \cos v + x^2} - \sin v \int_0^1 \frac{xdx}{1-2x \cos v + x^2}$$

$$= \sin v \int_0^1 \frac{(1-x)dx}{1-2x \cos v + x^2}$$

Durch Anwendung der bekannten Integralformel

$$\int \frac{(A+Bx)dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2Ac-Bb}{c\sqrt{4ac-b^2}} \text{Arctan} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} + \frac{B}{2c} l(a+bx+cx^2)$$

erhält man hieraus

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin v}{1.2} + \frac{\sin 2v}{2.3} + \frac{\sin 3v}{3.4} + \ldots\ldots \\ &= \frac{\sin v}{2} [(\pi - v) \tan \frac{v}{2} - l(2 \sin \frac{v}{2})]. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Zwei spezielle Fälle der obigen allgemeinen Formeln, wenn nämlich $m = n$ und $m = n+1$ ist, hat Herr Dr. Stern in Crelle's Journal Bd. 10. S. 209 entwickelt. Er geht von Zerlegungen wie die in (13) aus, die er durch Induction findet und mittelst der Bernoullischen Schlussreihe verifizirt. Dies ist gerade der umgekehrte Weg, welcher indessen nicht so kurz und allgemein zum Ziele führen dürfte als der obige direkte.

IV.

Ein Beitrag zur Theorie der Ausmittelung des Kennzeichens, ob eine Variation zweiter Ordnung positiv oder negativ ist, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann. Gelegenheitlich ist dabei ein Beitrag zur Beurtheilung der beiden von Euler und Lagrange gegebenen Methoden der relativen Grössten und Kleinsten.

Von

Herrn Doctor G. Strauch

Lehr. d. Mathm. an der Erziehungsanstalt zu Lenzburg im Kanton Aargau.

Diese über die Variationen zweiter Ordnung anzustellende Untersuchung kommt bekanntlich am häufigsten vor bei der Anwendung des Variationskalkuls auf das Grösste und Kleinste. Ist der gegebene Ausdruck, der ein Grösstes oder Kleinstes werden soll, eine reine Urfunktion, oder enthält er auch (totale oder partielle) Differentiale; so hat diese Untersuchung keine weitere Schwierigkeit, sie lässt sich jedesmal mittelst der Theorie der unbestimmten Koefficienten oder mittelst der Theorie der Gleichungen ausführen. Ist aber der vorgelegte Ausdruck, der ein Grösstes oder Kleinstes werden soll, ein Integral; so kann die in Rede stehende Untersuchung manchem, der in der höheren Analysis nicht viele Fertigkeit hat, bedeutende Schwierigkeiten verursachen. Die hier folgende Abhandlung soll sich daher nur auf solche Probleme erstrecken, wo der vorgelegte Ausdruck ein Integral ist; und dabei mögen zwei Abtheilungen gemacht werden, je nachdem derselbe entweder ein einfaches, oder ein zweifaches, dreifaches, u. s. w. Integral ist.

Erste Abtheilung.

Der vorgelegte Ausdruck sei ein einfaches Integral. Diese Aufgabe ist folgende: Es sei V ein aus den Elementen

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\cdots\cdots\frac{d^my}{dx^m},\ z,\ \frac{dz}{dx}\cdots\cdots\frac{d^nz}{dx^n},\ v,\ \frac{dv}{dx},\cdots\cdots\cdots$$

gebildeter Ausdruck, und man sucht für y, z, v ...... solche Funktionen von x, dass dabei das von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Erstens. Wenn V ein nur aus den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$ ... $\frac{d^m y}{dx^m}$ gebildeter Ausdruck ist, man also nur y als eine solche Funktion von x sucht, dass dabei $U = \int_a^\alpha V \cdot dx$ ein Grösstes oder Kleinstes wird, so hat man den einfachsten Fall. Die Untersuchung, wann die zweite Variation $\delta^2 U$ positiv oder negativ sei, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann, ist bereits von französischen Mathematikern ausgeführt. Z. B.

1) von Laplace. Nova acta eruditorum. 1772. S. 193
2) von Legendre. Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris. 1786, p. 7; et 1787, p. 348
3) von Lagrange. Théorie des Fonctions analytiques, 2. édit. p. 276. In Crelle's Uebersetzung der Lagrange'schen Werke lese man. Bd. I. S. 500. ff.

Zweitens. Wenn aber bei dem zusammengesetzteren Falle, wo nemlich y, z, v, u. s. w. als solche Funktionen von x gesucht werden, dass $U = \int_a^\alpha V \cdot dx$ ein Grösstes oder Kleinstes wird, die zweite Variation $\delta^2 U$ positiv oder negativ ist, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann: diese Untersuchung hat ein deutscher Mathematiker ausgeführt, und jeder schon so weit gediehene Analytiker wird sie mit Vergnügen lesen. Man sehe: Lehre des Grössten und Kleinsten von M. Ohm. Berlin. 1825. S. 279—283, S. 292, 293.

So gewiss es aber ist, dass diese Untersuchungen für den zur Reife gediehenen Analytiker nichts mehr zu wünschen übrig lassen; eben so gewiss ist es auch, dass sehr Viele, und sogar solche, die über Variationskalkul zu schreiben unternommen haben, nicht in den Geist derselben eindringen konnten. Besagten Leuten wäre es besser ergangen, wenn sie nur ein einziges Problem vollständig durchgeführt, und die sich dabei ergebende zweite Variation mit Umsicht untersucht hätten. Ich halte es daher für nicht überflüssig, einige einfache Probleme hier aufzustellen, und dann erst zur zweiten Abtheilung, wo vielfache Integrale vorkommen, überzugehen.

Erstes Problem. Man sucht diejenige *ebene* Kurve, welche von zwei zu den Abscissen a und α gehörigen rechtwinkligen Ordinaten begränzt wird, und zwischen ihren Gränzpunkten die kürzeste ist, während für diese Gränzordinaten selbst vorgeschrieben ist, dass ihr Pro-

dukt unter allen Umständen einen bestimmt gegebenen negativen Werth ($-k^2$) haben soll.

Die Aufgabe ist also: Es soll y als solche Funktion von x gesucht werden, dass das bestimmte Integral

$$\text{I.}\quad U = \int_a^\alpha dx \,.\, \sqrt{1+p^2}$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird, während eben diese für y gesuchte Funktion nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen die Gleichung

$$\text{II.}\quad y_a \,.\, y_\alpha = -k^2$$

statt findet.

Hier ist nach Euler's Bezeichnung $p = \frac{dy}{dx}$; und y_a bedeutet, dass man in der für y gesuchten Funktion a an die Stelle des x gesetzt habe. Ebenso verhält es sich mit y_α.

Variirt man Gleichung I., so bekommt man bekanntlich

$$\text{III.}\quad \delta U = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \,.\, \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \,.\, \delta y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(-\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}\right) . \,\delta y \,.\, dx$$

und

$$\text{IV.}\quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \,.\, \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \,.\, \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[-\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} \,.\, \delta^2 y + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \,.\, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] . \,dx.$$

Auch hier bedeuten die unten angehängten α und a, dass man a und α an die Stelle des x zu setzen habe. Wenn man Gleichung II. variirt, und dabei die Ausdrücke δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, u. s. w. als solche behandelt, deren Werth von δy_a, $\delta^2 y_a$, u. s. w. abhängig ist; so bekommt man

$$\text{V.}\quad \delta y_\alpha = \frac{k^2}{y_a{}^2}\,\delta y_a.$$

$$\text{VI.}\quad \delta^2 y_\alpha = \frac{k^2}{y_a{}^2} \,.\, \delta^2 y_a - 2 \,.\, \frac{k^2}{y_a{}^3} \,.\, \delta y_a{}^2.$$

Eliminirt man δy_α aus III., so bekommt man

$$\text{VII.}\quad \delta U = \left[\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \frac{k^2}{y_a{}^2} - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\right] . \,\delta y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(-\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}\right) \delta y \,.\, dx.$$

Daraus ergibt sich nun die Hauptgleichung

$$\text{VIII.} \quad \frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}=0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IX.} \quad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \frac{k^2}{y_\alpha{}^2}-\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a=0.$$

Integrirt man die Hauptgleichung, so ergibt sich

$$\text{X.} \quad y=A\,.\,x+B$$

d. h. **die gesuchte ebene Kurve ist die grade Linie**; und wenn man A statt p, und $Aa+B$ statt y_a in IX. einsetzt, so bekommt man

$$\frac{A\,.\,k^2-(A\,.\,a+B)^2\,.\,A}{(Aa+B)^2\,.\sqrt{1+A^2}}=0$$

oder

$$\text{XI.} \quad A\,.\,[k^2-(Aa+B)^2]=0.$$

Setzt man eben so $Aa+B$ und $A\alpha+B$ bezüglich statt y_a und y_α in II. ein; so bekommt man

$$\text{XII.} \quad (A\,.\,a+B)\,.\,(A\,.\,\alpha+B)=-k^2.$$

Die Gleichungen XI. und XII. dienen zur Bestimmung der Konstanten A und B.

Gleichung XI. wird erfüllt, wenn $A=0$; dabei reducirt sich XII. auf $B^2=-k^2$. Diese Gleichung enthält einen Widerspruch in sich selbst; es kann also nicht $A=0$ sein.

Gleichung XI. wird auch erfüllt, wenn $k^2-(Aa+B)^2=0$ ist. Daraus folgt $Aa+B=\pm\sqrt{k^2}$; und XII. geht über in $(A\alpha+B)\,.\,(\pm\sqrt{k^2})=-k^2$, d. h. es ist $A\alpha+B=\mp\sqrt{k^2}$. Gleichung X. geht also über

$$\text{XIII.} \quad y=\pm\frac{2\,.\sqrt{k^2}}{\alpha-a}\,.\,x\mp\frac{(a+\alpha)\,.\sqrt{k^2}}{\alpha-a}.$$

Die gefundene Grade schneidet also die Abscissenaxe da, wo $x=\frac{a+\alpha}{2}$, d. h. mitten zwischen den Gränzordinaten. Sie geht von oben nach unten, wenn man

$$y=-\frac{2\,.\sqrt{k^2}}{\alpha-a}\,.\,x+\frac{(a+\alpha)\,.\sqrt{k^2}}{\alpha-a}$$

setzt; dagegen geht sie von unten nach oben, wenn man

$$y=\frac{2\,.\sqrt{k^2}}{\alpha-a}\,.\,x-\frac{(a+\alpha)\,.\sqrt{k^2}}{\alpha-a}$$

setzt.

Eliminirt man nun $\delta^2 y_\alpha$ aus IV., und berücksichtigt man noch die Hauptgleichung VIII.; so reducirt sich IV. auf

$$\text{XIV.}\quad \delta^2 U = -\frac{2A \cdot k^2}{y^3{}_a \cdot \sqrt{1+A^2}} \cdot \delta y^2{}_a + \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}} \cdot \int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx$$

und es fragt sich: kann dieser für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck als positiv oder als negativ gelten? Um diese Frage zu beantworten, nehme man das von a bis x erstreckte Integral $\int_a^x (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx$, und setze

$$\text{XV.}\quad \int_a^x (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx = (\varphi x) \cdot \delta y^2{}_x - (\varphi a) \cdot \delta y^2{}_a + \int_a^x [\frac{d\delta y}{dx} + (\psi x) \cdot \delta y]^2 \cdot dx$$

wo φx und ψx zwei noch zu bestimmende Funktionen sind. Differentiirt man nun auf beiden Seiten, und dividirt man dann Alles mit dx; so bekommt man

$$(\frac{d\delta y}{dx})^2 = \frac{d\varphi x}{dx} \cdot \delta y^2{}_x + 2 \cdot (\varphi x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + [\frac{d\delta y}{dx} + (\psi x)\delta y]^2$$

oder

$$\text{XVI.}\quad [\frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2] \cdot \delta y^2{}_x + 2 \cdot [(\varphi x) + (\psi x)] \cdot \delta y_x \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Funktion δy von x und bei jedem beliebigen Werthe des x; sie muss also in folgende zwei identische Gleichungen zerfallen:

$$\frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2 = 0 \text{ und } (\varphi x) + (\psi x) = 0.$$

Daraus folgt $\varphi x = \frac{1}{x+c}$ und $\psi x = -\frac{1}{x+c}$, wo c eine durch die Integration eingegangene willkührliche Konstante ist. Gleichung XV. geht also über in

$$\int_a^x (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx = \frac{1}{x+c} \cdot \delta y^2{}_x - \frac{1}{a+c} \cdot \delta y^2{}_a + \int_a^x (\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y)^2 \cdot dx.$$

Diese Gleichung gilt bei jedem beliebigen Werthe des x, also auch bei $x = \alpha$; und man hat folglich

$$\text{XVII.}\quad \int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx = \frac{1}{\alpha+c} \cdot \delta y^2{}_\alpha - \frac{1}{a+c} \cdot \delta y^2{}_a + \int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y)^2 \cdot dx.$$

Man beachte nun folgende drei Punkte:

1) Es existirt durchaus keine Bedingung, von welcher der Werth der Konstanten c abhängt;

2) Man mag der Konstanten c was immer für einen Werth beilegen, dieser Werth hat niemals Einfluss auf δy und $\frac{d\delta y}{dx}$; und

3) So wie der Werth des linken Theils der Gleichung XVII. von c unabhängig ist, eben so ist der Werth des rechten Theils dieser Gleichung von c unabhängig. Dieses kann man aber noch auf folgende Art näher nachweisen: Weil

$$\left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c}\cdot\delta y\right)^2 = \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{d\left(\frac{1}{x+c}\cdot\delta y^2\right)}{dx},$$

so kann man statt Gleichung XVII. auch schreiben

$$\text{XVIII.}\quad \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 . dx = \frac{1}{\alpha+c}\cdot\delta y^2{}_\alpha - \frac{1}{a+c}\cdot\delta y^2{}_a$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{d\left(\frac{1}{x+c}\delta y^2\right)}{dx}\right] . dx$$

und wenn man das vollständige Differential integrirt, so bleibt bloss

$$\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 . dx = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 . dx.$$

Hierdurch ist also strenge nachgewiesen, dass der Werth des rechten Theiles der Gleichung XVII. von c unabhängig ist. Wenn man nun aus XVII. den mit $\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 . dx$ gleichbedeutenden Ausdruck in XIV. einsetzt, und dann noch $\delta y^2{}_\alpha$ eliminirt; so bekommt man

$$\text{XIX.}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\left[-\frac{2A.k^2}{y^3{}_a} + \frac{k^4}{(1+A^2).(\alpha+c).y^4{}_a}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1+A^2).(a+c)}\right].\delta y^2{}_a + \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}.\int_a^\alpha \left[\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c}.\delta y\right]^2 . dx.$$

Da nun der Werth des $\delta^2 U$ von der Konstanten c unabhängig ist; so lege man dem c einen solchen Werth bei, dass die Gleichung stattfindet:

$$\text{XX.}\quad -\frac{2A.k^2}{y^3{}_a} + \frac{k^4}{(1+A^2).(\alpha+c).y^4{}_a} - \frac{1}{(1+A^2).(a+c)} = 0.$$

Dabei reducirt sich XIX. auf

$$\text{XXI.}\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}.\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c}.\delta y\right)^2 . dx.$$

Aus Gleichung XX. ergeben sich zwei verschiedene Werthe für c, von denen man nach Belieben den einen oder den andern in XXI. einzusetzen hat. An XXI. aber erkennt man, dass $\delta^2 U$ positiv ist; denn das Radikal $(1+A^2)^{\frac{3}{2}}$ hat nur seine positive Bedeutung,

weil es in Gleichung I. nur als positiv vorausgesetzt worden ist, wie auf folgende Weise erörtert werden mag:

Die Differenz $\alpha - a$ ist positiv, also muss (wie aus der Theorie der Rectifikation bekannt ist) die erste Ableitung des Bogens bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des x positiv sein, d. h. das Radikal $\sqrt{1+p^2}$ darf in Gleichung I. nur nach seiner positiven Bedeutung genommen werden, welche Einschränkung durch die ganze Aufgabe festgehalten werden muss.

Zweites Problem. Man sucht y als solche Funktion von x, dass das bestimmte Integral

$$\text{I.}\quad U = \int_a^\alpha [4y^2 + 2my \cdot \frac{dy}{dx} - (\frac{dy}{dx})^2] \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Man variire, und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$; so bekommt man

$$\text{II.}\quad \delta U = 2 \cdot (my-p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - 2 \cdot (my-p)_a \cdot \delta y_a$$
$$+ 2 \cdot \int_a^\alpha (4y + mp - \frac{d(my-p)}{dx}) \, \delta y \cdot dx$$

$$\text{III.}\quad \delta^2 U = 2 \cdot (my-p)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - 2 \cdot (my-p)_a \cdot \delta^2 y_a$$
$$+ 2 \cdot \int_a^\alpha [(4y + mp - \frac{d(my-p)}{dx}) \cdot \delta^2 y$$
$$+ 4 \cdot \delta y^2 + 2m \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \cdot dx.$$

Hier hat man als Hauptgleichung

$$\text{IV.}\quad 4y + mp - \frac{d(my-p)}{dx} = 0$$

und als Gränzengleichung hat man

$$\text{V.}\quad (my-p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - (my-p)_a \cdot \delta y_a = 0.$$

Wenn man die Hauptgleichung integrirt, so bekommt man

$$\text{VI.}\quad y = \frac{h}{2} \cdot \sin\,(2x+g)$$

als die für y gesuchte Funktion, wo h und g zwei noch zu bestimmende willkührliche Konstanten sind. Die Gränzengleichung geht jetzt über in

$$\text{VII.}\quad [\frac{mh}{2} \cdot \sin\,(2\alpha+g) - h \cdot \cos\,(2\alpha+g)] \cdot \delta y_\alpha$$
$$- [\frac{mh}{2} \cdot \sin\,(2a+g) - h \cdot \cos\,(2a+g)] \cdot \delta y_a = 0.$$

Diese Gleichung, welche bei Bestimmung der Konstanten noch be-

nützt werden muss, wird sich auf verschiedene Weise zerlegen, je nachdem δy_a und δy_α willkürlich oder abhängig sind. Unter Berücksichtigung der Hauptgleichung reducirt sich nun III. auf

$$\text{VIII.}\quad \delta^2 U = 2 \,.\, (my-p)_\alpha \,.\, \delta^2 y_\alpha - 2 \,.\, (my-p)_a \,.\, \delta^2 y_a$$
$$+\int_a^\alpha [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx.$$

Man nehme nun das von a bis x erstreckte Integral

$$\int_a^x [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx,$$

und setze

$$\text{IX.}\quad \int_a^x [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx$$
$$= (\varphi x) \,.\, \delta y_x{}^2 - (\varphi a) \,.\, \delta y_a{}^2 - \int_a^x [\frac{d\delta y}{dx} + (\psi x) \,.\, \delta y]^2 \,.\, dx$$

wo φx und ψx zwei noch zu bestimmende Funktionen sind. Man differentiire auf beiden Seiten, dividire Alles mit dx, und bringe alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so bekommt man

$$\text{X.}\quad [4 - \frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2] \,.\, \delta y_x{}^2 + 2 \,.\, [m - (\varphi x) + (\psi x)] \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Funktion δy von x, und bei jedem beliebigen Werthe des x; sie zerfällt also in folgende zwei identische Gleichungen:

$$4 - \frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2 = 0 \text{ und } m - (\varphi x) + (\psi x) = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi x = m + 2 \,.\, \text{tg}\ (2x + c)$$

und

$$\psi x = 2 \,.\, \text{tg}\ (2x + c).$$

Gleichung IX. geht also jetzt über in

$$\int_a^x [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx$$
$$= [m + 2 \,.\, \text{tg}\ (2x + c)] \,.\, \delta y_x{}^2 - [m + 2 \,.\, \text{tg}\ (2a + c)] \,.\, \delta y_a{}^2$$
$$- \int_a^x [\frac{d\delta y}{dx} + 2 \,.\, \delta y \,.\, \text{tg}\ (2x + c)]^2 \,.\, dx.$$

Diese Gleichung gilt bei jedem beliebigen Werthe des x, also auch bei $x = \alpha$; und man hat

$$\text{XI.} \int_a^\alpha [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx$$
$$= [m + 2 \,.\, \text{tg}\,(2a + c)] \,.\, \delta y_\alpha^2 - [m + 2 \,.\, \text{tg}\,(2a + c)] \,.\, \delta y_a^2$$
$$- \int_a^\alpha [\frac{d\delta y}{dx} + 2 \,.\, \delta y \,.\, \text{tg}\,(2x + c)]^2 \,.\, dx.$$

Sowie der Werth des linken Theiles dieser Gleichung von c unabhängig ist, ebenso ist auch der Werth des rechten Theiles dieser Gleichung von c unabhängig. Dieses kann man aber auf folgende Art näher nachweisen: Weil

$$-[\frac{d\delta y}{dx} + 2 \,.\, \delta y \,.\, \text{tg}\,(2x + c)]^2 = 4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2$$
$$- \frac{d[(m + 2 \,.\, \text{tg}\,(2x + c)) \,.\, \delta y^2]}{dx}$$

ist, so kann man statt Gleichung XI. auch setzen

$$\text{XII.} \int_a^\alpha [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx$$
$$= [m + 2 \,.\, \text{tg}\,(2\alpha + c)] \,.\, \delta y_\alpha^2 - [m + 2 \,.\, \text{tg}\,(2a + c)] \,.\, \delta y_a^2$$
$$+ \int_a^\alpha \{4\delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2 - \frac{d[(m + 2 \,.\, \text{tg}(2x + c)) \,.\, \delta y^2]}{dx}\} \,.\, dx$$

und wenn man das vollständige Differential integrirt, so bleibt bloss

$$\int_a^\alpha [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx$$
$$= \int_a^\alpha [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx.$$

Hierdurch ist also strenge erwiesen, dass der Werth des rechten Theiles der Gleichung XI. von c ganz unabhängig ist. Wenn man nun aus XI. den mit

$$\int_a^\alpha [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx$$

gleichbedeutenden Ausdruck in VIII. einsetzt, so bekommt man

$$\text{XIII.} \quad \delta^2 U = 2 \,.\, [\frac{mh}{2} \,.\, \sin\,(2\alpha + g) - \cos\,(2\alpha + g)] \,.\, \delta^2 y_\alpha$$
$$+ 2 \,.\, [m + 2 \,.\, \text{tg}\,(2\alpha + c)] \,.\, \delta y_\alpha^2$$
$$- 2 \,.\, [\frac{mh}{2} \,.\, \sin\,(2a + g) - \cos\,(2a + g)] \,.\, \delta^2 y_a$$
$$- 2 \,.\, [m + 2 \,.\, \text{tg}\,(2a + c)] \,.\, \delta y_a^2$$
$$- 2 \,.\, \int_a^\alpha [\frac{d\delta y}{dx} + 2 \,.\, \delta y \,.\, \text{tg}\,(2x + c)]^2 \,.\, dx.$$

Wenn nun nicht $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w.

ist, so kann man doch jedesmal der Konstanten c einen solchen Werth beilegen, dass das ausserhalb des Integralzeichens befindliche Aggregat wegfällt; und dabei reducirt sich Gleichung XIII. auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot \operatorname{tg}(2a + c)\right]^2 \cdot dx,$$

woran man erkennt, dass $\delta^2 U$ negativ ist, und ein Grösstes stattfindet.

Drittes Problem. Man sucht unter allen *ebenen* Kurven, welche zwischen den zu den Abscissen a und α gehörigen rechtwinkligen Gränzordinaten einerlei Flächeninhalt einschliessen, diejenige, bei welcher der Schwerpunkt am höchsten oder tiefsten (der horizontal genommenen Abscissenaxe so nahe oder ferne als möglich) liegt.

Die hiesige Aufgabe verlangt also für y eine solche Funktion von x, dass der Quotient

$$\text{I.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird, während eben diese für y gesuchte Funktion nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II.} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt.

Dies Problem gehört in die Klasse derjenigen, welche von Euler relative Grösste oder Kleinste genannt werden. Er verfährt dabei auf folgende Weise: Er multiplicirt den Ausdruck II. mit einem (vorerst noch unbekannten aber im Laufe der Untersuchung sich bestimmenden) konstanten Faktor, und addirt dann dieses Produkt zu I. Er setzt also

$$\text{III.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2\int_a^\alpha y \cdot dx} + L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

und sucht diejenige Funktion y von x auf, welche den Ausdruck III. zu einem Grössten oder Kleinsten macht.

Dieses Verfahren wäre allerdings gerechtfertigt, wenn der Ausdruck II. selbst Null wäre, und wenn sowohl ein abhängig variables als auch ein unabhängig variables Element vorhanden wäre; dann wäre der Ausdruck III. dem Ausdrucke I. vollkommen gleich, und der Faktor L würde dazu dienen, die Variationen des abhängig variablen Elementes zu eliminiren. Allein da das bestimmte Integral II. nicht Null ist, so ist das in III. stehende U ein ganz anderes, als das in I. stehende U, und es fragt sich: Wie geht

es zu, dass diejenige Funktion y von x, welche den Ausdruck III. zu einem Grössten oder Kleinsten macht, auch den Ausdruck I. zu einem Grössten oder Kleinsten macht; und woher weiss man, dass die gesuchte Funktion y von x nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt ist, welche alle für das bestimmte Integral II. den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth liefern?

Ein Versuch, diese zwei Fragen theoretisch zu beantworten, wird jedesmal ein Versuch bleiben; und es ist nöthig, statt der Euler'schen Methode eine andere aufzustellen, um so mehr, als die Euler'sche Methode bei vielen Problemen dann, wenn man das Kennzeichen für die Existenz eines Grössten oder Kleinsten herstellen will, ganz falsche Ausdrücke liefert. Dieses ist namentlich in dem hier vorgelegten Probleme der Fall (man lese die Bemerkung hinter Gleichung IX.).

Thatsache ist es aber, dass die Euler'sche Methode jedesmal die richtige Funktion y von x liefert.

Nun mag das vorgelegte Problem nach der Euler'schen Methode durchgeführt werden. Man variire Gleichung III., bringe Alles auf einen Nenner, und setze dann im Nenner zur Abkürzung A statt $\int_a^\alpha y \, . \, dx$; dann bekommt man

$$\text{IV.} \quad \delta U = \frac{1}{2 \, . \, A^2} \, . \, \Big\{ 2 \, . \int_a^\alpha y \, . \, \delta y \, . \, dx \times \int_a^\alpha y \, . \, dx$$

$$- \int_a^\alpha y^2 \, . \, dx \times \int_a^\alpha \delta y \, . \, dx + 2L \, . \left(\int_a^\alpha y \, . \, dx \right)^2 \times \int_a^\alpha \delta y \, . \, dx \Big\}.$$

Nun setze man, was aber in der Theorie des Variationskalkul's noch erörtert werden muss,

$$\text{V.} \quad \int_a^\alpha y^2 \, . \, dx = C \, . \int_a^\alpha y \, . \, dx$$

d. h. man setze $\int_a^\alpha y^2 \, . \, dx = A \, . \, C$, so geht Gleichung IV. über in

$$\text{VI.} \quad \delta U = \frac{1}{2A} \, . \int_a^\alpha (2y - C + 2AL) \, . \, \delta y \, . \, dx.$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VII.} \quad 2y - C + 2 \, . \, A \, . \, L = 0$$

und eine Gränzgleichung gibt es nicht. Man hat also die mit der Abscissenaxe parallele Grade. Bei Bestimmung der Konstanten muss Gleichung V. mit benutzt werden; diese geht jetzt über in

$$\left(\frac{C - 2A \, . \, L}{2}\right)^2 . \, (\alpha - a) = C \, . \left(\frac{C - 2AL}{2}\right) . \, (\alpha - a).$$

Diese Gleichung enthält keinen Widerspruch in sich selbst, sondern liefert $2AL = -C$; und wenn man AL aus VII. eliminirt, so ergibt sich

$$\text{VIII.}\quad y=C$$

als Gleichung der gesuchten Graden, wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist, die wenn z. B. vorgeschrieben ist, dass der in Rede stehende Flächeninhalt den bestimmten Werth g^2 habe, durch die Gleichung $\int_a^\alpha y\,.\,dx=g^2$ bestimmt wird; denn diese Gleichung, wenn man C statt y setzt und integrirt, geht über in $C\,.\,(\alpha-a)=g^2$, und daraus folgt $C=\frac{g^2}{\alpha-a}$.

Um zu entscheiden, ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, hat man in Gleichung IV. nur den Zähler zu variiren; und man bekommt zunächst

$$\delta^2 U=\frac{1}{2\,.\,A^2}\,.\,\Big\{2\,.\int_a^\alpha y\,.\,\delta^2 y\,.\,dx\times\int_a^\alpha y\,.\,dx$$
$$-\int_a^\alpha y^2\,.\,dx\times\int_a^\alpha\delta^2 y\,.\,dx+2L\,.\Big(\int_a^\alpha y\,.\,dx\Big)^2\times\int_a^\alpha\delta^2 y\,.\,dx$$
$$+2\,.\int_a^\alpha\delta y^2\,.\,dx\times\int_a^\alpha y\,.\,dx+4L\,.\int_a^\alpha y\,.\,dx\times\Big(\int_a^\alpha\delta y\,.\,dx\Big)^2\Big\}.$$

Setzt man A statt $\int_a^\alpha y\,.\,dx$, und AC statt $\int_a^\alpha y^2\,.\,dx$; so geht dieser Ausdruck über in

$$\delta^2 U=\frac{1}{2A}\,.\,\Big\{\int_a^\alpha(2y-C+2AL)\,.\,\delta^2 y\,.\,dx$$
$$+2\,.\int_a^\alpha\delta y^2\,.\,dx+4L\,.\Big(\int_a^\alpha\delta y\,.\,dx\Big)^2\Big\}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich wegen Gleichung VII. auf

$$\delta^2 U=\frac{1}{A}\,.\,\Big\{\int_a^\alpha\delta y^2\,.\,dx+2L\,.\Big(\int_a^\alpha\delta y\,.\,dx\Big)^2\Big\}.$$

Nun ist $A=\int_a^\alpha y\,.\,dx=C\,.\,(\alpha-a)$, also $L=-\frac{C}{2A}=-\frac{1}{2(\alpha-a)}$; und somit hat man

$$\text{IX.}\quad\delta^2 U=\frac{1}{C\,.\,(\alpha-a)}\,.\,\Big\{\int_a^\alpha\delta y^2\,.\,dx-\frac{1}{\alpha-a}\,.\Big(\int_a^\alpha\delta y\,.\,dx\Big)^2\Big\}.$$

Man erkennt aber gradezu, dass das innerhalb der Haken stehende Aggregat weder als positiv noch als negativ gelten kann, so dass es das Ansehen hat, als fände weder ein Grösstes noch Kleinstes statt. Allein es ist in der That der Fall, dass unter allen Figuren, die denselben Inhalt und dieselbe Grundlinie haben, und von auf der Grundlinie stehenden Perpendikeln begränzt sind, das Rechteck seinen Schwerpunkt am tiefsten liegen hat. Dieses wird auch noch durch den nach der Lagrange'schen Methode für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruck XXI. bestätigt; und somit bleibt nichts anderes übrig, als den nach der Euler'schen Me-

thode für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruck für einen unrichtigen zu erklären.

Es entsteht also die dritte Frage: Wie geht es zu, dass man, wenn man das Produkt $L \,.\, \int_a^\alpha y \,.\, dx$ zu $U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \,.\, dx}{\int_a^\alpha y \,.\, dx}$ addirt, und dann diese Summe variirt, die richtige Funktion y von x bekommt, während noch der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck unrichtig sein kann?

Diese dritte Frage lässt sich ebenso wenig theoretisch beantworten, als die beiden früheren; und man ist bei der Euler'schen Methode in der Lage, in welcher man bei jedem bloss empirischen Verfahren ist; und dieser Umstand hätte längst veranlassen sollen, eine streng einleuchtende Methode für diese Probleme aufzustellen.

Lagrange, dem alle diese Mängel der Euler'schen Methode nicht entgangen sein können, schlägt ein anderes Verfahren vor; er setzt nemlich statt des Ausdruckes II. die identische Gleichung

$$\text{X.} \quad \int_a^x y \,.\, dx = z_x - z_a.$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\text{XI.} \quad y = \frac{dz}{dx}.$$

Da nun der Flächeninhalt entweder vorgeschrieben oder nach Willkür gewählt werden kann; so ist z das unabhängig variable und y das abhängig variable Element. Man eliminire also y aus I., so ergibt sich

$$\text{XII.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \,.\, dx}{2 \,.\, \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \,.\, dx}.$$

Man variire, bringe Alles auf einen Nenner, und setze dann im Nenner zur Abkürzung A statt $\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \,.\, dx$; so bekommt man zunächst

$$\delta U = \frac{1}{2A^2} \,.\, \{2 \,.\, \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \,.\, (\frac{d\delta z}{dx}) \,.\, dx \times \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \,.\, dx$$

$$- \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \,.\, dx \times \int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx}) \,.\, dx\}.$$

Nun setze man, was aber in der Theorie des Variationskalkuls noch näher erörtert werden muss,

$$\text{XIV.} \quad \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \,.\, dx = E \,.\, \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \,.\, dx$$

d. h. man setze $\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \, . \, dx = A \, . \, E$, so geht Gleichung XIII. über in

$$\delta U = \frac{1}{2A} \, . \, \{2 \, . \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \, . \, (\frac{d\delta z}{dx}) \, . \, dx - E \, . \int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx}) \, . \, dx\}.$$

Aber weil E konstant ist, so kann man auch setzen

$$\delta U = \frac{1}{2A} \, . \int_a^\alpha (2 \, . \, \frac{dz}{dx} - E) \, . \, (\frac{d\delta z}{dx}) \, . \, dx$$

und wenn man die gehörige Umformung ausführt, so bekommt man

$$\text{XV.} \quad \delta U = \frac{1}{2A} \, . \, [2 \, . \, (\frac{dz}{dx})_\alpha - E] \, . \, \delta z_\alpha - \frac{1}{2A} \, . \, [2 \, . \, (\frac{dz}{dx})_a - E] \, . \, \delta z_a$$
$$- \frac{1}{A} \, . \int_a^\alpha (\frac{dz^2}{dx^2}) \, . \, \delta z \, . \, dx.$$

Dieser Ausdruck zerlegt sich in die Hauptgleichung

$$\text{XVI.} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

und in die Gränzengleichung

$$\text{XVII.} \quad [2 \, . \, (\frac{dz}{dx})_\alpha - E] \, . \, \delta z_\alpha - [2 \, . \, (\frac{dz}{dx})_a - E] \, . \, \delta z_a = 0.$$

Integrirt man die Hauptgleichung, so bekommt man

$$\text{XVIII.} \quad z = C \, . \, x + F.$$

Es ist also $(\frac{dz}{dx})_\alpha = (\frac{dz}{dx})_a = C$, und die Gränzengleichung geht über in

$$\text{XIX.} \quad (C - E) \, . \, (\delta z_\alpha - \delta z_a) = 0.$$

Allein eben weil die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral $\int_a^\alpha y \, . \, dx = z_\alpha - z_a$ denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält; so ist jetzt $\delta z_\alpha - \delta z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a = 0$, u. s. w., und die Gränzengleichung fällt von selbst weg, so dass daraus für die Bestimmung der Konstanten C und F nichts gewonnen werden kann. Weil aber $y = \frac{dz}{dx}$, so ist die jetzt gesuchte Kurve gegeben durch

$$\text{XX.} \quad y = C.$$

Man hat also wieder die mit der Abscissenaxe parallele Grade wie bei der Euler'schen Methode. Die Konstante C wird, wenn das Integral $\int_a^\alpha y \, . \, dx$ den gegebenen Werth g^2 haben soll,

durch die Gleichung $C.(\alpha-a)=g^2$ bestimmt, wie schon bei der ersten Auflösung gezeigt ist.

Um zu entscheiden ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, hat man in Gleichung XIII. nur den Zähler zu variiren; und man bekommt zunächst

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A^2}.\{2.\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}).(\frac{d\delta^2 z}{dx}).dx \times \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}).dx$$

$$-\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2.dx \times \int_a^\alpha (\frac{d\delta^2 z}{dx}).dx$$

$$+2.\int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx})^2.dx \times \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}).dx\}.$$

Man forme um, setze A statt $\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}).dx$, und benutze noch Gleichung XIV.; so ergibt sich

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A}.(C-E).(\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a) - \frac{1}{2A}.\int_a^\alpha (\frac{d^2 z}{dx^2}).\delta^2 z.dx$$

$$+\frac{1}{A}.\int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx})^2.dx.$$

In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\text{XXI.}\quad \delta^2 U = \frac{1}{A}.\int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx})^2.dx.$$

Man hat also hiermit den Beweis, dass ein Kleinstes stattfindet. (Man sehe Gleichung IX. und die dortige Bemerkung).

Lagrange selbst hat das abhängig variable Element niemals direkt eliminirt, sondern jedesmal mittelst eines Multiplikators. Zu diesem Ende verwandelt er die Gleichung XI. in folgende identische:

$$\text{XXII.}\quad y-\frac{dz}{dx}=0.$$

Diese Gleichung multiplicirt er dann mit einer (vorerst noch unbekannten sich aber im Laufe der Untersuchung noch bestimmenden) nichtvariablen Funktion $\mathfrak{N}$ von x; dann ist auch noch das Produkt

$$\text{XXIII.}\quad \mathfrak{N}.(y-\frac{dz}{dx})=0$$

eine identische Gleichung; und daraus folgt, dass auch noch identisch stattfinden

$$\text{XXIV.}\quad \mathfrak{N}.(\delta y-\frac{d\delta z}{dx})=0$$

$$\text{XXV.}\quad \mathfrak{N}.(\delta^2 y-\frac{d\delta^2 z}{dx})=0.$$

Es ist also auch

$$\text{XXVI.} \quad \int_a^\alpha \mathfrak{N} \, . \, (y - \frac{dz}{dx}) = 0$$

$$\text{XXVII.} \quad \int_a^\alpha \mathfrak{N} \, . \, (\delta y - \frac{d\delta z}{dx}) = 0$$

$$\text{XXVIII.} \quad \int_a^\alpha \mathfrak{N} \, . \, (\delta^2 y - \frac{d\delta^2 z}{dx}) = 0.$$

Man kann also das Integral XXVI. zu I. auf zweierlei Weise addiren, ohne dass dabei das U im geringsten geändert wird, d. h. man kann entweder

$$\text{XXIX.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \, . \, dx}{2 \, . \int_a^\alpha y \, . \, dx} + \int_a^\alpha \mathfrak{N} \, . \, (y - \frac{dz}{dx}) \, . \, dx$$

oder man kann

$$\text{XXX.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha [y^2 + \mathfrak{N} \, . \, (y - \frac{dz}{dx})] \, . \, dx}{2 \, . \int_a^\alpha y \, . \, dx}$$

setzen. Variirt man nun, und nimmt die gehörigen Umformungen vor; so gelangt man genau zu den bisherigen Resultaten.

Nun soll über die Lagrange'sche Methode eine nicht unwichtige, sondern sehr beachtenswerthe Untersuchung angestellt werden:

1) So lange nur eine Nebenbedingung gegeben ist, wie im hiesigen Probleme der Fall; so lange ist das Lagrange'sche Verfahren vollkommen einleuchtend.

2) Sind aber zwei oder noch mehr Nebenbedingungen gegeben, so ist das Lagrange'sche Verfahren durchaus unanwendbar. Das folgende Beispiel mag die Sache erläutern. Es soll

$$U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \, . \, dx}{2 \, . \int_a^\alpha y \, . \, dx}$$

ein Grösstes oder Kleinstes werden, während y nur aus der Zahl derjenigen Funktionen gewählt werden darf, bei denen allen das Integral

$$\int_a^\alpha y \, . \, dx$$

denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält, und bei denen allen auch das Integral

$$\int_a^\alpha xy \, . \, dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält.

Setzt man nun nach Lagrange

$$\int_a^x y \,.\, dx = z_x - z_a$$

und

$$\int_a^x x \,.\, y \,.\, dx = v_x - v_a$$

so ergeben sich daraus durch Differentiation folgende Gleichungen:

$$y = \frac{dz}{dx} \text{ und } xy = \frac{dv}{dx}.$$

Da nun der Werth eines jeden der Integrale $\int_a^\alpha y \,.\, dx$ und $\int_a^\alpha x \,.\, y \,.\, dx$ entweder vorgeschrieben oder nach Willkür gewählt werden kann; so muss sowohl z als auch v eine für sich willkürliche Funktion sein, d. h. sowohl z als auch v muss eine unabhängig variable Funktion sein. Dieses wird aus dem Folgenden ganz evident.

A) Wäre y unabhängig variabel, so wären z und v abhängig variabel, wie aus den Gleichungen $y = \frac{dz}{dx}$ und $xy = \frac{dv}{dx}$ hervorgeht; und z und v hätten keinen Einfluss auf U, so dass sich dasselbe Resultat ergeben würde, wie wenn keine einzige Nebenbedingung gemacht wäre. Es kann also y nicht unabhängig variabel sein.

B) Wäre z allein unabhängig variabel, so würde sich die Abhängigkeit des y durch die Gleichung $y = \frac{dz}{dx}$ ergeben; und zugleich würde $xy = \frac{dv}{dx}$ übergehen in $\frac{dv}{dx} = x \,.\, \frac{dz}{dx}$, d. h. v wäre von z abhängig. Der für U aufgestellte Ausdruck ginge über in $U = \frac{\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \,.\, dx}{2 \,.\, \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \,.\, dx}$, so dass U nur von z abhinge, und v keinen Einfluss auf U hätte, ebenso wenig, als (unter der hiesigen Voraussetzung) v Einfluss auf y hat, da im Gegentheil v von y, und wiederum y von z abhängt. Wenn also z allein unabhängig variabel ist, so ist es grade so, als wenn nur die einzige Nebenbedingung „das bestimmte Integral $\int_a^\alpha y \,.\, dx$ soll immer denselben Werth behalten" gemacht wäre.

C) Wäre v allein unabhängig variabel, so würde sich die Abhängigkeit des y durch die Gleichung $xy = \frac{dv}{dx}$ ergeben; und zugleich würde $y = \frac{dz}{dx}$ übergehen in $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \,.\, \frac{dv}{dx}$, d. h. z wäre von v abhängig. Der für U aufgestellte Ausdruck ginge über in $U = \frac{\int_a^\alpha (\frac{1}{x} \cdot \frac{dv}{dx})^2 \, dx}{2 \,.\, \int_a^\alpha (\frac{1}{x} \cdot \frac{dv}{dx}) . dx}$, so dass U von v allein abhinge, und z

keinen Einfluss auf U hätte, ebenso wenig als (unter der hiesigen Voraussetzung) z Einfluss auf y hat, da im Gegentheil z von y, und wiederum y von v abhängig ist. Wenn also v allein unabhängig variabel ist, so ist es grade so, als wenn nur die einzige Nebenbedingung „das bestimmte Integral $\int_a^\alpha xy \,.\, dx$ soll immer denselben Werth behalten" gemacht wäre.

Daraus ist evident erwiesen, dass sowohl z als auch v eine für sich unabhängig variable Funktion sein muss. Da nun durchaus kein Eliminationsprocess möglich ist oder auch nur in der Idee gedacht werden kann, durch welchen y von z und v zugleich abhängig wird, wobei dann auch U von z und v zugleich abhängig wird; so muss die Lagrange'sche Methode gradezu verworfen werden. Was aber hier nothwendig ist, wo nur zwei Nebenbedingungen gegeben sind, das ist noch um so mehr nothwendig, wenn drei und noch mehr Nebenbedingungen gegeben sind.

Lagrange hat freilich in seiner Theorie der relativen Grössten und Kleinsten von dem direkten Eliminationsprocesse nichts gesprochen, und doch ist nur durch diesen der Weg vorgezeigt, welcher sicher zu den richtigen Resultaten führt; sondern Lagrange hat auch hier die indirekte Elimination mittelst Multiplikatoren angewendet, indem er die beiden identischen Gleichungen $y-\frac{dz}{dx}=0$ und $xy-\frac{dv}{dx}=0$ bezüglich mit den nichtvariablen (vorerst aber noch unbekannten) Funktionen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ multiplicirt, und dann

$$U=\frac{\int_a^\alpha y^2 \,.\, dx}{2 \,.\int_a^\alpha y \,.\, dx}+\int_a^\alpha \mathfrak{N} \,.\, \left(y-\frac{dz}{dx}\right) \,.\, dx$$
$$+\int_a^\alpha \mathfrak{M} \,.\, \left(xy-\frac{dv}{dx}\right) \,.\, dx$$

setzt. Allein hiermit ist nichts gewonnen; denn der indirekte Eliminationsprocess soll nur den direkten ersetzen, um bequemer zum Ziele zu gelangen; und ehe man den indirekten anwendet, hat man sich zu überzeugen, ob y von z und v zugleich abhängig sein kann, und also durch y auch U von z und v zugleich abhängig wird.

Die Lagrange'sche Methode hat also den Fehler, dass sie keiner Ausdehnung vom einfachen auf den zusammengesetzten Fall fähig ist; die Euler'sche Methode aber hat den Fehler, dass man bei ihr schon im einfachen Falle nicht recht weiss, was man so eigentlich thut, und somit kann bei ihr auch im zusammengesetzten Falle von keiner Ueberzeugung die Rede sein.

Ich habe die Theorie der relativen Grössten und Kleinsten auf die zusammengesetzten Variationen gegründet, und dadurch über diesen Gegenstand soviel Licht verbreitet, dass nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Ich werde meine Theorie nächstens mittheilen; hier geht es nicht wohl an, da sie dem eigentlichen Zwecke dieser Abhandlung fremd ist.

Zweite Abtheilung.

Wenn b und β keine Funktionen von x sind, und wenn die beiden Differenzen $\alpha - a$ und $\beta - b$ positiv sind; so ist das bestimmte Integral $\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, y) \,.\, dy \,.\, dx$ jedesmal positiv oder negativ, je nachdem $\varphi(x, y)$ selbst beständig positiv oder beständig negativ bleibt, wenn man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch zugleich dem x alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt.

Beweis. Denkt man sich k im Momente des Verschwindens, so dass

$$b,\ (b+k),\ (b+2k),\ (b+3k),\ \ldots\ldots\ldots,\ (b+(n-1)k),\ \beta$$

alle stetig nebeneinander liegenden Werthe des y von b bis β vorstellen; so ist (nach einem bekannten Lehrsatze)

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, y).dy.dx = \int_a^\alpha k.[\varphi(x, b) + \varphi(x, b+k) + \varphi(x, b+2k) + \ldots\ldots\ldots + \varphi(x, b+(n-1).k) + \varphi(x, \beta)] \,.\, dx.$$

Denkt man sich auch h im Momente des Verschwindens, so dass auch

$$a,\ (a+h),\ (a+2h),\ (a+3h),\ \ldots\ldots\ldots,\ (a+(m-1)h),\ \alpha$$

alle stetig nebeneinander liegenden Werthe des x von a bis α vorstellen; so hat man jetzt

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, y) \,.\, dy \,.\, dx =$$
$$h \,.\, k \,.\, \{[\varphi(a, b) + \varphi(a, b+k) + \varphi(a, b+2k) + \ldots\ldots\ldots + \varphi(a, \beta)]$$
$$+ [\varphi(a+h, b) + \varphi(a+h, b+k) + \varphi(a+h, b+2k) + \ldots\ldots\ldots + (a+h, \beta)]$$
$$+ [\varphi(a+2h, b) + \varphi(a+2h, b+k) + \varphi(a+2h, b+2k) + \ldots\ldots\ldots + \varphi(a+2h, \beta)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ [\varphi(\alpha, b) + \varphi(\alpha, b+k) + \varphi(\alpha, b+2k) + \ldots\ldots\ldots + \varphi(\alpha, \beta)]\}$$

und hiermit ist der vorgelegte Satz bewiesen. Es leuchtet von selbst ein, dass er seine Giltigkeit behält, w auch einer oder mehrere der Theilsätze $\varphi(a, b)$, $\varphi(a, b+$ $\varphi(a+h, b+k)$, u. s. w. zu Null werden; dagegen ist o bar, dass er nicht mehr gelten kann, wenn einer oder meh dieser Theilsätze unendlich werden. Wenn aber nicht alle Th sätze dasselbe Zeichen haben, so kann man im Allgemeinen

den Zeichenstand des bestimmten Integrals $\int_a^\alpha\int_b^\beta \varphi(x,y)\,.\,dy\,.\,dx$ nichts behaupten, sondern muss jeden speciellen Fall nach seinen Eigenthümlichkeiten untersuchen.

Zugleich ist klar, was die Bedingung ist, unter welcher ein dreifaches, vierfaches, u. s. w. Integral positiv oder negativ wird; und desshalb ist es nicht nöthig, diese Untersuchung noch weiter auszudehnen.

Nun sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht z als solche Funktion der beiden nichtvariablen Elemente x und y, dass dabei das bestimmte Integral, wo b und β keine Funktionen von x sind,

$$\text{I.}\quad U = \int_a^\alpha\int_b^\beta V\,.\,dy\,.\,dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Dass aber die beiden Elemente b und β von x ganz unabhängig sind, ist ein Punkt, der durch die ganze Untersuchung im Auge behalten werden muss.

Man setze zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$ und q statt $\frac{d_y z}{dy}$, so bekommt man als Hauptgleichung

$$\text{II.}\quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{d_q V}{dq}\right)}{dy} = 0$$

und als Gränzengleichung bekommt man

$$\text{III.}\quad \int_b^\beta\left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,\,y}\,.\,\delta z_{\alpha,\,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,\,y}\,.\,\delta z_{a,\,y}\right]\,.\,dy$$
$$+ \int_a^\alpha\left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{\beta,\,x}\,.\,\delta z_{\beta,\,x} - \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{b,\,x}\,.\,\delta z_{b,\,x}\right]\,.\,dx = 0.$$

Berücksichtigt man die Hauptgleichung, so bekommt man im Allgemeinen für die Variation der zweiten Ordnung

$$\text{IV.}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta\left[\left(\frac{d_p V}{dp}\,.\,\delta^2 z\right)_{\alpha,\,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\,.\,\delta^2 z\right)_{a,\,y}\right]\,.\,dy$$
$$+ \int_a^\alpha\left[\left(\frac{d_q V}{dq}\,.\,\delta^2 z\right)_{\beta,\,x} - \left(\frac{d_q V}{dq}\,.\,\delta^2 z\right)_{b,\,x}\right]\,.\,dx$$
$$+ \int_a^\alpha\int_b^\beta\left[\frac{d^2_z V}{dz^2}\,.\,\delta z^2 + 2\,.\,\frac{d_z d_p V}{dz\,.\,dp}\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x \delta z}{dx}\right.$$
$$+ 2\,.\,\frac{d_z d_q V}{dz\,.\,dp}\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d^2{}_p V}{dp^2}\,.\,\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2\,.\,\frac{d_p d_q V}{dp\,.\,dq}\,.\,\frac{d_x \delta z}{dx}\,.\,\frac{d_y \delta z}{dy}$$
$$\left. + \frac{d^2{}_q V}{dq^2}\,.\,\left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]\,.\,dy\,.\,dx.$$

Das Zeichen $\left(\frac{d_p V}{dp}\,.\,\delta^2 z\right)_{\alpha,\,y}$ bedeutet, dass man α an die Stelle des

x gesetzt habe, und dass y noch allgemein sei. Auf ähnliche Weise verhält es sich bei den andern Ausdrücken.

Man hat nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen das $\delta^2 U$ beständig negativ oder positiv bleibt, und wann es weder als positiv noch als negativ gelten kann. Man bezeichne zur Abkürzung das, was aus $\frac{d^2{}_zV}{dz^2}$, $\frac{d_zd_pV}{dz.dp}$, $\frac{d_zd_qV}{dz.dq}$, $\frac{d^2{}_pV}{dp^2}$, $\frac{d_pd_qV}{dp.dq}$, $\frac{d^2{}_qV}{dq^2}$ hervorgeht, wenn man für z die gefundene Funktion setzt, bezüglich mit M, N, P, Q, R, S; und setze für das allgemeine bei $x=a$ und $y=b$ anfangende Doppelintegral

$$\text{V.}\ \int_a^x\int_b^y[M.\delta z^2+2.N.\delta z.\frac{d_x\delta z}{dx}+2P.\delta z.\frac{d_y\delta z}{dy}$$

$$+Q.(\frac{d_x\delta z}{dx})^2+2R.\frac{d_x\delta z}{dx}.\frac{d_y\delta z}{dy}+S.(\frac{d_y\delta z}{dy})^2].dy.dx$$

$$=\int_b^y[(\eta.\delta z^2)_{x,\,y}-(\eta.\delta z^2)_{a,\,y}].dy$$

$$+\int_a^x[(\omega.\delta z^2)_{x,\,y}-(\omega.\delta z^2)_{b,\,x}].dx$$

$$+\int_a^x\int_b^y[F.\delta z^2+2E.\delta z.\frac{d_x\delta z}{dx}+2D.\delta z.\frac{d_y\delta z}{dy}$$

$$+C.(\frac{d_x\delta z}{dx})^2+2B.\frac{d_x\delta z}{dx}.\frac{d_y\delta z}{dy}+A.(\frac{d_y\delta z}{dy})^2].dy.dx.$$

Nun differentiire man zweimal auf beiden Seiten, und es ergibt sich

$$M.\delta z^2+2N.\delta z.\frac{d_x\delta z}{dx}+2P.\delta z.\frac{d_y\delta z}{dy}+Q.(\frac{d_x\delta z}{dx})^2$$

$$+2R.\frac{d_x\delta z}{dx}.\frac{d_y\delta z}{dy}+S.(\frac{d_y\delta z}{dy})^2=\frac{d_x\eta}{dx}.\delta z^2+2\eta.\delta z.\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+\frac{d_y\omega}{dy}.\delta z^2+2.\omega.\frac{d_y\delta z}{dy}.\delta z+F.\delta z^2+2E.\delta z.\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+2D.\delta z.\frac{d_y\delta z}{dy}+C.(\frac{d_x\delta z}{dx})^2+2B.\frac{d_x\delta z}{dx}.\frac{d_y\delta z}{dy}+A.(\frac{d_y\delta z}{dy})^2$$

Bringt man Alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens, so bekommt man

$$(M-\frac{d_x\eta}{dx}-\frac{d_y\omega}{dy}-F).\delta z^2+2.(N-\eta-E).\delta z.\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+2.(P-\omega-D).\delta z.\frac{d_y\delta z}{dy}+(Q-C).(\frac{d_x\delta z}{dx})^2$$

$$+2(R-B).\frac{d_x\delta z}{dx}.\frac{d_y\delta z}{dy}+(S-A).(\frac{d_y\delta z}{dy})^2=0.$$

Diese Gleichung gilt bei jeder beliebigen Funktion δz von x und y, und bei jedem beliebigen Werthe des x und des y; sie zerfällt also in folgende einzelne Gleichungen:

$$M - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - F = 0$$
$$N - \eta - E = 0$$
$$P - \omega - D = 0$$
$$Q - C = 0$$
$$R - B = 0$$
$$S - A = 0$$

und daraus folgt

$$A = S = \frac{d^2{}_qV}{dq^2}$$
$$B = R = \frac{d_pd_qV}{dp\,.\,dq}$$
$$C = Q = \frac{d^2{}_pV}{dp^2}$$
$$D = P - \omega = \frac{d_zd_qV}{dz\,.\,dq} - \omega$$
$$E = N - \eta = \frac{d_zd_pV}{dz\,.\,dp} - \eta$$
$$F = M - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} = \frac{d^2{}_zV}{dz^2} - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy}.$$

Man erkennt also, dass A, B, C vollkommen bestimmt sind; dagegen D, E, F sind erst dann bestimmt, wenn man einmal weiss, was η und ω für Funktionen von x und y sind. Da aber durchaus keine Bedingung vorhanden ist, welcher die Funktionen ω und η genügen müssen, so sind ω und η ganz willkürliche Funktionen von x und y. Man kann also ω und η so annehmen, dass der Ausdruck

$$\text{VI.}\quad F\,.\,\delta z^2 + 2E\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx} + 2D\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + C\,.\,\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2$$
$$+ 2B\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + A\,.\,\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2$$

auf die Form

$$\text{VII.}\quad A\,.\,\left(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{A}\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{B}\,.\,\delta z\right)^2 + A_1\,.\,\left(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C}\,.\,\delta z\right)^2$$

kommt. Diese Form entwickelt gibt

$$\text{VIII.}\quad A\,.\,\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + 2A\mathfrak{A}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy}\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx} + 2A\mathfrak{B}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy}\,.\,\delta z$$
$$+ (A\,.\,\mathfrak{A}^2 + A_1)\,.\,\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2\,.\,(A\mathfrak{A}\mathfrak{B} + A_1\,.\,\mathfrak{C})\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\,.\,\delta z$$
$$+ (A\,.\,\mathfrak{B}^2 + A_1\,.\,\mathfrak{C}^2)\,.\,\delta z^2.$$

Vergleicht man jetzt VIII. mit VI., so ergeben sich folgende einzelne Gleichungen:

$$A = A,\ \mathfrak{A} = \frac{B}{A},\ \mathfrak{B} = \frac{D}{A}$$

$$A_1 = \frac{AC - B^2}{A},\ \mathfrak{C} = \frac{AE - BD}{AC - B^2}$$

und

$$F = A \cdot \mathfrak{B}^2 + A_1 \cdot \mathfrak{C}^2,$$

welche letztere Gleichung aber kein Stück enthält, das nicht schon bestimmt wäre; und wenn man für $\mathfrak{B}$, A_1, $\mathfrak{C}$ die Ausdrücke einsetzt, so geht sie über in

$$\text{IX.}\quad F \cdot (B^2 - AC) = 2BDE - C \cdot D^2 - AE^2$$

welche Gleichung aber nothwendig existiren muss, wenn der Ausdruck VI. auf die Form VII. soll gebracht werden können. Gleichung IX. ist aber gleichbedeutend mit

$$\text{X.}\quad \left(\frac{d^2{}_zV}{dz^2} - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy}\right) \cdot \left[\left(\frac{d_pd_qV}{dp \cdot dq}\right)^2 - \frac{d^2{}_pV}{dp^2} \times \frac{d^2{}_qV}{dq^2}\right] =$$

$$2 \cdot \frac{d_pd_qV}{dp \cdot dq} \cdot \left(\frac{d_zd_qV}{dz \cdot dq} - \omega\right) \cdot \left(\frac{d_zd_pV}{dz \cdot dp} - \eta\right) - \frac{d^2{}_pV}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_zd_qV}{dz \cdot dq} - \omega\right)^2$$

$$- \frac{d^2{}_qV}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_zd_pV}{dz \cdot dp} - \eta\right)^2.$$

Dieses ist eine Partialdifferentialgleichung des ersten Grades der ersten Ordnung. Nun existirt zwischen ω und η durchaus keine Abhängigkeit; man kann also entweder für η oder für ω eine beliebige Funktion annehmen.

Die Gleichung V., welche, indem sie von $x = a$ und $y = b$ bis zu jedem beliebigen Werthe des x und des y erstreckt wird, giltig ist, ist auch giltig, wenn sie von $x = a$ und $y = b$ bis zu $x = \alpha$ und $y = \beta$ erstreckt wird, d. h. es ist

$$\text{XI.}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta \left[M \cdot \delta z^2 + 2N \cdot \delta z \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} + \ldots\ldots + S \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_b^\beta [(\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha,\,y} - (\eta \cdot \delta z^2]_{a,\,y}] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha [(\omega \cdot \delta z^2)_{x,\,\beta} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,\,b}] \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha\int_b^\beta \left[A \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z\right)^2\right.$$

$$\left. + A_1 \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx.$$

Nun ist

$$\mathfrak{B} = \frac{D}{A} = \frac{P - \omega}{A}$$

und

$$\mathfrak{C} = \frac{AE - BD}{AC - B^2} = \frac{A.(N-\eta) - B.(P-\omega)}{AC - B^2};$$

und weil der linke Theil der Gleichung XI. die Funktionen ω und η gar nicht enthält, so ist der Werth des rechten Theiles von ω und η ganz unabhängig. **Aber grade dieser Umstand ist der Hauptpunkt, der von jetzt an noch benutzt werden muss.**

Gleichung IV. geht nun über in

$$\text{XII.}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta [(\frac{d_pV}{dp}.\delta^2 z + \eta.\delta z^2)_{\alpha, y} - (\frac{d_pV}{dp}.\delta^2 z + \eta.\delta z^2)_{a, y}].dy$$
$$+ \int_a^\alpha [(\frac{d_qV}{dq}.\delta^2 z + \omega.\delta z^2)_{\beta, x} - (\frac{d_qV}{dq}.\delta^2 z + \omega.\delta z^2)_{b, x}].dx$$
$$+ \int_a^\alpha\int_b^\beta [A.(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{A}.\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{B}.\delta z)^2 + A_1.(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C}.\delta z)^2].dy.dx.$$

Nun mögen folgende specielle Fälle besonders betrachtet werden.

Erster Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass die identischen Gleichungen $\delta z_{\alpha, y} = 0$, $\delta z_{a, y} = 0$, $\delta z_{\beta, x} = 0$, $\delta z_{b, x} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha, y} = 0$, $\delta^2 z_{a, y} = 0$, $\delta^2 z_{\beta, x} = 0$, $\delta^2 z_{b, x} = 0$, u. s. w. stattfinden; so fällt die Gränzengleichung III. von selbst hinweg, und Gleichung XII. reducirt sich gradezu auf

$$\text{XIII.}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha\int_b^\beta [A.(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{A}.\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{B}.\delta z)^2 + A_1.(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C}.\delta z)^2].dy.dx.$$

Zweiter Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass von den Ausdrücken $\delta z_{\alpha, y}$, $\delta z_{a, y}$, $\delta z_{\beta, x}$, $\delta z_{b, x}$, $\delta^2 z_{\alpha, y}$, $\delta^2 z_{a, y}$, $\delta^2 z_{\beta, x}$, $\delta^2 z_{b, x}$, u. s. w. kein einziger zu Null wird; so wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn die vier Gleichungen

$$(\frac{d_pV}{dp})_{\alpha, y} = 0,\ (\frac{d_pV}{dp})_{a, y} = 0,\ (\frac{d_qV}{dq})_{\beta, x} = 0,\ (\frac{d_qV}{dq})_{b, x} = 0$$

stattfinden. Dabei reducirt sich Gleichung XII. auf

$$\text{XIV.}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta [(\eta.\delta z^2)_{\alpha, y} - (\eta.\delta z^2)_{a, y}].dy + \int_a^\alpha [(\omega.\delta z^2)_{\beta, x} - (\omega.\delta z^2)_{b, x}].dx$$
$$+ \int_a^\alpha\int_b^\beta [A.(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{A}.\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{B}.\delta z)^2 + A_1.(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C}.\delta z)^2].dy.dx.$$

Da nun, wie schon bemerkt, sich immer der irgend einem δz entsprechende wahre Werth des $\delta^2 U$ ergibt, es mögen die Funktionen ω und η sein was sie wollen, wenn sie nur in solcher Beziehung zusammen stehen, dass Gleichung X. erfüllt wird; so kann man auf folgende Weise den Zeichenstand des $\delta^2 U$ kennen lernen: Hat man sich einmal unter dem willkührlichen δz irgend eine Funktion von x und y gedacht, so kann man für ω noch eine solche Funktion des einzigen x nehmen, dass die identische Gleichung

$$\text{XV.} \quad (\omega \, . \, \delta z^2)_{\beta,\, x} - (\omega \, . \, \delta z^2)_{b,\, x} = 0$$

stattfindet, was am einfachsten dadurch erreicht wird, dass man gradezu $\omega = 0$ setzt. Dabei ist dann auch $\frac{d_y \omega}{dy} = 0$, und Gleichung X. reducirt sich auf

$$\text{XVI.} \quad \left(\frac{d^2{}_z V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx}\right) . \left[\left(\frac{d_p d_q V}{dp \, . \, dq}\right)^2 - \frac{d^2{}_p V}{dp^2} \times \frac{d^2{}_q V}{dq^2}\right]$$
$$= 2 \, . \, \frac{d_p d_q V}{dp \, . \, dq} . \frac{d_z d_q V}{dz \, . \, dq} . \left(\frac{d_z d_p V}{dz \, . \, dp} - \eta\right) - \frac{d^2{}_p V}{dp^2} . \left(\frac{d_z d_q V}{dz \, . \, dq}\right)^2$$
$$- \frac{d^2{}_q V}{dq^2} . \left(\frac{d_z d_p V}{dz \, . \, dp} - \eta\right)^2.$$

Diese Gleichung, aus welcher ω ganz weggefallen ist, enthält nur den einzigen partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x \eta}{dx}$; man bekommt also, wenn man integrirt, für η einen aus x, y, πy gebildeten Ausdruck, wo πy eine durchaus willkührliche Funktion von y ist. Aber eben diese in η enthaltene willkührliche Funktion πy kann man nach der bald so, bald so beliebig genommenen Funktion δz von x und y auch jedesmal bald so, bald so einrichten, dass die identische Gleichung

$$\text{XVII.} \quad (\eta \, . \, \delta z^2)_{\alpha,\, y} - (\eta \, . \, \delta z^2)_{a,\, y} = 0$$

stattfindet. Wegen Gleichung XV. und XVII. reducirt sich aber XIV. auf XIII.

Dritter Fall. Wenn zwischen $\delta z_{\alpha,\, y}$ und $\delta z_{a,\, y}$, wenn ebenso zwischen $\delta z_{\beta,\, x}$ und $\delta z_{b,\, x}$ eine Abhängigkeit stattfindet; so findet auch zwischen $\delta^2 z_{\alpha,\, y}$ und $\delta^2{}_{a,\, y}$, und auch zwischen $\delta^2 z_{\beta,\, x}$ und $\delta^2 z_{b,\, x}$ eine Abhängigkeit statt. Man eliminire $\delta z_{a,\, y}$, $\delta^2 z_{a,\, y}$, $\delta z_{b,\, x}$ und $\delta^2 z_{b,\, x}$, so werden dabei die zu $\delta^2 z_{\alpha,\, y}$ und $\delta^2 z_{\beta,\, x}$ gehörigen Koefficienten zu Null; und Gleichung XII. geht über in folgende Form:

$$\text{XVIII.} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta [\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \, . \, (\eta)_{a,\, y} + (\eta)_{\alpha,\, y}] \, . \, \delta z^2{}_{\alpha,\, y} \, . \, dy$$
$$+ \int_a^\alpha [\mathfrak{H} + \mathfrak{K} \, . \, (\omega)_{b,\, x} + (\omega)_{\beta,\, x}] \, . \, \delta z^2{}_{\beta,\, x} \, . \, dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[A \, . \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \, . \, \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \, . \, \delta z\right)^2$$
$$+ A_1 \, . \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \, . \, \delta z\right)^2\Big] \, . \, dy \, . \, dx.$$

Man denke sich nun unter ω eine solche Funktion der einzigen Veränderlichen x, dass die identische Gleichung

$$\text{XIX.}\quad \mathfrak{H}+\mathfrak{K}\,.\,\omega_x+\omega_x=0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung X. auf

$$\begin{aligned}(\frac{d^2{}_zV}{dz^2}-\frac{d_x\eta}{dx})\,.\,[(\frac{d_pd_qV}{dp\,.\,dq})^2-\frac{d^2{}_pV}{dp^2}\times\frac{d^2{}_qV}{dq^2}]\\ =2\,.\,\frac{d_pd_qV}{dp\,.\,dq}\,.\,(\frac{d_zd_qV}{dz\,.\,dq}-\omega)\,.\,(\frac{d_zd_pV}{dz\,.\,dp}-\eta)\\ -\frac{d^2{}_pV}{dp^2}\,.\,(\frac{d_zd_qV}{dz\,.\,dq}-\omega)^2-\frac{d^2{}_qV}{dq^2}\,.\,(\frac{d_zd_pV}{dz\,.\,dp}-\eta)^2.\end{aligned}$$

Diese Gleichung, in welche die für ω genommene Funktion als bereits eingeführt gedacht wird, enthält nur den einzigen partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x\eta}{dx}$; man bekommt also, wenn man integrirt, für η einen aus x, y, πy gebildeten Ausdruck, wo πy eine durchaus willkürliche Funktion von y ist. Aber eben diese in η enthaltene willkürliche Funktion πy kann man noch so benutzen, dass die identische Gleichung

$$\text{XX.}\quad \mathfrak{F}+\mathfrak{S}\,.\,(\eta)_{a,\,y}+(\eta)_{\alpha,\,y}=0$$

stattfindet. Wegen Gleichung XIX. und XX. reducirt sich XVIII. auf die Form XIII. Und so fort

Aus allem Vorhergehenden folgt, dass der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von A und A_1 abhängig ist, d. h. wenn man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig neben einander liegenden Werthe von a bis α beilegt, und dabei

1) jeder der Quotienten $\frac{d^2{}_pV}{dp^2}$ und $\frac{d^2{}_qV}{dq^2}$ sowie auch der Ausdruck $[\frac{d^2{}_pV}{dp^2}\times\frac{d^2{}_qV}{dq^2}-(\frac{d_pd_qV}{dp\,.\,dq})^2]$ beständig positiv bleiben, so ist auch $\delta^2 U$ positiv; wenn aber dabei

2) jeder der Quotienten $\frac{d^2{}_pV}{dp^2}$ und $\frac{d^2{}_qV}{dq^2}$ negativ, dagegen der Ausdruck $[\frac{d^2{}_pV}{dp^2}\times\frac{d^2{}_qV}{dq^2}-(\frac{d_pd_qV}{dp\,.\,dq})^2]$ positiv bleibt, so ist $\delta^2 U$ negativ.

Dabei beachte man noch: wenn der Ausdruck

$$[\frac{d^2{}_pV}{dp^2}\times\frac{d^2{}_qV}{dq^2}-(\frac{d_pd_qV}{dp\,.\,dq})^2]$$

bei einigen oder bei allen von a bis α und von b bis β liegenden Werthen des x und des y zu Null wird, so behält vorstehende Regel immer noch ihre Giltigkeit; sie verliert aber ihre Giltigkeit, sobald einer der Quotienten

$$\frac{d^2{}_zV}{dz^2},\ \frac{d_zd_pV}{dz\,.\,dp},\ \frac{d_zd_qV}{dz\,.\,dq},\ \frac{d^2{}_pV}{dp^2},\ \frac{d_pd_qV}{dp\,.\,dq},\ \frac{d^2{}_qV}{dq^2}$$

bei irgend einem Werthe des x und des y die im Kalkul unzulässige Form $\frac{1}{0}$ annimmt.

In dem speciellen Falle, wo V ein nur mit x, y, z, $\frac{d_y z}{dy}$ gebildeter Ausdruck ist, und man für z eine solche Funktion von x und y sucht, dass dabei das bestimmte Integral, wo b und β keine Funktionen von x sind,

$$\text{XXI.} \quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird, reducirt sich die Hauptgleichung II. auf

$$\text{XXII.} \quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{d(\frac{d_q V}{dq})}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung III. reducirt sich auf

$$\text{XXIII.} \quad \int_a^\alpha [(\frac{d_q V}{dq})_{\beta,\, x} \,.\, \delta z_{\beta,\, x} - (\frac{d_q V}{dq})_{b,\, x} \,.\, \delta z_{b,\, x}] \,.\, dx = 0.$$

Gleichung IV. reducirt sich auf

$$\text{XXIV.} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha [(\frac{d_q V}{dq})_{\beta,\, x} \,.\, \delta^2 z_{\beta,\, x} - (\frac{d_q V}{dq})_{b,\, x} \,.\, \delta^2 z_{b,\, x}] \,.\, dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta [\frac{d^2{}_z V}{dz^2} \,.\, \delta z^2 + 2 \,.\, \frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d^2{}_q V}{dq^2} \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy})^2] . dy . dx.$$

Diesem Ausdrucke kann man die Form geben

$$\text{XXV.} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha [(\frac{d_q V}{dq} \,.\, \delta^2 z + \omega \,.\, \delta z^2)_{\beta,\, x}$$
$$- (\frac{d_q V}{dq} \,.\, \delta^2 z + \omega \,.\, \delta z^2)_{b,\, x}] \,.\, dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta A \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z)^2 \,.\, dy \,.\, dx$$

und zur Bestimmung von ω hat man folgende Partialdifferentialgleichung der ersten Ordnung

$$\text{XXVI.} \quad (\frac{d^2{}_z V}{dz^2} - \frac{d_y \omega}{dy}) \,.\, \frac{d^2{}_q V}{dq^2} = (\frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} - \omega)^2.$$

Durch Integration dieser Gleichung bekommt man für ω einen aus x, y, πx gebildeten Ausdruck, wo πx eine ganz willkürliche Funktion von x ist, die noch dazu benutzt werden kann, dass sich Gleichung XXV. zurückzieht auf

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta A \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z)^2 \,.\, dy \,.\, dx$$

und man erkennt, dass es jetzt nur auf A, d. h. nur auf den Quotienten $\frac{d^2{}_q V}{dq^2}$ ankommt, ob $\delta^2 U$ positiv oder negativ ist.

Ist aber der Gang dieses Verfahrens einmal recht aufgefasst, so kann es gradezu auch auf zusammengesetztere Fälle ausgedehnt werden; was hier nicht mehr ausgeführt zu werden braucht, sondern es mag genügen, einige Resultate herzusetzen.

Ist nemlich V ein aus den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d^2{}_x z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}$, $\frac{d^2{}_y z}{dy^2}$ gebildeter Ausdruck, und sucht man für z eine solche Funktion von x und y, dass dabei das bestimmte Integral

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird; so setze man zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$, q statt $\frac{d_y z}{dy}$, r statt $\frac{d^2{}_x z}{dx^2}$, s statt $\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}$, und t statt $\frac{d^2{}_y z}{dy^2}$. Dann hat man nur die Bedingungen aufzusuchen, unter denen der Ausdruck

$$\frac{d^2{}_r V}{dr^2} \cdot \left(\frac{d^2{}_x \delta z}{dx^2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_r d_s V}{dr \cdot ds} \cdot \frac{d^2{}_x \delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} + 2 \cdot \frac{d_r d_t V}{dr \cdot dt} \cdot \frac{d^2{}_x \delta z}{dx^2} \cdot \frac{d^2{}_y \delta z}{dy^2}$$
$$+ \frac{d^2{}_s V}{ds^2} \cdot \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_s d_t V}{ds \cdot dt} \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} \cdot \frac{d^2{}_y \delta z}{dy^2} + \frac{d^2{}_t V}{dt^2} \cdot \left(\frac{d^2{}_y \delta z}{dy^2}\right)^2$$

beständig positiv oder negativ bleibt, während man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt.

Wenn aber bei allen diesen Werthen des x und des y der Quotient $\frac{d^2{}_t V}{dt^2}$ zu Null wird; so kann nur dann ein Grösstes oder Kleinstes stattfinden, wenn auch die beiden Quotienten $\frac{d_s d_t V}{ds \cdot dt}$ und $\frac{d_r d_t V}{dr \cdot dt}$ bei allen diesen Werthen des x und des y zu Null werden, und man hat jetzt den Ausdruck

$$\frac{d^2{}_r V}{dr^2} \cdot \left(\frac{d^2{}_x \delta z}{dx^2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_r d_s V}{dr \cdot ds} \cdot \frac{d^2{}_x \delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} + \frac{d^2{}_s V}{ds^2} \cdot \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}\right)^2$$

zu untersuchen.

Ist V ein aus den Elementen x, y, w, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_w z}{dw}$ zusammengesetzter Ausdruck, und sucht man für z eine solche Funktion von x, y, w, dass dabei das bestimmte Integral

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma V \cdot dx \cdot dy \cdot dw$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird; so setze man zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$, q statt $\frac{d_y z}{dy}$, und r statt $\frac{d_w z}{dw}$. Dann hat man nur die Bedingungen aufzusuchen, unter denen der Ausdruck

$$\frac{d^2{}_pV}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2+2\cdot\frac{d_pd_qV}{dp.dq}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}+2\cdot\frac{d_pd_rV}{dp.dr}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\cdot\frac{d_w\delta z}{dw}$$
$$+\frac{d^2{}_qV}{dq^2}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2+2\cdot\frac{d_qd_rV}{dq.dr}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\cdot\frac{d_w\delta z}{dw}+\frac{d^2{}_rV}{dr^2}\cdot\left(\frac{d_w\delta z}{dw}\right)^2$$

beständig positiv oder negativ bleibt, während man dem w alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von c bis γ beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des w auch dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des w und des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt.

V.

Ueber die Messkette und deren Berichtigung.

Von dem

Herrn Regierungs-Conducteur G. Berlin

zu Greifswald.

Die meisten Fehler, welche bei der Messung einer geraden Linie mit der Messkette entstehen, rühren hauptsächlich von der Ausdehnung der Kette, veranlasst durch Dehnbarkeit des dazu verwendeten Eisendrathes und durch Ausschleifen der Ringe her. Man ist daher genöthigt, dieselbe öfter zu berichtigen, was bei der gewöhnlichen Einrichtung der Messketten nur dadurch geschehen kann, dass die einzelnen Glieder der Kette durch Nachbiegung der Haken wiederum verkürzt werden, wodurch aber nicht allein der Drath spröde und hart wird, so dass ein Zerreissen der Kette zu befürchten steht, sondern auch die Berichtigung nicht mit der Präcision ausgeführt werden kann, wie es wohl erforderlich ist. Oft ist es auch dem praktischen Geometer fast unmöglich, eine Berichtigung der Kette, wenn Feuerarbeiten dazu erforderlich sind, vorzunehmen, da diese bei seinen praktischen Arbeiten ihn nicht nur längere Zeit abhalten, sondern auch nicht aller Orten eine Schmiede ist und selbst auch vielen Geometern die manuelle Fertigkeit abgehen dürfte, die erforderlich ist, um selbst eine solche Berichtigung vornehmen zu können.

Bei Richtigkeit der Messkette kommt es vorzüglich darauf an, dass, wenn auch nicht die einzelnen Zehntheile der Ruthe genaues

Maass halten, dennoch die durch Wirbel abgetheilten $\frac{5}{10}$ genau die Länge einer halben Ruthe haben, indem der kleine dadurch bei den einzelnen Fussen entstehende Fehler höchstens $\frac{5}{100}$ der Ruthe betragen wird, welchen nach den üblichen Maassstäben verjüngt auszudrücken bei ökonomischen Aufnahmen nicht möglich ist. Ist eine grössere Genauigkeit, namentlich eine solche, die sich auf Hunderttheile der Ruthe bezieht, erforderlich, so wird diese durch Anlegung eines Maassstabes, den jeder Geometer bei sich zu führen hat, zu erlangen sein.

Bei meinen vielfachen praktischen Messungen habe ich fast immer erfahren, dass selbst bei der genauesten Berichtigung eine Veränderung der Kette nach einem nur täglichen Gebrauche sich gezeigt hat; und man würde daher genöthigt sein, auch eben so oft die Berichtigung vorzunehmen, wodurch dann die Kette an Solidität verlieren würde, wenn man es nicht vorzieht, die mit der falschen Kette gemessenen Längen auf die richtigen zu reduciren, was aber um so eher zu Irrthümern führen kann, da nicht allein der Fehler kein beständiger ist, sondern auch der Messungen namentlich bei der Boussolenaufnahme so viele sind, dass selbst beim besten Willen, wenn man auch den dadurch erforderten Zeitaufwand nicht berücksichtigt, Irrungen herbeigeführt werden.

Ich habe mich daher einer Kette bedient, deren Berichtigung unmittelbar durch Nachschraubung bewirkt wird, und glaube die getroffene Einrichtung als wesentliche Verbesserung empfehlen zu können.

Man nehme zur Messkette nur englischen Drath von 2‴ bis $2\frac{1}{2}$‴ Par. Maass Stärke; nur dieser giebt bei gehöriger Weichheit des Metalles die gehörige Stärke, die das Anspannen der Kette erfordert. Die durch die Stärke von 2‴ bis $2\frac{1}{2}$‴ Par. Maass herbeigeführte grössere Schwere der Kette kann in Bezug auf die grössere Richtigkeit nicht in Betracht gezogen werden.

Gewöhnlich sind die Ringe zur Verbindung einzelner Kettenglieder von gegossenem Messing, die der eigenthümlichen Sprödigkeit des Metalles wegen beim Schlagen der Kette leicht zerspringen, weshalb ich es vorgezogen habe, Ringe von geschweisstem Eisen anzuwenden.

Die Einrichtung der die Ruthen bezeichnenden Wirbel, wodurch die Correction der Kette möglich gemacht wird, ist folgende.

Der Wirbel ist durch 3 Balken (Taf. I. Fig. 4.) *a*, *b*, *c* in 4 gleiche Theile getheilt; der mittlere *b* ist nur zur grösseren Haltbarkeit und zur Bezeichnung der Ruthen da; die Balken *a* und *c* sowie die Endbalken *d* und *e* haben ovale Scheiben (*f*, *f'*), die im Mittelpunkte jede mit einem Loche versehen sind, und zwar bei *a* und *c* rund (*g*) und bei *d* und *e* quadratisch (*h*). Zu diesen Löchern passt genau eine Eisenstange *i*, die zur Hälfte eine Schraube, zur andern Hälfte viereckig ist, und sich fleissig in der quadratischen Oeffnung *h* hin- und herbewegen lässt. Zur Feststellung dieser Stange dient die Mutter *k*, zu deren Nichtverrückung wiederum die Gegenmutter *l* angebracht ist. Mit Hülfe dieser Stange lässt sich leicht durch respectives Anziehen und Lösen der Muttern *k* und *l* die Correction der Kette bewirken.

Die Wirbelbewegung wird durch den Wirbel *m* erreicht, der wie gewöhnlich durch einen Ring mit den Kettengliedern verbunden ist. Dem Mechaniker dürfte es schwer werden, des geringe-

ren Raumes wegen die Stange *i* mit dem Wirbel *m* zu vernieten; eine Schraubenmutter, die um das Aufdrehen zu verhüten, noch zu vernieten ist, wird zweckmässiger sein.

Die Einrichtung der die halben Ruthen bildenden Wirbel ist in Bezug auf die Corrections-Einrichtung dieselbe, wie die der ganzen, nur wird es der Unterscheidung wegen zweckmässiger sein, die Dimensionen etwas kleiner zu machen und den Mittelbalken *b* fehlen zu lassen, wogegen zur Bezeichnung der Länge die Spitzen *a a'* (Taf. I. Fig. 5.) anzubringen sind.

Bei den Endringen der Kette kann diese Corrections-Einrichtung fehlen, da nicht nur die Ausdehnung der Kette in der Mitte sich am stärksten zeigt, sondern auch die grössere Wirbelbewegung bei den Enden eine einfachere Einrichtung erfordert.

Gewöhnlich sind die Kettenstäbe unten mit einem etwa zwei Zoll langen Stachel versehen, der höchstens eine Stärke von 4''' Par. Maass hat. Bei dieser Einrichtung zeigt sich der Uebelstand, dass des geringeren Widerstandes wegen bei gehöriger Anspannung der Kette namentlich in weichem Boden dieselbe fortgeschleppt wird.

Eine konische Spitze (Taf. I. Fig. 6.) wird vorzuziehen sein, da diese nicht allein mehr Widerstand gewährt, sondern auch der Einwand, dass die Stachelspitze genauer den Endpunkt der Kettenlänge bezeichne, dadurch widerlegt wird, dass beide konische Spitzen gleiche Dimensionen haben und daher genau zu den gemachten Oeffnungen passen.

Bei der Praxis habe ich erfahren, dass die Länge der Kettenstäbe von 5 Fuss für den Kettenzieher höchst unpraktisch ist, ein kürzerer Stab von etwa $3\frac{1}{2}$ Fuss ist demselben handlicher, um so mehr er zum Eindrücken in den Boden mit der rechten Hand nach oben zu rücken hat, und bei der Länge von 5 Fuss das Ende des Stabes ohne Anstrengung, indem die linke Hand zum Festhalten der Kette unten bleiben muss, nicht erreichen hann, was eine ungleiche Kettenziehung herbeiführen würde. Die Länge von 5 Fuss dient ja nur dazu, um die Kettenstäbe besser einrichten zu können, aber ein geübtes Auge wird ebenso richtig einen kürzeren Stab wie einen längeren einrichten. Der Stab des Kettenführers muss aber des besseren Einrichtens wegen die übliche Länge haben.

Die bei den Messungen anzuwendenden Zeichenstäbe sind gewöhnlich von Holz und werden in einem ledernen Köcher aufbewahrt; wie leicht aber ist es nicht möglich, dass eins beim Niederbücken oder beim schnellen Messen verloren gehe, auch ist der Köcher der freien Bewegung der Hände etwas hinderlich. Mit mehr Nutzen habe ich daher eiserne Zeichenstäbe angewandt, die an ihren oberen Enden umgebogen sind und auf einen Federhaken (Taf. I. Fig. 7.) aufgehängt werden, der wiederum ebenfalls durch eine Feder gesichert auf einen Ring gehängt wird. Dieser Ring ist an einem Riemen befestigt, der um den Leib geschnallt wird. Hierdurch ist nicht nur bei gehöriger Kraft des Federhakens ein Verlieren unmöglich, sondern auch werden beide, der Kettenzieher sowie der Kettenführer, den Gebrauch ihrer Hände frei haben, was um so nothwendiger ist, da der Geometer als Kettenführer sein Manual zu führen hat.

Ob diese Verbesserungen der Kette schon angewandt sind, ist

mir unbekannt, wenigstens ist mir in keinem Lehrbuche der praktischen Geometrie darüber etwas vorgekommen und glaube ich sie deshalb durch Veröffentlichung gemeinnützig machen zu müssen.

VI.

Ueber einige bestimmte Integrale, deren Werthe durch doppelte Integration gefunden werden.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

In einem Doppelintegrale zwischen bestimmten Gränzen ist es bekanntlich gleichgültig, in welcher Ordnung die angedeuteten Integrationen ausgeführt werden; oder, wenn $f(u, x)$ eine beliebige Funktion zweier von einander unabhängigen Veränderlichen u, x bedeutet und a und b die Gränzwerthe für x, α und β die für u bezeichnen, so hat man

$$\int_\beta^\alpha du \int_b^a f(u, x)dx = \int_b^a dx \int_\beta^\alpha f(u, x)du.$$

Dieser Satz wird dadurch eine reiche Quelle bestimmter Integrale, dass es in vielen Fällen möglich ist, bei der einen Integrationsordnung **ein** Integral, bei der anderen **beide** Integrationen auszuführen, wodurch man unmittelbar zu dem Werthe eines bestimmten Integrales gelangt.

Wir wollen hier einige Entwickelungen dieser Art mittheilen. Es ist bekanntlich

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{Arctan} \frac{x}{k}, \text{ folglich} \int_0^\infty \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{\pi}{2k}.$$

Ferner hat man

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)(u^2+x^2)} = \frac{1}{u^2-1} \left[\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{u^2+x^2}\right]$$

oder nach dem Vorigen

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u^2-1}\left(1-\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{u-1}{u^2-1}$$

d. i.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(u^2+x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u(u+1)}. \quad (1).$$

Auf dieses Integral lässt sich das oben ausgesprochene Prinzip in verschiedener Weise anwenden.

Man multiplizire erstlich die Gleichung mit $2udu$ und integrire nach u zwischen den Gränzen $u=\alpha$, $u=0$, so ist

$$\int_0^\alpha 2u\, du \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(u^2+x^2)} = \pi \int_0^\alpha \frac{du}{1+u}.$$

Die linke Seite geht durch Umkehrung der Integration in folgenden Ausdruck über:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \int_0^\alpha \frac{2u\, du}{x^2+u^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\,[l(x^2+\alpha^2) - l(x^2)]$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\, l\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}\right).$$

Die rechte Seite jener Gleichung ist $=\pi l(1+\alpha)$, mithin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\, l\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}\right) = \pi l(1+\alpha). \quad (2).$$

Man kann dieses Integral noch unter anderen Formen darstellen. Setzt man nämlich $x=\alpha z$, wo z eine neue Veränderliche ist, so wird dasselbe:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+\alpha^2 z^2}\, l\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{\pi l(1+\alpha)}{\alpha}. \quad (3).$$

Nimmt man dagegen $x=\frac{1}{z}$, so wird $dx=-\frac{dz}{z^2}$, und wenn $x=\infty$, $x=0$ geworden ist, hat z die Werthe 0 und ∞ angenommen; daher ist das Integral

$$= -\int_\infty^0 \frac{dz}{z^2+1}\, l(1+\alpha^2 z^2) = +\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1}\, l(1+\alpha^2 z^2)$$

mithin auch

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}\, l(1+\alpha^2 z^2) = \pi l(1+\alpha). \quad (4).$$

Man multiplizire ferner die Gleichung (1) mit du und integrire nach u zwischen den Gränzen $u=\infty$, $u=\alpha$, so ist:

$$\int_\alpha^\infty du \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(u^2+x^2)} = \frac{\pi}{2} \int_\alpha^\infty \frac{du}{u(u+1)}.$$

Die linke Seite wird durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\int_\alpha^\infty \frac{du}{x^2+u^2}=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\left[\text{Arctan}\,\infty-\text{Arctan}\,\frac{\alpha}{x}\right].$$

Es ist aber bekanntlich für jedes v

$$\text{Arctan}\,v+\text{Arctan}\,\frac{1}{v}=\text{Arctan}\,\infty$$

oder

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{v}=\text{Arctan}\,\infty-\text{Arctan}\,v$$

und daher gestaltet sich jenes Integral für $v=\frac{\alpha}{x}$ folgendermassen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{\alpha}.$$

Auf der rechten Seite ist

$$\int\frac{du}{u(u+1)}=-l(1+\frac{1}{u})$$

mithin

$$\int_\alpha^\infty\frac{du}{u(u+1)}=l(1+\frac{1}{\alpha}).$$

Wir haben daher

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{\alpha}=\frac{\pi}{2}\,l(1+\frac{1}{\alpha})$$

oder wenn wir überhaupt α für $\frac{1}{\alpha}$ schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{\text{Arctan}\,\alpha x}{x}=\frac{\pi}{2}\,l(1+\alpha).\quad(5).$$

Für $x=\frac{z}{\alpha}$ gestaltet sich die Gleichung folgendermassen:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\alpha^2+z^2}\cdot\frac{\text{Arctan}\,z}{z}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{l(1+\alpha)}{\alpha^2}.\quad(6).$$

Auf die gefundenen Integrale lässt sich die bisherige Methode selbst wieder anwenden. Man multiplizire nämlich die Gleichung (3), in welcher $\alpha=u$ gesetzt wird, mit $2udu$ und integrire nach u zwischen den Gränzen $u=a$, $u=0$, so kommt:

$$\int_0^a 2u\,du\int_0^\infty\frac{dz}{1+u^2z^2}\,l(1+\frac{1}{z^2})\,dz=2\pi\int_0^a l(1+u)du.$$

Die linke Seite ist auch

$$=\int_0^\infty l(1+\frac{1}{z^2})dz\int_0^a\frac{2u\,du}{1+z^2u^2}=\int_0^\infty l(1+\frac{1}{z^2})dz\cdot\frac{1}{z^2}\,l(1+z^2a^2).$$

Die rechte Seite lässt sich nach der Formel

$$\int ly\, dy = y(ly - 1)$$

leicht näher bestimmen. Man findet

$$\int_0^a l(1+u)du = (1+a)\ [l(1+a)-1] - [l1 - 1]$$
$$= (1+a)l(1+a) - a.$$

Folglich haben wir:

$$\int_0^\infty l(1+a^2z^2)l(1+\frac{1}{z^2})\ \frac{dz}{z^2} = 2\pi(1+a)l(1+a) - 2a\pi.$$

Für $z = \frac{x}{\beta}$, $a = \frac{\beta}{\alpha}$ ergiebt sich hieraus

$$\int_0^\infty l(1+\frac{x^2}{\alpha^2})\ l(1+\frac{\beta^2}{x^2})\ \frac{dx}{x^2} = 2\pi(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha})\ l(1+\frac{\beta}{\alpha}) - \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (7).$$

Man setze auch in Formel (6) $\alpha = u$, multiplizire mit du und integrire zwischen den Gränzen $u = \infty$, $u = \alpha$, so kommt

$$\int_a^\infty du \int_0^\infty \frac{dz}{u^2+z^2} \cdot \frac{\text{Arctan } z}{z} = \frac{\pi}{2}\int_a^\infty \frac{l(1+u)}{u^2}\ du.$$

Die linke Seite lässt sich auch so schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z}\ \text{Arctan } z \int_a^\infty \frac{du}{z^2+u^2}$$
$$= \int_0^\infty \frac{dz}{z}\ \text{Arctan } z \cdot \frac{1}{z}\ [\text{Arctan } \infty - \text{Arctan } \frac{a}{z}]$$
$$= \int_0^\infty \text{Arctan } z \cdot \text{Arctan } \frac{z}{a} \cdot \frac{dz}{z^2}.$$

Für die rechte Seite haben wir nach einer bekannten Reductionsformel

$$\int \frac{l(1+u)}{u^2}\ du = l(1+u)\int\frac{du}{u^2} - \int dl(1+u)\int\frac{du}{u^2}$$
$$= -\frac{l(1+u)}{u} + \int\frac{du}{u(1+u)}$$
$$= -\frac{l(1+u)}{u} - l(1+\frac{1}{u}).$$

Nach den gewöhnlichen Regeln, wodurch man die Werthe unbestimmt scheinender Brüche bestimmt, findet man

$$\frac{l(1+u)}{u} = 0 \text{ für } u = \infty,$$

folglich

$$\int_a^\infty \frac{l(1+u)}{u^2}\,du = \frac{l(1+a)}{a} - l(1+\frac{1}{a}).$$

Wir haben daher:

$$\int_0^\infty \text{Arctan}\ \frac{z}{a}\ \text{Arctan}\ z\,.\,\frac{dz}{z^2} = \frac{\pi}{2}\ [\frac{l(1+a)}{a} + l(1+\frac{1}{a})].$$

Für $z=\frac{x}{\beta}$, $a=\frac{\alpha}{\beta}$ ergiebt sich hieraus

$$\int_0^\infty \text{Arctan}\,\frac{x}{\alpha}\,.\,\text{Arctan}\,\frac{x}{\beta}\,.\,\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}[\frac{1}{\alpha}\,l(1+\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{1}{\beta}\,l(1+\frac{\beta}{\alpha})].\quad (8).$$

Für $\alpha=\beta=1$ hat man z. B.

$$\int_0^\infty (\frac{\text{Arctan}\ x}{x})^2\ dx = \pi l2.\quad (9).$$

Es würde nicht leicht sein, dieses rein numerische Integral, dessen Werth sich hier sehr ungezwungen ergiebt, für sich allein zu behandeln. Man sieht daraus, dass es in der Theorie bestimmter Integrale wesentlich darauf ankommt, den in Rede stehenden Integralen möglichst viele, von einander unabhängige und beliebige Constanten zu verschaffen, deren Variation neue Formen hervorbringt, welche oft leichter zu behandeln sind.

VII.

Elementare Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks.

Nach zwei Aufsätzen der Herren Giulio und Besge in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

I.

In dem genannten Journal T. VII. p. 59. hat Herr Ferriot, Recteur honoraire de l'Académie de Grenoble, eine ganz elemen-

tare Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks zu geben versucht, welche jedoch nach unserer Ueberzeugung als völlig verunglückt zu betrachten ist. Auf das Ungenügende dieser von Ferriot angewandten Methode hat in demselben Journal T. VII. p. 516. zuerst Herr Besge aufmerksam gemacht, und zugleich bemerkt, dass T. IV. p. 386. Herr Giulio, Professeur à l'Université de Turin, die Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks auf einem von ihm mit Hülfe der Integralrechnung bewiesenen Satz gegründet habe, dass sich aber dieser Satz auch sehr leicht und einfach bloss mittelst ganz elementarer Hülfsmittel beweisen lasse, und dass auf diese Weise mit Beibehaltung der übrigen von Herrn Giulio angewandten Betrachtungen eine völlig elementare Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks gewonnen werden könne. Diese nach unserer Ansicht die Beachtung der Lehrer der Mathematik recht sehr verdienenden Untersuchungen der Herren Giulio und Besge auf ganz elementare Weise darzustellen, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes, wobei wir übrigens nicht unterlassen wollen zu bemerken, dass die erwähnte Abhandlung des Herrn Giulio noch mehrere andere sehr bemerkenswerthe und ziemlich allgemeine Sätze enthält.

II.

Man denke sich ein unendlich kleines Element E einer mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugelfläche, und die Ebene eines grössten Kreises der entsprechenden Kugel, welche wir im Folgenden die Momentenebene nennen wollen.

Die Entfernung des Elements E von der Momentebene sei q, so ist Eq das Moment des Elements E in Bezug auf die angenommene Momentenebene. Bezeichnet aber i den Neigungswinkel der durch das Element E gelegten Berührungsebene der Kugel gegen die Momentenebene, so erhellet leicht, dass $q = r\cos i$, und folglich das Moment

$$Eq = Er\cos i$$

ist. Nun ist aber nach einem sehr bekannten Satze $E\cos i$ der Flächeninhalt E' der Projection des Elements E auf der Momentenebene; also ist das Moment

$$Eq = E'r.$$

Ist jetzt F ein beliebiges ganz auf einer Seite der Momentenebene liegendes Stück der Kugelfläche, so denke man sich dasselbe in unendlich viele unendlich kleine Elemente

$$E, E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_n$$

zerlegt, deren Projectionen auf der Momentenebene respective

$$E', E'_1, E'_2, E'_3, \ldots\ldots E'_n;$$

und deren Entfernungen von der Momentenebene respective

$$q, q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n$$

sein mögen; so sind nach dem Vorhergehenden

$$E r, E_1 r, E_2 r, E_3 r, \ldots\ldots E_n r$$

die Momente dieser Elemente in Bezug auf die angenommene Momentenebene, und es ist also nach den bekannten Lehren der Statik, wenn Q die Entfernung des Schwerpunkts des sphärischen Flächenstücks F von der Momentenebene bezeichnet,

$$FQ = Er + E_1 r + E_2 r + E_3 r + \ldots\ldots + E_n r;$$

also

$$FQ = (E + E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_n) r.$$

Bezeichnet aber jetzt F' die Projection des sphärischen Flächenstücks F auf der Momentenebene, so ist offenbar

$$F' = E + E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_n,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$FQ = F'r$$

oder

$$F : F' = r : Q,$$

woraus sich ein leicht in Worten auszusprechender Satz ergiebt.

Absichtlich haben wir bei dem Beweise dieses Satzes die obige ganz einfache Darstellung gewählt, bemerken aber, dass sich dieselbe auch leicht durch eine Gränzenbetrachtung zu grösserer Strenge erheben lassen würde.

Von diesem Satze kann nun die folgende Anwendung auf die Bestimmung des Schwerpunkts eines sphärischen Dreiecks gemacht werden, wobei wir wie gewöhnlich in der sphärischen Trigonometrie annehmen, dass keine Seite und kein Winkel dieses sphärischen Dreiecks grösser als 180° ist.

III.

Den Mittelpunkt der mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel wollen wir im Folgenden durch O bezeichnen. Ein auf deren Oberfläche liegendes sphärisches Dreieck sei ABC. Die Winkel dieses sphärischen Dreiecks werden wie gewöhnlich durch A, B, C, und deren Gegenseiten durch a, b, c bezeichnet. Sein Flächeninhalt sei Δ, und Δ_a, Δ_b, Δ_c seien die Flächenräume seiner Projectionen auf den Ebenen der Seiten a, b, c, d. i. auf den Ebenen der Winkel BOC, AOC, AOB. Sind nun X_a, X_b, X_c die Entfernungen des Schwerpunkts dieses sphärischen Dreiecks von den Ebenen der Seiten a, b, c, d. i. von den Ebenen der Winkel BOC, AOC, AOB; so haben wir nach dem in II. bewiesenen allgemeinen Satze die drei folgenden Gleichungen:

$$1)\quad X_a = r \cdot \frac{\Delta_a}{\Delta},\quad X_b = r \cdot \frac{\Delta_b}{\Delta},\quad X_c = r \cdot \frac{\Delta_c}{\Delta}.$$

Wenn die Seiten a, b, c sämmtlich in Graden ausgedrückt sind, so erhält man die Flächenräume der Sectoren BOC, AOC, AOB durch die folgenden Gleichungen:

$$2) \begin{cases} BOC = r^2 \cdot \frac{a\pi}{360}, \\ AOC = r^2 \cdot \frac{b\pi}{360}, \\ AOB = r^2 \cdot \frac{c\pi}{360}. \end{cases}$$

Ferner sind

$$BOC \cdot \cos B \text{ und } BOC \cdot \cos C$$

die, jenachdem die Winkel B, C kleiner oder grösser als 90° sind, positiv oder negativ genommenen Projectionen des Sectors BOC auf den Ebenen der Sectoren AOB und AOC. Eben so sind

$$AOC \cdot \cos A \text{ und } AOC \cdot \cos C$$

die, jenachdem die Winkel A, C kleiner oder grösser als 90° sind, positiv oder negativ genommenen Projectionen des Sectors AOC auf den Ebenen der Sectoren AOB und BOC. Endlich sind auf dieselbe Weise

$$AOB \cdot \cos A \text{ und } AOB \cdot \cos B$$

die, jenachdem die Winkel A, B kleiner oder grösser als 90° sind, positiv oder negativ genommenen Projectionen des Sectors AOB auf den Ebenen der Sectoren AOC und BOC.

Hieraus und aus 2) erhellet nun aber sehr leicht, dass in völliger Allgemeinheit

$$\Delta_a = BOC - AOC \cdot \cos C - AOB \cdot \cos B,$$
$$\Delta_b = AOC - AOB \cdot \cos A - BOC \cdot \cos C,$$
$$\Delta_c = AOB - BOC \cdot \cos B - AOC \cdot \cos A;$$

also

$$3) \begin{cases} \Delta_a = \frac{r^2\pi}{360}(a - b \cos C - c \cos B), \\ \Delta_b = \frac{r^2\pi}{360}(b - c \cos A - a \cos C), \\ \Delta_c = \frac{r^2\pi}{360}(c - a \cos B - b \cos A) \end{cases}$$

ist.

Weil nun, wenn auch die Winkel A, B, C sämmtlich in Graden ausgedrückt sind, nach einem bekannten Satze von dem sphärischen Dreiecke

$$4) \; \Delta = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C - 180)$$

ist; so ist nach 1), 3) und 4):

$$5)\begin{cases} X_a = \frac{1}{2}r \cdot \dfrac{a-b\cos C-c\cos B}{A+B+C-180}, \\ X_b = \frac{1}{2}r \cdot \dfrac{b-c\cos A-a\cos C}{A+B+C-180}, \\ X_c = \frac{1}{2}r \cdot \dfrac{c-a\cos B-b\cos A}{A+B+C-180}; \end{cases}$$

wodurch nun offenbar die Lage des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks vollkommen bestimmt ist.

IV.

Wir wollen jetzt den Mittelpunkt O der Kugel als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz, die Ebene des Sectors AOB als Ebene der xy, und den Halbmesser OA als den positiven Theil der Axe der x annehmen. Der positive Theil der Axe der y soll auf derselben Seite der Axe der x liegen, auf welcher der Punkt B liegt, und der positive Theil der Axe der z soll auf derselben Seite der Ebene der xy liegen, auf welcher der Punkt C liegt.

Dies vorausgesetzt ist nun zuvörderst offenbar, wenn x, y, z die Coordinaten des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks in Bezug auf das angenommene System bezeichnen,

$$z = X_c;$$

also nach 5)

$$z = \frac{1}{2}r \cdot \frac{c-a\cos B-b\cos A}{A+B+C-180}.$$

Denkt man sich aber von dem Schwerpunkte des sphärischen Dreiecks auf die Axe der x ein Perpendikel gefällt, bezeichnet dieses Perpendikel durch ϱ, und den von demselben mit der Ebene der xy eingeschlossenen, nach der Seite von B hin liegenden, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ; so erhellet mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung, dass in völliger Allgemeinheit

$$X_b = \varrho \sin(A-\varphi),\ X_c = \varrho \sin\varphi$$

und

$$X_c = y \operatorname{tang} \varphi$$

ist. Also ist

$$\frac{X_b}{X_c} = \frac{\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi}$$

oder

$$\frac{X_b}{X_c} = \sin A \cot\varphi - \cos A,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wenn man nämlich in dieser Gleichung

$$\cot\varphi = \frac{y}{X_c}$$

setzt,

$$X_b = y\sin A - X_c\cos A,$$

also

$$y = \frac{X_b + X_c\cos A}{\sin A}.$$

Führt man nun für X_b und X_c ihre aus 5) bekannten Werthe ein, so erhält man

$$y = \frac{r}{2\sin A}\cdot\frac{b\sin A^2 - a(\cos C + \cos A\cos B)}{A+B+C-180}.$$

Nun ist aber nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A\cos B}{\sin A\sin B},$$

und folglich

$$\frac{\cos C + \cos A\cos B}{\sin A} = \cos c\sin B.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$y = \tfrac{1}{2}r\cdot\frac{b\sin A - a\cos c\sin B}{A+B+C-180^\circ}.$$

Man nehme jetzt O als den Anfang eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $x'\,y'\,z'$ an. Die Ebene des Sectors AOB sei wieder die Ebene der $x'y'$, und der Halbmesser OB sei der positive Theil der Axe der x'. Der positive Theil der Axe der y' werde so angenommen, dass er mit dem Punkte A nicht auf einer Seite der Axe der x' liegt, und der positive Theil der Axe der z' liege auf derselben Seite der Ebene der $x'y'$, auf welcher der Punkt C liegt; so ist, wenn x', y', z' die Coordinaten des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks ABC in diesem Systeme sind, nach dem Vorhergehenden offenbar

$$-y' = \tfrac{1}{2}r\cdot\frac{a\sin B - b\cos c\sin A}{A+B+C-180},$$

also

$$y' = \tfrac{1}{2}r\cdot\frac{b\cos c\sin A - a\sin B}{A+B+C-180}.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber in völliger Allgemeinheit

$$x = x'\cos c - y'\sin c,$$

$$y = x'\sin c + y'\cos c;$$

folglich, wenn man x' eliminirt,

$$y \cos c - x \sin c = y',$$

also

$$x = \frac{y \cos c - y'}{\sin c}.$$

Führt man nun in diese Gleichung die aus dem Obigen bekannten Werthe von y und y' ein, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$x = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{a \sin c \sin B}{A+B+C-180},$$

und hat also nun überhaupt die folgenden Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks ABC in dem ersten der beiden oben angenommenen Systeme:

$$6)\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{a \sin c \sin B}{A+B+C-180},\\ y &= \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{b \sin A - a \cos c \sin B}{A+B+C-180},\\ z &= \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{c - a \cos B - b \cos A}{A+B+C-180}. \end{aligned}\right.$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen ergiebt sich auch, dass, wenn wir die Entfernungen des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks ABC von den Ebenen der drei auf den Halbmesser OA, OB, OC senkrecht stehenden grössten Kreise durch X_A, X_B, X_C bezeichnen, und diese Entfernungen immer von O aus auf den Richtungen der Halbmesser OA, OB, OC selbst abschneiden, jederzeit

$$7)\left\{\begin{aligned} X_A &= \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{a \sin b \sin C}{A+B+C-180} = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{a \sin c \sin B}{A+B+C-180},\\ X_B &= \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{b \sin c \sin A}{A+B+C-180} = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{b \sin a \sin C}{A+B+C-180},\\ X_C &= \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{c \sin a \sin B}{A+B+C-180} = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{c \sin b \sin A}{A+B+C-180} \end{aligned}\right.$$

ist.

Zu diesen drei letzten Formeln gelangt Herr Giulio a. a. O. durch eine unmittelbare geometrische Betrachtung mit Hülfe des in II. bewiesenen Satzes und der aus der sphärischen Trigonometrie bekannten Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke. Uns scheint jedoch die vorhergehende mehr analytische Ableitung aus verschiedenen Gründen den Vorzug zu verdienen, welches weiter zu erörtern hier zu weit führen würde.

V.

Wenn ABC ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck und A der rechte Winkel ist, so ist nach 6) und einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$8)\begin{cases} x=\frac{1}{2}r\cdot\frac{a\sin c\sin B}{B+C-90}, \\ y=\frac{1}{2}r\cdot\frac{b-a\cos C}{B+C-90}, \\ z=\frac{1}{2}r\cdot\frac{c-a\cos B}{B+C-90}. \end{cases}$$

Ist ABC ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck und $a=b$, also auch $A=B$, so nehme man den Halbmesser der Kugel, welcher die Seite c halbirt, als den positiven Theil der Axe der x, die Ebene der Seite c als Ebene der xy, und den positiven Theil der Axe der z auf derselben Seite dieser Ebene an, auf welcher der Punkt C liegt. Dann ist nach den Formeln 8) und bekannten Elementarsätzen der Lehre vom Schwerpunkte

$$9)\begin{cases} x=r\cdot\frac{a\sin\frac{1}{2}c\sin A}{2A+C-180}=r\cdot\frac{b\sin\frac{1}{2}c\sin B}{2B+C-180}, \\ y=0, \\ z=\frac{1}{2}r\cdot\frac{c-2a\cos A}{2A+C-180}=\frac{1}{2}r\cdot\frac{c-2b\cos B}{2B+C-180}. \end{cases}$$

Für $a=b=90$ ist auch $A=B=90$, und folglich nach 9)

$$10)\ x=r\cdot\frac{90\sin\frac{1}{2}c}{C},\ y=0,\ z=\frac{1}{2}r;$$

weil nämlich der Winkel C in diesem Falle von der Seite c gemessen wird, also, da alle Seiten und Winkel in Graden ausgedrückt sind, $C=c$ ist.

VIII.

Geometrische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Man soll, wenn ADB in Taf. I. Fig. 8. eine aus dem Mittelpunkte C über der grossen Axe AB mit der kleinen Halbaxe CD beschriebene halbe Ellipse ist, der

Punkt E in dieser Ellipse eine solche Lage hat, dass die beiden von E nach den Endpunkten A und D der grossen und kleinen Axe gezogenen Sehnen AE und DE gleiche Länge haben, und der Winkel ACE, unter welchem der nach dem Punkte E gezogene Radius Vector CE gegen die grosse Halbaxe CA geneigt ist, als gegeben betrachtet wird, das Verhältniss der beiden Axen der Ellipse bestimmen.

Die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse bezeichne man wie gewöhnlich durch a und b, den gegebenen Winkel ACE durch ω. Von E fälle man auf die grosse Axe AB das Perpendikel EF, und setze $CF = x$, $EF = y$; so ist

$$AE^2 = (x-a)^2 + y^2,\; DE^2 = x^2 + (y-b)^2,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $AE = DE$ ist,

$$(x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-b)^2,$$

woraus sich

$$a^2 - 2ax = b^2 - 2by$$

oder

$$1)\; a^2 - b^2 = 2(ax - by)$$

ergiebt. Nach der Theorie der Ellipse hat man ferner

$$2)\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und in dem Dreiecke CEF ist

$$3)\; y = x \text{ tang } \omega.$$

Führt man diesen Ausdruck von y in die Gleichungen 1) und 2) ein, so erhält man

$$a^2 - b^2 = 2(a - b \text{ tang } \omega)x,$$

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\text{tang } \omega^2}{b^2}\right)x^2 = 1;$$

also, wie man leicht findet,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2(a - b \text{ tang } \omega)} = \frac{(a^2 - b^2)\cos\omega}{2(a\cos\omega - b\sin\omega)},$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2 \text{ tang } \omega^2} = \frac{a^2b^2\cos\omega^2}{a^2\sin\omega^2 + b^2\cos\omega^2};$$

woraus sich die Gleichung

$$4a^2b^2(a - b \text{ tang } \omega)^2$$
$$= (a^2 - b^2)^2\,(b^2 + a^2 \text{ tang } \omega^2),$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten durch b^6 dividirt, die Gleichung

$$4\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a}{b}-\text{tang }\omega\right)^2$$
$$=\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)^2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\text{ tang }\omega^2\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$4)\quad \frac{a}{b}=u$$

setzt, die Gleichung

$$5)\quad 4u^2(u-\text{tang }\omega)^2=(u^2-1)^2\,(1+u^2\text{ tang }\omega^2)$$

ergiebt. Entwickelt man diese Gleichung gehörig, so bringt man sie leicht auf die folgende Form:

$$6)\quad \left.\begin{array}{l}\text{tang }\omega^2\,.\,u^6-(3+2\text{ tang }\omega^2)\,u^4\\ \quad+8\text{tang }\omega\,.\,u^3-(2+3\text{tang }\omega^2)\,u^2+1\end{array}\right\}=0$$

oder auf die Form

$$7)\quad \left.\begin{array}{l}u^6-(2+3\cot\omega^2)\,u^4\\ \quad+8\cot\omega\,.\,u^3-(3+2\cot\omega^2)\,u^2+\cot\omega^2\end{array}\right\}=0,$$

welches eine Gleichung des sechsten Grades ist, in der das zweite Glied und auch das die erste Potenz der unbekannten Grösse u enthaltende vorletzte Glied fehlt.

Die vorher aufgelöste Aufgabe hat Analogie zu einer andern Aufgabe, mit deren Hülfe man in der physischen Geographie oder Meteorologie die scheinbare Gestalt des Himmels zu bestimmen pflegt, worüber man mit Mehrerem Lehrbuch der Meteorologie von L. F. Kämtz. Thl. III. Halle. 1836. S. 45 nachsehen kann. Diese Aufgabe ist folgende:

In Taf. I. Fig. 9. sei ADB ein Kreisabschnitt, der nicht grösser als der Halbkreis ist. Der Mittelpunkt des Kreises, welchem derselbe angehört, sei O, und der Halbmesser OD stehe auf der Sehne AB dieses Kreisabschnitts in C senkrecht. Wenn man nun den Winkel ACE kennt, für welchen die Linie CE eine solche Lage hat, dass die Bogen AE, DE, und also auch die Sehnen AE, DE einander gleich sind: so soll man das Verhältniss der Linien AC und CD zu einander bestimmen.

Den Winkel ACE bezeichne man durch ω, und fälle von E auf den Halbmesser OD das Perpendikel EF. Den Halbmesser des Kreises bezeichne man durch r, und setze

$$OF=x,\ EF=y;\ OC=x_1,\ AC=y_1;$$

so ist

$$8)\quad x^2+y^2=r^2,\ x_1{}^2+y_1{}^2=r^2.$$

Ferner ist

$$AE^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,\ DE^2=(r-x)^2+y^2;$$

und folglich, weil nach der Bedingung der Aufgabe $AE^2 = DE^2$ ist,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r - x)^2 + y^2,$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung mit Hülfe von 8) die Gleichung

$$9) \quad rx = xx_1 + yy_1$$

erhält. Endlich hat man noch die Gleichung

$$10) \quad y = (x - x_1) \cot \omega.$$

Setzt man nun

$$\frac{CD}{AC} = u,$$

so ist

$$11) \quad \frac{r - x_1}{y_1} = u \text{ oder } r - x_1 = y_1 u.$$

Aus der Gleichung 9) folgt

$$(r - x_1)\, x = yy_1 \text{ oder } \frac{r - x_1}{y_1} = \frac{y}{x},$$

also wegen 11)

$$12) \quad y = xu,$$

und daher nach 10)

$$xu = (x - x_1) \cot \omega,$$

woraus sich

$$13) \quad x = \frac{x_1}{1 - u \operatorname{tang} \omega},$$

also nach 12)

$$14) \quad y = \frac{x_1 u}{1 - u \operatorname{tang} \omega}$$

ergiebt. Führt man diese Ausdrücke von x und y in die erste der Gleichungen 8) ein, so erhält man

$$r^2 = x_1^{\,2} \cdot \frac{1 + u^2}{(1 - u \operatorname{tang} \omega)^2},$$

also

$$15) \quad \left(\frac{r}{y_1}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 \cdot \frac{1 + u^2}{(1 - u \operatorname{tang} \omega)^2}.$$

Aus der Gleichung 11) folgt

$$r = x_1 + y_1 u,$$

und es ist also nach der zweiten der Gleichungen 8)

$$x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + 2x_1 y_1 u + y_1^2 u^2,$$

woraus sich leicht

$$16)\ \frac{x_1}{y_1} = \frac{1-u^2}{2u}$$

ergiebt. Weil nun nach 11)

$$\frac{r}{y_1} - \frac{x_1}{y_1} = u, \text{ also } \frac{r}{y_1} = u + \frac{x_1}{y_1}$$

ist, so ist nach 16)

$$17)\ \frac{r}{y_1} = \frac{1+u^2}{2u}.$$

Führt man nun die Ausdrücke 16) und 17) in die Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{(1+u^2)^2}{4u^2} = \frac{(1-u^2)^2}{4u^2} \cdot \frac{1+u^2}{(1-u \text{ tang } \omega)^2},$$

also

$$18)\ (1+u^2)(1-u \text{ tang } \omega)^2 = (1-u^2)^2.$$

Nach gehöriger Entwickelung erhält man aus dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} 19)\ 0 = (1 - \text{tang } \omega^2)u^3 \\ + 2\text{tang } \omega \,.\, u^2 \\ - (3 + \text{tang } \omega^2) \,.\, u \\ + 2 \text{ tang } \omega, \end{aligned}$$

oder, weil bekanntlich

$$\text{tang } 2\omega = \frac{2\text{tang } \omega}{1 - \text{tang } \omega^2}$$

ist:

$$20)\ u^3 + \text{tang } 2\omega \,.\, u^2 - \frac{3 + \text{tang } \omega^2}{1 - \text{tang } \omega^2} u + \text{tang } 2\omega = 0.$$

Auch ist

$$\frac{3 + \text{tang } \omega^2}{1 - \text{tang } \omega^2} = \frac{3\cos \omega^2 + \sin \omega^2}{\cos \omega^2 - \sin \omega^2} = \frac{1 + 2\cos \omega^2}{\cos 2\omega}.$$

Aber bekanntlich

$$2\cos \omega^2 = 1 + \cos 2\omega,$$

und folglich

$$\frac{3 + \text{tang } \omega^2}{1 - \text{tang } \omega^2} = \frac{2 + \cos 2\omega}{\cos 2\omega} = 1 + 2\sec 2\omega.$$

Daher lässt sich die obige Gleichung zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses u auch unter der Form

$$21)\quad u^3 + \operatorname{tang} 2\omega \,.\, u^2 - (1 + 2\sec 2\omega)u + \operatorname{tang} 2\omega = 0$$

darstellen.

Die von Kämtz a. a. O. ganz nach Kästner (Smith's Lehrbegriff der Optik. S. 56) gegebene Auflösung ist von der vorhergehenden verschieden, indem bei derselben das Verhältniss u nicht unmittelbar gesucht wird.

Eine Wolke, die sich in einer Höhe von 23° über dem Horizonte befindet, scheint nach Smith das scheinbare Himmelsgewölbe zu halbiren. Für diesen Werth von ω ergiebt sich nach Kämtz a. a. O. nahe $u = 0{,}3$. Die scheinbare Entfernung des Zeniths vom Beobachter beträgt also nur ungefähr 0,3 der Entfernung des Horizonts vom Beobachter.

Es scheint mir, dass von den in diesem Aufsatze behandelten Aufgaben ein zweckmässiger Gebrauch beim Unterrichte gemacht werden kann. Die Schüler können auch zur eignen Beobachtung des scheinbaren Himmelsgewölbes angeleitet werden.

IX.

Ueber das independente Fortschreitungsgesetz der numerischen Coefficienten in der Entwickelung der höheren Differentiale der Function $y=\sqrt{a^2-b^2x^2}$, und über zwei Eigenschaften der Kegelfläche zweiten Grades.

Von dem

Herrn Doctor A. R. Luchterhandt

zu Königsberg i. d. N.

I.

Das independente Fortschreitungsgesetz der numerischen Coefficienten in der Entwickelung der höheren Differentiale der Function $y=\sqrt{a^2-b^2x^2}$.

Im dritten Theile des Archivs S. 243 und 247 hat Herr Pro-

fessor Grunert für die obengenannten Coefficienten die Recursion formeln

$$\left.\begin{aligned}
\overset{2n}{A}_0 &= \overset{2n-1}{A}_0,\\
\overset{2n}{A}_1 &= (4n-4)\overset{2n-1}{A}_0 + 3\,.\,\overset{2n-1}{A}_1,\\
\overset{2n}{A}_2 &= (4n-6)\overset{2n-1}{A}_1 + 5\,.\,\overset{2n-1}{A}_2,\\
\overset{2n}{A}_3 &= (4n-8)\overset{2n-1}{A}_2 + 7\,.\,\overset{2n-1}{A}_3,\\
&\;\;\vdots\\
\overset{2n}{A}_{n-2} &= (2n+2)\overset{2n-1}{A}_{n-3} + (2n+3)\overset{2n-1}{A}_{n-2},\\
\overset{2n}{A}_{n-1} &= 2n\overset{2n-1}{A}_{n-2},
\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overset{2n+1}{A}_0 &= (4n-1)\overset{2n}{A}_0 + 2\overset{2n}{A}_1,\\
\overset{2n+1}{A}_1 &= (4n-3)\overset{2n}{A}_1 + 4\overset{2n}{A}_2,\\
\overset{2n+1}{A}_2 &= (4n-5)\overset{2n}{A}_2 + 6\overset{2n}{A}_3,\\
\overset{2n+1}{A}_3 &= (4n-7)\overset{2n}{A}_3 + 8\overset{2n}{A}_4,\\
&\;\;\vdots\\
\overset{2n+1}{A}_{n-2} &= (2n+3)\overset{2n}{A}_{n-2} + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1},\\
\overset{2n+1}{A}_{n-1} &= (2n+1)\overset{2n}{A}_{n-1}
\end{aligned}\right\}(2)$$

entwickelt, aus denen wir jetzt das independente Bildungsgese ableiten wollen. Fasst man zunächst die Coefficienten A_0 i Auge, so sieht man bald, nach welchem Gesetz sie gebildet we den, denn da man

$$\overset{1}{A}_0 = \overset{2}{A}_0 = 1,\ \overset{3}{A}_0 = \overset{4}{A}_0 = 3\,.\,1,\ \overset{5}{A}_0 = \overset{6}{A}_0 = 45 = 5\,.\,3^2\,.\,1^2,$$
$$\overset{7}{A}_0 = \overset{8}{A}_0 = 1575 = 7\,.\,5^2\,.\,3^2\,.\,1^2$$

hat, so schliesst man, dass allgemein

$$\overset{2n}{A}_0 = (2n-1)\,(2n-3)^2\,(2n-5)^2\,\ldots\ldots 7^2\,.\,5^2\,.\,3^2\,.\,1^2,$$
$$\overset{2n+1}{A}_0 = (2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2\,\ldots\ldots 7^2\,.\,5^2\,.\,3^2\,.\,1^2$$

sein werde. Die Gültigkeit dieser Ausdrücke angenommen, erhä man nun leicht durch successive Anwendung der Recursionsfo meln (1) und (2) für die folgenden Coefficienten die Werthe

$$\overset{2n}{A}_1 = (n-1)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots .\ 7^2 .\ 5^2 .\ 3^2,$$

$$\overset{2n}{A}_2 = (n-1)^2\ (n-2)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots 7^2 .\ 5^2 .\ 3,$$

$$\overset{2n}{A}_3 = 2(n-1)^2\ (n-2)^2\ (n-3)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots .\ 7^2 .\ 5,$$

$$\overset{2n}{A}_4 = (n-1)^2\ (n-2)^2\ (n-3)^2\ (n-4)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots 9^2 .\ 7 .\ 5,$$

$$\overset{2n}{A}_5 = 2 .\ (n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots (n-4)^2\ (n-5)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots 11^2 .\ 9 .\ 7,$$

$$\overset{2n}{A}_6 = 2 .\ (n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots (n-5)^2\ (n-6)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots .\ 13^2 .\ 11 .\ 7 .\ 3,$$

$$\overset{2n}{A}_7 = 4 .\ (n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots (n-6)^2\ (n-7)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (3n-5)^2 \ldots .\ 15^2 .\ 13 .\ 11 .\ 3$$

$$\overset{2n+1}{A_1} = (n-1)\, 2n(2n+1)\, (2n-1)^2\, (2n-3)^2 \ldots .\, 7^2 \,.\, 5^2 \,.\, 3,$$

$$\overset{2n+1}{A_2} = (n-1)^2\, (n-2)\, 2n(2n+1)\, (2n-1)^2\, (2n-3)^2 \ldots .\, 7^2 \,.\, 5 \,.\, 3,$$

$$\overset{2n+1}{A_3} = 2(n-1)^2\, (n-2)^2\, (n-3)\, 2n(2n+1)\, (2n-1)^2\, (2n-3)^2 \ldots .\, 9^2 \,.\, 7 \,.\, 5,$$

$$\overset{2n+1}{A_4} = (n-1)^2\, (n-2)^2\, (n-3)^2\, (n-4)\, 2n(2n+1)\, (2n-1)^2\, (2n-3)^2 \ldots 11^2 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 5,$$

$$\overset{2n+1}{A_5} = 2(n-1)^2\, (n-2)^2 \,.\,.\, (n-4)^2\, (n-5)\, 2n(2n+1)\, (2n-1)^2\, (2n-3)^2 \ldots 13^2 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 7,$$

$$\overset{2n+1}{A_6} = 2(n-1)^2\, (n-2)^2 \ldots (n-5)^2\, (n-6)\, 2n(2n+1)\, (2n-1)^2\, (2n-3)^2 \ldots 15^2 \,.\, 13 \,.\, 11 \,.\, 7 \,.\, 3,$$

$$\overset{2n+1}{A_7} = 4 \,.\, (n-1)^2\, (n-2)^2 \,.\,.\, (n-6)^2\, (n-7)\, 2n(2n+1)\, (2n-1)^2\, (2n-3)^2 \ldots .\, 17^2 \,.\, 15 \,.\, 13 \,.\, 11 \,.\, 3.$$

Das Bildungsgesetz spricht sich zwar noch nicht mit vollkomm
Bestimmtheit in diesen Ausdrücken aus, man wird aber durch d
selben auf neue Recursionsformeln geführt, die dann rückwä
das Gesetz der independenten Ableitung der Coefficienten liefe

Aus der Entwickelung der Quotienten je zweier auf einander folgender Coefficienten ergiebt sich nämlich

$$\overset{2n}{A}_1 = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} \overset{2n}{A}_0,$$

$$\overset{2n}{A}_2 = 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \overset{2n}{A}_1,$$

$$\overset{2n}{A}_3 = 2 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 5} \overset{2n}{A}_2,$$

$$\overset{2n}{A}_4 = 2 \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 7} \overset{2n}{A}_3,$$

$$\overset{2n}{A}_5 = 2 \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{5 \cdot 9} \overset{2n}{A}_4,$$

$$\overset{2n}{A}_6 = 2 \cdot \frac{(n-5)(n-6)}{6 \cdot 11} \overset{2n}{A}_5,$$

$$\overset{2n}{A}_7 = 2 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{7 \cdot 13} \overset{2n}{A}_6,$$

wonach allgemein

$$\overset{2n}{A}_p = 2 \cdot \frac{(n-p+1)(n-p)}{p(2p-1)} \overset{2n}{A}_{p-1}$$

sein würde, und

$$\overset{2n+1}{A}_1 = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 3} \overset{2n+1}{A}_0,$$

$$\overset{2n+1}{A}_2 = 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 5} \overset{2n+1}{A}_1,$$

$$\overset{2n+1}{A}_3 = 2 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 7} \overset{2n+1}{A}_2,$$

$$\overset{2n+1}{A}_4 = 2 \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 9} \overset{2n+1}{A}_3,$$

$$\overset{2n+1}{A}_5 = 2 \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{5 \cdot 11} \overset{2n+1}{A}_4,$$

$$\overset{2n+1}{A}_6 = 2 \cdot \frac{(n-5)(n-6)}{6 \cdot 13} \overset{2n+1}{A}_5,$$

$$\overset{2n+1}{A}_7 = 2 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{7 \cdot 15} \overset{2n+1}{A}_6,$$

wonach allgemein

$$\overset{2n+1}{A}_p = 2 \cdot \frac{(n-p+1)(n-p)}{p(2p+1)} \overset{2n+1}{A}_{p-1}$$

wäre.

Substituirt man nun nach und nach für A_2, A_3 u. s. w. ihre Werthe, so hat man

$$\overset{2n}{A}_1 = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} \overset{2n}{A}_0,$$

$$\overset{2n}{A}_2 = 2^2 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3} \overset{2n}{A}_0,$$

$$\overset{2n}{A}_3 = 2^3 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} \overset{2n}{A}_0,$$

$$\overset{2n}{A}_4 = 2^4 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2 (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \overset{2n}{A}_0, \text{ u. s. w}$$

und

$$\overset{2n+1}{A}_1 = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 3} \overset{2n+1}{A}_0,$$

$$\overset{2n+1}{A}_2 = 2^2 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} \overset{2n+1}{A}_0,$$

$$\overset{2n+1}{A}_3 = 2^3 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \overset{2n+1}{A}_0,$$

$$\overset{2n+1}{A}_4 = 2^4 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2 (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \overset{2n+1}{A}_0, \text{ u. s. w.}$$

Nach dem Bildungsgesetz, das hier ganz unzweideutig hervortritt würde man nun allgemein

$$\overset{2n}{A}_p = 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\,(n-2)^2\,(n-3)^2\ldots\ldots(n-p+1)^2\,(n-p)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(p-1)\,p\,.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots\ldots(2p-3)\,(2p-1)}\overset{2n}{A}_0$$

$$= 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\,(n-2)^2\ldots(n-p+1)^2\,(n-p)\,(2n-1)\,(2n-3)^2\,(2n-5)^2\ldots(2p+1)^2\,(2p-1)\,(2p-3)\ldots7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(p-1)\,p} \quad\ldots\ (3)$$

und

$$\overset{2n+1}{A}_p = 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\,(n-2)^2\ldots\ldots(n-p+1)^2\,(n-p)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)\,p\,.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)\,(2p+1)}\overset{2n+1}{A}_0$$

$$= 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\,(n-2)^2\ldots(n-p+1)^2\,(n-p)\,(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2\ldots(2p+3)^2\,(2p+1)\,(2p-1)\ldots7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(p-1)\,p} \quad\ldots\ (4)$$

erhalten. Um nun zu zeigen, dass diesen Formeln allgemeine Gültigkeit zukomme, wollen wir nachweisen, dass dieselben, wenn sie von A_0 bis A_p richtig sind, auch noch für A_{p+1} stattfinden. Setzen wir zu dem Zwecke in die nach (1) stattfindende Formel

$$2(p+1)\overset{2n}{A}_{p+1} = \overset{2n+1}{A}_p - \{4n - (2p+1)\}\overset{2n}{A}_p$$

für $\overset{2n+1}{A}_p$ und $\overset{2n}{A}_p$ ihre voranstehenden Werthe und reduciren, so ergiebt sich

95

$$\overset{2n}{A}_{p+1} = 2^{p+1} \cdot \frac{n(n-1)^2\,(n-2)^2 \ldots (n-p)^2\,(n-p-1)\,(2n-1)\,(2n-3)^2\,(2n-5)^2 \ldots (2p+3)^2 \cdot (2p+1)\,(2p-1) \ldots 7.5.3.1}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots \ldots p\,(p+1)} \ldots \ldots (5)$$

Wenn man ebenso in die nach (2) gültige Formel

$$(2p+3)\overset{2n-1}{A}_{p+1} = \overset{2n}{A}_{p+1} - \{4n - 2(p+2)\}\overset{2n-1}{A}_{p}$$

die Werthe von $\overset{2n}{A}_{p+1}$ und $\overset{2n-1}{A}_{p}$ einsetzt und in dem hervorgehenden Ausdrucke $n+1$ mit n vertauscht, so erhält man

$$\overset{2n+1}{A}_{p+1} = 2^{p+1} \cdot \frac{n(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-p)^2(n-p-1)(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2\ldots\ldots(2p+5)^2.(2p+3)(2p+1)\ldots7.5.3.1}{1.2.3\ldots\ldots p\,(p+1)} \ldots\ldots (6)$$

Die Ausdrücke (5) und (6) sind aber in $p+1$ so geb
wie die entsprechenden (3) und (4) in p, und hiernach wär
aufgestellte Bildungsgesetz richtig, wenn wir nur noch die ei
Voraussetzung, die wir uns bisher erlaubt haben, als zul
nachweisen können. Dieselbe betraf aber das Bildungsgeset
Coefficienten A_0, mit deren Hülfe wir die anderen ableiteten.
können uns aber von der Richtigkeit unserer Annahme übe
Coefficienten A_0 auf folgende Weise vergewissern. Die Coeffi
ten $\overset{2n}{A}_{n-1}$ und $\overset{2n+1}{A}_{n-1}$ lassen sich nämlich, ohne auf die Coeffi
ten A_0 zurückzugehen, unmittelbar aus den Recursionsformeln
leiten, denn nach denselben hat man

$$\overset{2n+1}{A}_{n-1} = (2n+1)\overset{2n}{A}_{n-1} = (2n+1)2n\overset{2n-1}{A}_{n-2} = (2n+1)\,2n(2n-1)\overset{2n-2}{A}_{n-2} = \text{u. s. w.}$$

$$= (2n+1)\,2n(2n-1)\,(2n-2)\ldots5.4.3$$

$$= (2n+1)\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots\ldots7.5.3.\,2n(2n-2)\,(2n-4)\ldots.8.6.4$$

$$= 2^{n-1}(2n+1)\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots7.5.3.\,n(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots4.3.2.$$

Setzt man aber in den obigen Werth von $\overset{2n+1}{A}_p$ die Zahl $p=n$

so erhält man den eben entwickelten Ausdruck. Aus dieser Uebereinstimmung folgt daher auch die Richtigkeit des für $\overset{2n+1}{A}_0$ angenommenen Werthes.

Wir knüpfen hieran noch eine Bemerkung über die Summe der Coefficienten in der Entwickelung der verschiedenen Differentiale. Addirt man nämlich die Gleichungen (1) und ebenso die Gleichungen (2), so erhält man

$$\overset{2n}{A}_0+\overset{2n}{A}_1+\overset{2n}{A}_2+\ldots\ldots+\overset{2n}{A}_{n-1}=(4n-3)\,\{\overset{2n-1}{A}_0+\overset{2n-1}{A}_1+\ldots\ldots+\overset{2n-1}{A}_{n-2}\}$$

und

$$\overset{2n+1}{A}_0+\overset{2n+1}{A}_1+\overset{2n+1}{A}_2+\ldots\ldots+\overset{2n+1}{A}_{n-1}=(4n-1)\,\{\overset{2n}{A}_0+\overset{2n}{A}_1+\ldots\ldots+\overset{2n}{A}_{n-1}\},$$

oder kürzer

$$\Sigma\overset{2n}{A}=(4n-3)\Sigma\overset{2n-1}{A},\quad \Sigma\overset{2n+1}{A}=(4n-1)\Sigma\overset{2n}{A},$$

und hiernach

$$\Sigma\overset{m}{A}=(2m-3)\,(2m-5)\,(2m-7)\ldots\ldots5\,.\,3\,.\,1.$$

II.

Zwei Eigenschaften der Kegelfläche zweiten Grades.

A.

Die allgemeine Gleichung der Kegelfläche zweiten Grades, deren Spitze im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, ist bekanntlich folgende:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0\,\ldots\ldots\;(1)$$

Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und wollen die Coefficienten der Gleichung (1) durch die Bedingung bestimmen, dass die Kegelfläche durch die drei Axen und die beiden Geraden geht, denen die Gleichungen

$$\left.\begin{matrix}x=az\\ y=bz\end{matrix}\right\}(2),\qquad \left.\begin{matrix}x=a'z\\ y=b'z\end{matrix}\right\}(3)$$

zugehören. Setzt man nun in (1) $z=0$, um die Gleichung der Durchschnittscurve des Kegels mit der Coordinatenebene (xy) zu erhalten, so ergiebt sich die Gleichung

$$Ax^2+A'y^2+2B''xy=0,\;(4)$$

die sich, wegen der Natur der Kegelflächen, im Allgemeinen in zwei reelle Factoren vom ersten Grade zerlegen lassen muss. In unserem besonderen Falle sollen aber die Axen der x und y die Durchschnittslinien sein; diesen Axen entsprechen aber respective die Gleichungen $y=0$ und $x=0$, so wie ihrem Systeme die Gleichung

$$xy=0 \quad (5)$$

zugehört. Man sieht also, dass in der Gleichung (4) die Coefficienten A und $A'=0$ werden müssen, wenn dieselbe das System der Axen der x und y darstellen soll. Eben so zeigt man, dass auch A'' verschwinden muss, und folglich die Gleichung (1) die einfachere Form

$$Byz+B'xz+B''xy=0 \quad (6)$$

annimmt. Zur Bestimmung der drei Coefficienten B, B', B'' hat man die Gleichungen (2) und (3). Da die durch dieselben bestimmten Geraden ganz in der Kegelfläche (6) liegen sollen, so muss die Gleichung (6) identisch werden, wenn man darin die Werthe von $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$ aus (2) und (3) substituirt. Dies liefert die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} bB+aB'+abB''=0 \\ b'B+a'B'+a'b'B''=0 \end{aligned}\right\}(7)$$

aus denen sich

$$\frac{B'}{B}=\frac{a-a'}{b'-b}\cdot\frac{bb'}{aa'},\quad \frac{B''}{B}=\frac{a'b-ab'}{aa'(b'-b)}$$

ergiebt, so dass also die gesuchte Gleichung unserer Kegelfläche folgende ist:

$$aa'(b'-b)yz+bb'(a-a')xz+(a'b-ab')xy=0. \quad (8)$$

Wir wollen nun ferner annehmen, dass die beiden Linien (2) und (3) und eine dritte, deren Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x=a''z \\ y=b''z \end{aligned}\right\}(9)$$

ist, ein System rechtwinkliger Axen bilden, so dass also zwischen den Constanten ihrer Gleichungen die Relationen

$$aa'+bb'+1=0,$$
$$aa''+bb''+1=0,$$
$$a'a''+b'b''+1=0$$

stattfinden. Hieraus zieht man

$$b''(b'-b)=a''(a-a'),$$
$$b''(a'b-ab')=a-a',$$

so dass also die Gleichung (8) in die folgende

$$aa'a''yz + bb'b''xz + xy = 0 \quad (11)$$

übergeht. Bezeichnet man nun den Werth, welchen die linke Seite dieser Gleichung durch Substitution der aus (9) gezogenen Werthe von x und y annimmt, mit S, so wird

$$S = z^2 a''b''(aa' + bb' + 1),$$

und mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (10)

$$S = 0,$$

d. h. auch die Gerade (9) liegt auf der Kegelfläche (11). Wir hätten dies Ergebniss auch daraus ableiten können, dass die Gleichung (11) in Beziehung auf die Constanten der Gleichungen (2), (3) und (9) symmetrisch ist. Wir haben also folgendes Theorem bewiesen:

Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so liegen allemal die sechs Coordinatenaxen in irgend einer Kegelfläche zweiten Grades.

B.

Wir wollen nun wieder von der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, die einen Mittelpunkt haben, ausgehen, indem wir uns den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt gelegt denken, also von der Gleichung

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''yx = 0 \quad (12)$$

und zunächst zu ihrer Specialisirung die Bedingung machen, dass dieselbe eine Kegelfläche darstelle, welche die drei Coordinatenebenen berührt. Es muss sich also für die gemeinschaftlichen Punkte dieser Ebenen mit denen der Kegelfläche eine lineäre Gleichung ergeben. Verbinden wir nun die Gleichung der Coordinatenebene der (yz), nämlich die Gleichung $x = 0$, mit der Gleichung (12), so erhalten wir die Gleichung

$$A'y^2 + A''z^2 + 2Byz = 0.$$

Soll dieselbe, wie in unserem Falle verlangt wird, eine Gerade, oder vielmehr zwei zusammenfallende Gerade darstellen, so muss bekanntlich zwischen den Coefficienten die Relation

$$B = \pm\sqrt{A'A''}$$

stattfinden. Auf ähnliche Weise erhält man aus den Bedingungen, dass die Kegelfläche die beiden anderen Coordinatenebenen berühre, die Relationen

$$B' = \pm\sqrt{AA''},\ B'' = \pm\sqrt{AA'},$$

wonach also die Gleichung (12) die Form

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2\pm2\sqrt{AA'}xy\pm2\sqrt{AA''}xz\pm2\sqrt{A'A''}yz=0 \quad (13)$$

annimmt. Aber welche Combination der Zeichen ist zu wählen? Zunächst erhellt, dass A, A', A'' alle von demselben Zeichen sein müssen; nehmen wir nun an, dieselben seien positiv, so muss man in den drei letzten Gliedern das negative Zeichen nehmen, weil bei jeder anderen Zusammenstellung die Gleichung (13) sich in ein Product zweier linearen Factoren zerlegen liesse, und dieselbe dann also keine Kegelfläche, sondern ein System zweier Ebenen darstellen würde. Hiernach wird nun unsere Gleichung, wenn wir noch statt der Constanten A, A', A'' ihre Quadrate einführen, folgende sein:

$$A^2x^2+A'^2y^2+A''^2z^2-2AA'xy-2AA''xz-2A'A''yz=0. \quad (14)$$

Zur vollständigen Bestimmung der Kegelfläche fügen wir die fernere Bedingung hinzu, dass die beiden Ebenen, deren Gleichungen

$$ax+by+cz=0, \quad (15)$$

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad (16)$$

sind, den Kegel berühren. Eliminiren wir aus den Gleichungen (14) und (15) die Variable x, so erhalten wir für die Projection des Durchschnitts auf die Ebene der (yz) die Gleichung

$$y^2(bA+aA')^2+2yz(bcA^2+acAA'+abAA''-a^2A'A'') \\ +z^2(cA+aA'')^2=0.$$

Soll dieselbe nun eine einzige Gerade darstellen — also die Ebene (15) eine Tangentenebene sein — so muss

$$bcA^2+acAA'+abAA''-a^2A'A''=\pm(bA+aA')(cA+aA'')$$

sein; das obere Zeichen rechts ist nicht zu gebrauchen, denn man kommt dadurch auf die Bedingungsgleichung

$$2a^2A'A''=0,$$

welche $a^2=0$ geben würde, was im Allgemeinen nicht zulässig ist. Mit Benutzung des unteren Zeichens erhalten wir dagegen die Relation

$$bcA+acA'+abA''=0 \quad (17)$$

und auf ähnliche Weise die andere

$$b_1c_1A+a_1c_1A'+a_1b_1A''=0. \quad (18)$$

Eliminirt man jetzt aus den Gleichungen (14), (17) und (18) die Grössen A, A', A'', so ergiebt sich

$$
\left.\begin{aligned}
&a^2a_1{}^2(bc_1-b_1c)^2x^2+b^2b_1{}^2(a_1c-ac_1)^2y^2+c^2c_1{}^2(ab_1-a_1b)^2z^2\\
&\qquad -2aa_1bb_1(bc_1-b_1c)\,(a_1c-ac_1)xy\\
&\qquad -2aa_1cc_1(ab_1-a_1b)\,(bc_1-b_1c)xz\\
&\qquad -2bb_1cc_1(ab_1-a_1b)\,(a_1c-ac_1)yz=0
\end{aligned}\right\}(19)
$$

Nehmen wir nun an, dass die beiden Ebenen (15) und (16) auf einander und auch auf der Ebene

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \quad (20)$$

senkrecht stehen, d. h. machen wir die Bedingung, dass

$$
\left.\begin{aligned}
aa_1+bb_1+cc_1&=0,\\
aa_2+bb_2+cc_2&=0,\\
a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&=0
\end{aligned}\right\}(21)
$$

sei, so lässt sich die Gleichung (19) unter einer eleganteren Form darstellen. Setzen wir noch, was erlaubt ist, $a=a_1=a_2=1$, so erhalten wir aus (21)

$$\frac{b-b_1}{c-c_1}=-\frac{c_2}{b_2},\quad \frac{bc_1-b_1c}{c_1-c}=-\frac{1}{b_2},$$

und hiernach für die Gleichung (19) die folgende

$$
\begin{aligned}
x^2+b^2b_1{}^2b_2{}^2y^2+c^2c_1{}^2c_2{}^2z^2-2bb_1b_2xy-2cc_1c_2xz\\
-2bb_1b_2cc_1c_2yz=0.
\end{aligned}
$$

Da dieselbe in Beziehung auf b, b_1, b_2, c, c_1, c_2 symmetrisch ist, so steht die durch sie ausgedrückte Kegelfläche zu den drei Ebenen (15), (16) und (20) in derselben Beziehung, d. h. sie berührt sie alle drei. Wir sind also zu dem Satze gekommen:

Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so berühren die sechs Coordinatenebenen allemal irgend eine Kegelfläche zweiten Grades.

Vergl. Steiner: Die Abhängigkeit geometrischer Gestalten. Thl. I. S. 313.

X.

Beweis der Gleichung

$$\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}}=(-1)^{i-1}.1.3.5\ldots(2i-1)\frac{\sin ix}{i}$$

für $z=\cos x$.

Nach einem Aufsatze des Herren Liouville frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Die obige höchst merkwürdige Gleichung ist bekanntlich von Jacobi gefunden und in Crelle's Journal. Thl. XV. S. 3. zuerst mitgetheilt und bewiesen worden. In seinem Journal T. VI. p. 69. hat Liouville zwei neue Beweise für dieselbe gegeben, von denen mir besonders der zweite bemerkenswerth zu sein scheint, den ich daher, aber auf eine andere Art dargestellt, im Folgenden mittheilen werde.

Der Kürze wegen wollen wir

$$1)\ \Theta_i=\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}},$$

also

$$2)\ \Theta_{i+1}=\frac{d^i.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^i}$$

setzen. Weil nun

$$(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}=(1-z^2)\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}$$

ist, so erhält man nach der aus der Differentialrechnung bekannten Gleichung

$$\frac{d^n.pq}{dz^n}=p\frac{d^nq}{dz^n}+\frac{n}{1}.\frac{dp}{dz}.\frac{d^{n-1}q}{dz^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{d^2p}{dz^2}.\frac{d^{n-2}q}{dz^{n-2}}+\ldots.$$

alle Schwierigkeit die Gleichung

$$\frac{d^i\,.\,(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^i}=(1-z^2)\,\frac{d^i\,.\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^i}$$
$$-2iz\,\frac{d^{i-1}\,.\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}}$$
$$-\,i(i-1)\,\frac{d^{i-2}\,.\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-2}}.$$

Weil nun aber offenbar

$$\frac{d^{i-2}\,.\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-2}}=\int_1^z\frac{d^{i-1}\,.\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}}\,dz$$

ist, so lässt sich mittelst der oben eingeführten Symbole die vorhergehende Gleichung unter der folgenden Form darstellen:

$$3)\ \Theta_{i+1}=(1-z^2)\,\frac{d\Theta_i}{dz}-2iz\Theta_i-i(i-1)\int_1^z\Theta_i dz.$$

Für $i=1$ ist nach 1)

$$\Theta_1=(1-z^2)^{\frac{1}{2}},$$

d. i., wenn wir $z=\cos x$ setzen,

$$4)\ \Theta_1=1\,.\,\frac{\sin x}{1}.$$

Ferner ist nach 3) für $i=1$

$$\Theta_2=(1-z^2)\frac{d\Theta_1}{dz}-2z\Theta_1.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\frac{d\Theta_1}{dx}=\cos x,\ \frac{dz}{dx}=-\sin x$$

ist, so ist

$$\Theta_2=-\sin x\cos x-2\sin x\cos x,$$

d. i.

$$\Theta_2=-3\sin x\cos x,$$

oder, weil bekanntlich

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$$

ist,

$$5)\ \Theta_2=-1\,.\,3\,\frac{\sin 2x}{2}.$$

Für $i=2$ ist nach 3)

$$\Theta_3=(1-z^2)\,\frac{d\Theta_2}{dz}-4z\Theta_2-1\,.\,2\int_1^z\Theta_2 dz.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\Theta_2}{dx} = -3\cos 2x,\ \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

also

$$\frac{d\Theta_2}{dz} = 3\,\frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

Ferner ist

$$\int_1^z \Theta_2 dz = \tfrac{3}{2}\int_0^x \sin 2x \sin x\, dx,$$

und folglich, weil

$$\sin 2x \sin x = \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 3x$$

ist,

$$\int_1^z \Theta_2 dz = \tfrac{3}{4}\sin x - \tfrac{1}{4}\sin 3x.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned}\Theta_3 &= 3\sin x \cos 2x + 6\cos x \sin 2x \\ &\qquad - \tfrac{3}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 3x \\ &= 3\sin 3x + 3\cos x \sin 2x - \tfrac{3}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 3x \\ &= \tfrac{7}{2}\sin 3x + \tfrac{3}{2}\sin 3x + \tfrac{3}{2}\sin x - \tfrac{3}{2}\sin x \\ &= 5\sin 3x,\end{aligned}$$

und folglich

$$6)\ \Theta_3 = 1\,.\,3\,.\,5\,\frac{\sin 3x}{3}.$$

Für $i = 3$ ist nach 3)

$$\Theta_4 = (1 - z^2)\frac{d\Theta_3}{dz} - 6z\Theta_3 - 2\,.\,3\int_1^z \Theta_3 dz.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\Theta_3}{dx} = 15\cos 3x,\ \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

also

$$\frac{d\Theta_3}{dx} = -\frac{15\cos 3x}{\sin x}.$$

Ferner ist

$$\int_1^z \Theta_3 dz = -5\int_0^x \sin 3x \sin x\, dx,$$

und folglich, weil

$$\sin 3x \sin x = \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x$$

ist,

$$\int_1^z \Theta_3 dz = -\tfrac{5}{4}\sin 2x + \tfrac{5}{8}\sin 4x.$$

ist nach dem Obigen

$$\Theta_4 = -15 \sin x \cos 3x - 30 \cos x \sin 3x$$
$$+\frac{15}{2} \sin 2x - \frac{15}{4} \sin 4x$$
$$= -15 \sin 4x - 15 \cos x \sin 3x + \frac{15}{2} \sin 2x - \frac{15}{4} \sin 4x$$
$$= -\frac{15 \cdot 5}{4} \sin 4x - \frac{15}{2} \sin 4x - \frac{15}{2} \sin 2x + \frac{15}{2} \sin 2x$$
$$= -\frac{15 \cdot 7}{4} \sin 4x,$$

und folglich

$$7)\ \Theta_4 = -1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \frac{\sin 4x}{4}.$$

Wir wollen nun überhaupt

$$8)\ \Theta_i = k_i \frac{\sin ix}{i}$$

setzen, so ist

$$\frac{d\Theta_i}{dx} = k_i \cos ix,$$

und folglich, weil

$$\frac{dz}{dx} = -\sin x$$

ist,

$$\frac{d\Theta_i}{dz} = -\frac{k_i \cos ix}{\sin x}.$$

Ferner ist

$$\int_1^z \Theta_i dz = -\frac{k_i}{i} \int_0^x \sin ix \sin x \, dx,$$

also, weil

$$\sin ix \sin x = \tfrac{1}{2} \cos (i-1)x - \tfrac{1}{2} \cos (i+1)x$$

ist,

$$\int_1^z \Theta_i dz = -\frac{k_i}{2i} \int_0^x \cos (i-1)x \, dx + \frac{k_i}{2i} \int_0^x \cos (i+1)x \, dx,$$

d. i.

$$\int_1^z \Theta_i dz = -\frac{k_i}{2i(i-1)} \sin (i-1)x + \frac{k_i}{2i(i+1)} \sin (i+1)x.$$

Weil nun nach 3)

$$\Theta_{i+1} = (1-z^2) \frac{d\Theta_i}{dz} - 2iz\Theta_i - i(i-1) \int_1^z \Theta_i dz$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Theta_{i+1} = -k_i \sin x \cos ix - 2k_i \cos x \sin ix$$
$$+\frac{k_i}{2} \sin (i-1)x - \frac{(i-1)k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x$$

$$= - k_i \sin (i+1)x - k_i \cos x \sin ix$$

$$+ \frac{k_i}{2} \sin (i-1)x - \frac{(i-1)k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x$$

$$= - k_i \, . \sin (i+1)x - \frac{k_i}{2} \sin (i+1)x - \frac{k_i}{2} \sin (i-1)x$$

$$+ \frac{k_i}{2} \sin (i-1)x - \frac{(i-1)k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x$$

$$= - \frac{\{2(i+1)+(i+1)+(i-1)\}k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x,$$

also

$$9) \quad \Theta_{i+1} = -(2i+1)k_i \, \frac{\sin (i+1)x}{i+1}.$$

Setzen wir nun analog mit 8)

$$10) \quad \Theta_{i+1} = k_{i+1} \, \frac{\sin (i+1)x}{i+1},$$

so ist, wie aus der Vergleichung der Gleichungen 8) und 9) auf der Stelle hervorgeht,

$$11) \quad k_{i+1} = (-1) \, . \, (2i+1)k_i.$$

Weil nun nach 4)

$$\Theta_1 = 1 \, . \, \frac{\sin x}{1},$$

und folglich

$$k_1 = 1$$

ist, so erhält man mittelst der Gleichung 11) nach und nach:

$$k_1 = (-1)^0 \, . \, 1,$$
$$k_2 = (-1)^1 \, . \, 1 \, . \, 3,$$
$$k_3 = (-1)^2 \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, 5,$$
$$k_4 = (-1)^3 \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7,$$
$$k_5 = (-1)^4 \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \, . \, 9,$$

u. s. w.

also offenbar allgemein

$$12) \quad k_i = (-1)^{i-1} \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \ldots (2i-1).$$

Folglich ist nach 8)

$$13) \quad \Theta_i = (-1)^{i-1} \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \ldots (2i-1) \, \frac{\sin ix}{i},$$

d. i. nach 1)

$$14) \quad \frac{d^{i-1} \, . \, (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1} \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \ldots (2i-1) \, \frac{\sin ix}{i}$$

für $z = \cos x$, welches die zu beweisende Formel ist.

Aus dieser Formel hat Jacobi eine merkwürdige Transformation eines bestimmten Integrals abgeleitet, welche wir, obgleich dieselbe längst bekannt ist, dem Obigen noch in der Kürze beifü-

gen wollen. Wenn nämlich eine Function w von z so beschaffen ist, dass dieselbe nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten bis zum $(i-1)$sten für $z=a$ und für $z=b$ verschwindet, so kann man durch theilweise Integration leicht zeigen, dass immer

$$\int_a^b w\frac{d^iv}{dz^i}dz=(-1)^i\int_a^b v\frac{d^iw}{dz^i}dz$$

ist. Setzen wir nun

$$v=f(z),\quad w=(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}$$

und $a=-1$, $b=+1$; so ist

$$\int_{-1}^{+1}f^{(i)}(z)\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}dz=(-1)^i\int_{-1}^{+1}f(z)\,\frac{d^i.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^i}dz.$$

Aus 14) folgt durch Differentiation nach x

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}}\right\}=(-1)^{i-1}.1.3.5\ldots(2i-1)\cos ix,$$

also

$$\frac{d^i.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^i}dz=(-1)^{i-1}.1.3.5\ldots(2i-1)\cos ix\,dx.$$

Da nun

$$z=\cos x,\quad dz=-\sin x\,dx$$

ist, so ist

$$15)\int_0^\pi f^{(i)}(\cos x)\sin x^{2i}\,dx$$

$$=1.3.5.7\ldots(2i-1)\int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx.$$

Dies ist die von Jacobi gefundene Transformation. Die Function $f(z)$ und ihre Differentialquotienten bis zum $i$ten müssen zwischen den Gränzen $z=-1$ und $z=+1$ stetig sein.

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Man soll die folgenden goniometrischen Relationen beweisen. Wenn

$$A=\sin\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)$$
$$=-2\sin\alpha\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

$$B = \sin\beta\,(\cos\gamma - \cos\alpha)$$
$$= -2\sin\beta\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$C = \sin\gamma\,(\cos\alpha - \cos\beta)$$
$$= -2\sin\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ist, so ist jederzeit

$$A+B+C = -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$B+C-A = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$A+C-B = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$A+B-C = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

Wenn

$$A' = \cos\alpha\,(\sin\beta - \sin\gamma)$$
$$= 2\cos\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$
$$B' = \cos\beta\,(\sin\gamma - \sin\alpha)$$
$$= 2\cos\beta\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$C' = \cos\gamma\,(\sin\alpha - \sin\beta)$$
$$= 2\cos\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ist, so ist jederzeit

$$A'+B'+C' = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$B'+C'-A' = -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$A'+C'-B' = -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$A'+B'-C' = -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

Aus der Gleichung

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = 0$$

lässt sich immer die Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l} (a+b+c)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) \\ -(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{array}\right\}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$=\left\{\begin{array}{l} (a+c-b)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) \\ -(b+c-a)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{array}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

d. i. die Gleichung

$$N\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = M\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

wo die Bedeutung der Symbole M und N von selbst erhellet, also die Gleichung

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{M}{N}$$

ableiten.

Aus der Gleichung

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0$$

lässt sich immer die Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\\-(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{array}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$=-\left\{\begin{array}{l}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\\-(b+c-a)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{array}\right\}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

d. i. die Gleichung

$$N\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=-M\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

folglich die Gleichung

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=-\frac{M}{N}$$

ableiten. G.

Man soll den folgenden Satz beweisen:

Wenn in Taf. I. Fig. 10. die Linie AE der $n$te Theil der Linie AB ist, über AB das Quadrat $ABCD$ beschrieben, dessen Diagonale AD und die Linie CE gezogen, und durch den Durchschnittspunkt G dieser beiden Linien mit den Seiten AC und BD des Quadrats $ABCD$ die Parallele FH gezogen wird, so ist immer AF der $(n+1)$ste Theil der Linie AB.

Aufgabe vom Herausgeber.

Wenn

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, und $x=\operatorname{tang}\varphi$ gesetzt wird, wobei man φ absolut nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, aber positiv oder negativ nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist, so ist $y=\sin\varphi$, und durch successive Differentiation in Bezug auf x erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=1\,.\cos\varphi^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-1\,.\,3\,.\cos\varphi^4\sin\varphi,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\quad 1\,.\,3\,.\,5\cos\varphi^5\left(\sin\varphi^2-\frac{1}{5}\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=-1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\cos\varphi^6\sin\varphi\left(\sin\varphi^2-\frac{3}{7}\right),$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=\quad 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\cos\varphi^7\left(\sin\varphi^4-\frac{2}{3}\sin\varphi^2+\frac{1}{21}\right),$$

$$\frac{d^6y}{dx^6}=-1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\cos\varphi^8\sin\varphi\left(\sin\varphi^4-\frac{10}{11}\sin\varphi^2+\frac{5}{33}\right).$$

Man soll das allgemeine Gesetz dieser Ausdrücke entwickeln.

XII.

Miscellen.

Der bekannte Satz, dass die drei Hülfslinien, welche bei dem euclidischen Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gezogen werden, sich jederzeit in einem und demselben Punkte schneiden, wird, so viel mir bekannt ist, gewöhnlich mit Hülfe der Lehre von den Proportionen bewiesen. Ich weiss nicht, ob der folgende Beweis dieses Satzes, welcher wir bereits vor längerer Zeit von einem meiner frühern Zuhörer mitgetheilt wurde, schon bekannt ist. Jedenfalls scheint derselbe aber nicht so allgemein bekannt zu sein, wie er verdient, und mag daher im Folgenden eine Stelle finden.

In Taf. I. Fig. 11. verlängere man die Linien DE und HK bis zu ihrem Durchschnittspunkte N, und ziehe die Linien BN und CN, so erhält man das Dreieck BCN, von welchem sich beweisen lässt, dass die drei bei dem Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gezogenen Hülfslinien AL, BK, CE durch dessen Spitzen gehen und auf seinen diesen Spitzen gegenüberliegenden Seiten senkrecht stehen, sich also nach einem der bekannten Sätze von den vier merkwürdigen Punkten des Dreiecks in einem und demselben Punkten schneiden müssen.

Zieht man nämlich zuvörderst die Linie AN, so erhellet sehr leicht die Congruenz der beiden Dreiecke ABC und AHN. Nun sind aber die rechtwinkligen Dreiecke ABC und ABO bekanntlich gleichwinklig. Also sind auch die Dreiecke AHN und ABO gleichwinklig, folglich die Winkel HAN und BAO einander gleich, woraus sich ergiebt, dass NAL eine gerade Linie ist, also die Linie AL durch die Spitze N des Dreiecks BCN geht, und auf dessen Seite BC senkrecht steht.

Ferner erhellet leicht die Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke BHK und CNK, woraus sich die Gleichheit der Winkel HBK und CNK ergiebt. Nun sind aber als Wechselwinkel die Winkel HBK und CKP einander gleich. Also sind auch die Winkel CNK und CKP einander gleich, und daher die Dreiecke CNK und CKP offenbar gleichwinklig, folglich die Winkel CKN und CPK einander gleich, also CPK so wie CKN ein rechter Winkel. Daher steht die durch B gehende Linie BK auf CN senkrecht.

Ganz eben so zeigt man, dass die durch C gehende Linie CE auf BN senkrecht steht, und der Satz ist also nach dem im Eingange Bemerkten nun offenbar vollständig bewiesen.

Mir war der Beweis, als er mir mitgetheilt wurde, neu. Ob er dies auch Andern sein wird, lasse ich dahin gestellt sein.

G.

XIII.

Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale.

Von

dem Herausgeber.

Zweite Abhandlung.

(Fortsetzung von Thl. II. Nr. XXV.)

I.

In dem Journal de Mathématiques publié par J. Liouville. T. VIII. p. 110. Mars 1843. hat Herr J. Bertrand das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

auf die folgende bemerkenswerthe Weise entwickelt.

Es sei, indem man bei der Integration die Grösse ω als constant betrachtet,

$$\int_a^x f(x,\,\omega)\,dx = f_1(x,\,\omega)$$

und

$$\int_a^x \frac{d_\omega f(x,\,\omega)}{d\omega}\,dx = f_2(x,\,\omega);$$

so ist

$$\frac{d_x f_1(x,\,\omega)}{dx} = f(x,\,\omega),$$

und nach bekannten Principien der Lehre von den bestimmten Integralen (Archiv. Thl. II. S. 277)

$$\frac{d_\omega f_1(x,\omega)}{d\omega}$$

$$=\frac{d\omega}{d\omega}\int_a^x f(x,\omega)\,dx=\int_a^x\frac{d_\omega f(x,\omega)}{d\omega}\,dx=f_2(x,\omega).$$

Betrachtet man nun aber ω als eine Function von x, so ist nach bekannten Principien der Differentialrechnung

$$\frac{df_1(x,\omega)}{dx}=\frac{d_x f_1(x,\omega)}{dx}+\frac{d_\omega f_1(x,\omega)}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{df_1(x,\omega)}{dx}=f(x,\omega)+f_2(x,\omega)\frac{d\omega}{dx}$$

oder

$$df_1(x,\omega)=f(x,\omega)dx+f_2(x,\omega)\frac{d\omega}{dx}dx,$$

und folglich

$$\int_a^x df_1(x,\omega)=\int_a^x f(x,\omega)dx+\int_a^x f_2(x,\omega)\frac{d\omega}{dx}dx,$$

also, wie leicht erhellen wird,

$$f_1(x,\omega)=\int_a^x f(x,\omega)dx+\int_a^x f_2(x,\omega)\frac{d\omega}{dx}dx+C.$$

Bezeichnet man nun die Werthe, welche

$$f(x,\omega),\ f_1(x,\omega),\ f_2(x,\omega)$$

für $\omega=x$ erhalten, respective durch

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x);$$

so ist

$$\varphi_1(x)=\int_a^x\varphi(x)dx+\int_a^x\varphi_2(x)dx+C.$$

Nach dem Obigen wird $\varphi_1(x)$ erhalten, wenn man, ω als constant betrachtend,

$$\int_a^x f(x,\omega)dx$$

entwickelt, und nach der Integration $\omega=x$ setzt, woraus sich auf der Stelle ergiebt, dass

$$\varphi_1(x)=\int_a^x f(\omega,x)d\omega,$$

wo bei der Integration x als constant behandelt wird, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_a^x f(\omega,\, x)d\omega = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x \varphi_2(x)dx + C$$

ist. Weil nun aber die drei in dieser Gleichung vorkommenden Integrale für $x=a$ offenbar verschwinden, so ist $C=0$, und folglich

$$\int_a^x f(\omega,\, x)d\omega = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x \varphi_2(x)dx.$$

Von dieser allgemeinen Gleichung lässt sich die folgende Anwendung machen. Man setze

$$f(x,\, \omega) = \frac{l(1+\omega x)}{1+x^2},$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{d_\omega f(x,\, \omega)}{d\omega} = \frac{x}{(1+\omega x)\,(1+x^2)},$$

und folglich für $a=0$ nach dem Obigen

$$f_2(x,\, \omega) = \int_0^x \frac{xdx}{(1+\omega x)\,(1+x^2)},$$

wo bei der Integration ω als constant betrachtet wird. Zerlegt man, um dieses Integral zu finden, den Bruch

$$\frac{x}{(1+\omega x)\,(1+x^2)}$$

auf bekannte Weise in Partialbrüche, so erhält man:

$$\frac{x}{(1+\omega x)\,(1+x^2)}$$

$$= -\frac{\omega}{(1+\omega^2)\,(1+\omega x)} + \frac{x}{(1+\omega^2)\,(1+x^2)} + \frac{\omega}{(1+\omega^2)\,(1+x^2)},$$

folglich

$$f_2(x,\, \omega) = \int_0^x \frac{xdx}{(1+\omega x)\,(1+x^2)}$$

$$= -\frac{l(1+\omega x)}{1+\omega^2} + \frac{l(1+x^2)}{2(1+\omega^2)} + \frac{\omega \operatorname{Arctang} x}{1+\omega^2},$$

wo Arctang x den der Tangente x zugehörenden Bogen bezeichnen soll, welcher den kleinsten absoluten Werth hat. Also ist nach dem Obigen

$$\varphi(x) = \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}$$

und

$$\varphi_2(x) = -\frac{l(1+x^2)}{2(1+x^2)} + \frac{x \operatorname{Arctang} x}{1+x^2},$$

da $\varphi(x)$ und $\varphi_2(x)$ aus $f(x)$ und $f_2(x)$ erhalten werden, wenn man $\omega = x$ setzt. Ferner ist

$$f(\omega, x) = \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2},$$

und daher nach der oben gefundenen Hauptgleichung

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + \int_0^x \frac{x \text{ Arctang } x}{1+x^2}\,dx.$$

Nun ist aber nach einer sehr bekannten Formel der Integralrechnung

$$\int \frac{x \text{ Arctang } x}{1+x^2}\,dx = \text{Arctang } x \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int d \text{ Arctang } x \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}l(1+x^2)\,.\,\text{Arctang } x - \tfrac{1}{2}\int \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + C,$$

und folglich

$$\int_0^x \frac{x \text{ Arctang } x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}l(1+x^2)\,.\,\text{Arctang } x - \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega = \tfrac{1}{2}l(1+x^2)\,.\,\text{Arctang } x.$$

Setzt man in diesem Integrale $x = 1$, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{8}\,l2,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,l2.$$

In einer Note zu dem Aufsatze des Herrn **Bertrand** bemerkt Herr **Liouville**, dass sich dieses bestimmte Integral auch aus dem oben gefundenen Ausdrucke von

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{(1+\omega x)\,(1+x^2)}$$

auf folgende Art ableiten lässt. Setzt man die obere Gränze dieses Integrals nämlich der Einheit gleich, so erhält man aus dem Obigen

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+\omega x)\,(1+x^2)} = -\frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2} + \frac{l2}{2(1+\omega^2)} + \frac{\pi}{4}\,.\,\frac{\omega}{1+\omega^2};$$

also

$$\int_0^1 d\omega \int_0^1 \frac{x dx}{(1+\omega x)(1+x^2)}$$

$$= -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2} d\omega + \tfrac{1}{2} l2 . \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\omega d\omega}{1+\omega^2},$$

nd folglich (Archiv. Thl. II. S. 282)

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x d\omega}{(1+x^2)(1+\omega x)}$$

$$= -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2} d\omega + \tfrac{1}{2} l2 . \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\omega d\omega}{1+\omega^2},$$

oder

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \int_0^1 \frac{x d\omega}{1+x\omega}$$

$$= -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2} d\omega + \tfrac{1}{2} l2 . \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\omega d\omega}{1+\omega^2},$$

also

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} dx = -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2} d\omega + \frac{\pi}{4} l2,$$

woraus man, weil natürlich

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2} d\omega$$

ist, auf der Stelle

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} l2$$

erhält, ganz wie oben.

Das von Herrn **Bertrand** gefundene allgemeinere Resultat

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2} d\omega = \tfrac{1}{2} l(1+x^2) . \text{Arctang } x,$$

so wie auch die allgemeine Gleichung

$$\int_a^x f(\omega, x) d\omega = \int_a^x \varphi(x) dx + \int_a^x \varphi_2(x) dx,$$

ist aber für sich wichtig und interessant, und letztere scheint uns zu verdienen, dass man weitere Anwendungen von derselben zu machen suche, wozu wir die Leser des Archivs uns wohl aufzufordern erlauben möchten.

Setzt man

$$f(x, \omega) = F(x)\, \psi(\omega),$$

so ist

$$\frac{d_\omega f(x, \omega)}{d\omega} = F(x)\, \psi'(\omega),$$

und folglich

$$f_2(x,\ \omega) = \psi'(\omega)\int_a^x F(x)dx.$$

Also ist

$$\varphi(x) = F(x)\ \psi(x)$$

und

$$\varphi_2(x) = \psi'(x)\int_a^x F(x)dx.$$

Ferner ist

$$f(\omega,\ x) = F(\omega)\ \psi(x),$$

und folglich

$$\int_a^x f(\omega,\ x)d\omega = \psi(x)\int_a^x F(\omega)d\omega.$$

Daher ist nach der obigen allgemeinen Gleichung

$$\psi(x)\int_a^x F(\omega)d\omega$$

$$= \int_a^x F(x)\,\psi(x)dx + \int_a^x \psi'(x)\int_a^x F(x)dx,$$

oder, was offenbar dasselbe ist,

$$\psi(x)\int_a^x F(x)dx$$

$$= \int_a^x F(x)\,\psi(x)dx + \int_a^x \psi'(x)\int_a^x F(x)dx;$$

und folglich

$$\int_a^x \psi(x)\ F(x)dx$$

$$= \psi(x)\int_a^x F(x)dx - \int_a^x \psi'(x)\int_a^x F(x)dx,$$

in welcher Gleichung offenbar das bekannte Princip der theilweisen Integration enthalten ist, so dass also die von Herrn Bertrand gefundene allgemeine Gleichung dieses Princip einschliesst, und als eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung desselben betrachtet werden muss.

II.

In dem Cambridge mathematical Journal. T. III. p. 168. No. XVI. November, 1842. hat ein ungenannter Correspondent aus der Gleichung

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

mehrere bestimmte Integrale auf sehr einfache Weise hergeleitet.

Um zuerst die obige allgemeine Gleichung zu beweisen, setze man $a-x=u$, so ist $dx=-du$, und folglich

$$f(a-x)dx = -f(u)du.$$

Weil nun für $x=0$, $x=a$ respective $u=a$, $u=0$ ist, so ist

$$\int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^0 f(u)du = -\int_a^0 f(x)dx,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\int_a^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$$

ist,

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx,$$

wie bewiesen werden sollte.

1) Man setze der Kürze wegen

$$U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x \,.\, dx,$$

so ist nach der vorhergehenden allgemeinen Gleichung, weil $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$ ist,

$$U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \cos x \,.\, dx,$$

und folglich

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log \sin x + \log \cos x)dx,$$

d. i.

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\sin x \cos x) \,.\, dx,$$

also, weil $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ist,

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log \sin 2x + \log \tfrac{1}{2})dx,$$

d. i.

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin 2x \,.\, dx + \tfrac{1}{2}\pi \log \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man jetzt $2x = v$, also $2dx = dv$, so ist

$$\log \sin 2x \,.\, dx = \tfrac{1}{2} \log \sin v \,.\, dv,$$

und folglich, weil für $x=0$, $x=\frac{1}{2}\pi$ respective $v=0$, $v=\pi$ ist,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin 2x\,.\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin v\,.\,dv=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin x\,.\,dx.$$

Also ist

$$2U=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin x\,.\,dx+\tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2}.$$

Nun ist aber, wie aus dem Hauptsatze der Theorie der bestimmten Integrale (Archiv. Thl. II. S. 275) auf der Stelle erhellet,

$$\int_0^{\pi}\log\sin x\,.\,dx=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin x\,.\,dx=2U.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$2U=U+\tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2},\quad U=\tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2},$$

d. i.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin x\,.\,dx=\tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2},$$

und nach dem Obigen auch

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\cos x\,.\,dx=\tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2}.$$

2) Man setze

$$U=\int_0^{\pi}x\log\sin x\,.\,dx.$$

Weil nach der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\int_0^{\pi}x^2\log\sin x\,.\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\log\sin(\pi-x)\,.\,dx,$$

d. i.

$$\int_0^{\pi}x^2\log\sin x\,.\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\log\sin x\,.\,dx$$

ist, so ist

$$0=\int_0^{\pi}(\pi^2-2\pi x)\log\sin x\,.\,dx$$

oder

$$0=\pi^2\int_0^{\pi}\log\sin x\,.\,dx-2\pi\int_0^{\pi}x\log\sin x\,.\,dx,$$

also

$$\int_0^{\pi}x\log\sin x\,.\,dx=\tfrac{1}{2}\pi\int_0^{\pi}\log\sin x\,.\,dx.$$

Nach 1. ist aber

$$\int_0^\pi \log \sin x \,.\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x \,.\, dx = \pi \log \tfrac{1}{2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\pi x \log \sin x \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\pi^2 \log \tfrac{1}{2}.$$

3) Man setze

$$U = \int_0^\pi x \sin x^n \, dx,$$

so ist nach der obigen allgemeinen Gleichung

$$U = \int_0^\pi (\pi - x) \sin (\pi - x)^n dx = \int_0^\pi (\pi - x) \sin x^n dx,$$

also

$$U = \pi \int_0^\pi \sin x^n dx - \int_0^\pi x \sin x^n dx$$

woraus sogleich

$$\int_0^\pi x \sin x^n dx = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\pi \sin x^n dx$$

erhalten wird, und hierdurch also das gesuchte Integral auf das bekannte Integral $\int \sin x^n dx$ zurückgeführt ist.

4) Man setze

$$U = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos x^2} \, dx,$$

so ist nach unserer obigen allgemeinen Gleichung

$$U = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos x^2} \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos x^2} \, dx - U,$$

folglich

$$U = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos x^2} \, dx$$

oder

$$U = -\tfrac{1}{2}\pi \int_0^\pi \frac{d \cos x}{1 + \cos x^2}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\int \frac{d \cos x}{1 + \cos x^2} = \text{Arctang} \cos x$$

ist, so ist

$$\int_0^\pi \frac{d \cos x}{1 + \cos x^2} = \text{Arctang} (-1) - \text{Arctang } 1,$$

also

$$\int_0^\pi \frac{d\cos x}{1+\cos x^2} = -\tfrac{1}{4}\pi,$$

und folglich nach dem Obigen $U=\tfrac{1}{4}\pi^2$, d. i.

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos x^2}dx = \tfrac{1}{4}\pi^2.$$

5) Man setze

$$F(a)=\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,.\,dx,$$

so ist nach unserer obigen allgemeinen Gleichung

$$F(a)=\int_0^\pi \log\{1-2a\cos(\pi-x)+a^2\}\,.\,dx,$$

d. i.

$$F(a)=\int_0^\pi \log(1+2a\cos x+a^2)\,.\,dx,$$

und folglich durch Addition, wie man leicht findet,

$$2F(a)=\int_0^\pi \log\{1+2a^2(1-2\cos x^2)+a^4\}\,.\,dx,$$

also

$$2F(a)=\int_0^\pi \log(1-2a^2\cos 2x+a^4)\,.\,dx.$$

Für $2x=v$ ist $2dx=dv$, und folglich

$$\int_0^\pi \log(1-2a^2\cos 2x+a^4)\,.\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(1-2a^2\cos v+a^4)\,.\,dv$$

oder

$$\int_0^\pi \log(1-2a^2\cos 2x+a^4)\,.\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(1-2a^2\cos x+a^4)\,.\,dx.$$

Nach dem Hauptsatze der Theorie der bestimmten Integral (Archiv. Thl. II. S. 275) ist aber offenbar

$$\int_0^{2\pi} \log(1-2a^2\cos x+a^4)\,.\,dx$$
$$=2\int_0^\pi \log(1-2a^2\cos x+a^4)\,.\,dx,$$

i. in der oben eingeführten Bezeichnung

$$\int_0^{2\pi} \log (1 - 2a^2 \cos x + a^4) \,.\, dx = 2F(a^2),$$

und folglich

$$\int_0^{\pi} \log (1 - 2a^2 \cos 2x + a^4) \,.\, dx = F(a^2).$$

Daher hat man nach dem Obigen die Gleichung

$$2F(a) = F(a^2) \text{ oder } F(a) = \tfrac{1}{2}F(a^2);$$

und ganz auf dieselbe Weise hat man jetzt also, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, überhaupt die folgende Reihe von Gleichungen:

$$2F(a) = F(a^2),$$
$$2F(a^2) = F(a^4),$$
$$2F(a^4) = F(a^8),$$
u. s. w.
$$2F(a^{2n}) = F(a^{4n});$$

aus denen sich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$2^{n+1}F(a) = F(a^{4n})$$

oder

$$F(a) = \frac{F(a^{4n})}{2^{n+1}}$$

ergiebt.

Ist nun $a < 1$, so ist für $n = \infty$ offenbar

$$\frac{F(a^{4n})}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{\pi} \log (1 - 2a^{4n} \cos x + a^{8n}) \,.\, dx = 0,$$

und daher für $a < 1$ überhaupt

$$F(a) = \int_0^{\pi} \log (1 - 2a \cos x + a^2) \,.\, dx = 0.$$

Weil nun

$$1 - 2a \cos x + a^2 = a^2(1 - \frac{2}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}),$$

also

$$\log (1 - 2a \cos x + a^2) = 2\log a + \log (1 - \frac{2}{a} \cos x + \frac{1}{a^2})$$

ist, so ist

$$\int_0^{\pi} \log (1 - 2a \cos x + a^2) \,.\, dx$$
$$= 2\pi \log a + \int_0^{\pi} \log (1 - \frac{2}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}) \,.\, dx.$$

Für $a > 1$ ist $\frac{1}{a} < 1$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\pi \log\left(1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\right) . dx = 0.$$

Also ist für $a > 1$

$$\int_0^\pi \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) . dx = 2\pi \log a.$$

Für $a = 1$ ist

$$1 - 2a\cos x + a^2 = 4\sin \tfrac{1}{2}x^2,$$

also

$$\log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) = \log 4 + 2\log\sin\tfrac{1}{2}x,$$

und folglich

$$\int_0^\pi \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) . dx$$
$$= \pi \log 4 + 2\int_0^\pi \log\sin\tfrac{1}{2}x . dx.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}x = v$, also $dx = 2dv$, so ist

$$\int_0^\pi \log\sin\tfrac{1}{2}x . dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin v . dv,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\pi \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) . dx$$
$$= \pi \log 4 + 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin x . dx,$$

also nach 1.

$$\int_0^\pi \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) . dx = \pi \log 4 + 2\pi \log \tfrac{1}{2},$$

woraus sich leicht auch in diesem Falle, nämlich für $a = 1$,

$$\int_0^\pi \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) . dx = 0$$

ergiebt.

Auch das hier angewandte an sich sehr einfache Princip verdient, wie es uns scheint, weiter verfolgt zu werden.

III.

In dem Journal de Mathématiques publié par J. Liou-

ville. T. V. p. 117 hat Herr Lobatto, Docteur ès-sciences à la Haye, die beiden Integrale

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \sqrt{1-a^2\sin\varphi^2},$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^2\, d\varphi \sqrt{1-a^2\sin\varphi^2},$$

wobei wir annehmen wollen, dass a positiv und nicht grösser als die Einheit ist, auf folgende Art entwickelt.

Man setze $\cos\varphi = x$, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{1-a^2}{a^2} = \mu^2$$

gesetzt wird, leicht

$$A_1 = a\int_0^1 dx\sqrt{\mu^2+x^2}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\int dx\sqrt{\mu^2+x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{\mu^2+x^2} + \tfrac{1}{2}\mu^2 l(x+\sqrt{\mu^2+x^2}),$$

also

$$\int_0^1 dx\sqrt{\mu^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu^2+1} + \tfrac{1}{2}\mu^2 l\,\frac{1+\sqrt{\mu^2+1}}{\mu},$$

und folglich nach dem Obigen

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1-a^2}{a}\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right).$$

Ferner ist

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(1-\cos\varphi^2)\, d\varphi\sqrt{1-a^2\sin\varphi^2},$$

also

$$A_2 = A_1 - a\int_0^1 x^2 dx\sqrt{\mu^2+x^2}.$$

Nun ist aber nach einer sehr bekannten Reductionsformel

$$\int x^2 dx\sqrt{\mu^2+x^2} = \frac{x(\mu^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \mu^2\int dx\sqrt{\mu^2+x^2}}{4},$$

und folglich

$$a\int_0^1 x^2 dx\sqrt{\mu^2+x^2} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\mu^2 A_1\right).$$

Nach gehöriger Substitution erhält man

$$A_3 = \frac{3a^2-1}{8a^2} + \frac{(1-a^2)(1+3a^2)}{8a^4} l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Es früge sich, ob sich diese Methode nicht vielleicht überhaupt auf das Integral

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi^n d\varphi \sqrt{1-a^2 \sin \varphi^2}$$

anwenden und ein allgemeines Gesetz auffinden liesse. Wenn a grösser als die Einheit ist, werden die oben für A_1 und A_3 gefundenen Ausdrücke imaginär, weshalb auch dieser Fall einer besondern Betrachtung zu unterwerfen sein dürfte.

Auf eine andere Art hat Herr Catalan die beiden obigen Integrale in dem genannten Journale T. IV. p. 335 entwickelt.

XIV.

Ueber ein Spiegelinstrument zum Einrichten gerader Linien auf dem Felde.

Von dem

Herrn Regierungs-Conducteur G. Berlin

zu Greifswald.

Das Einrichten gerader Linien auf dem Felde, namentlich die Bestimmung von Zwischenpunkten in denselben, ist bekanntlich an und für sich eine einfache und leichte Operation, die nur ein geübtes, nöthigen Falls ein bewaffnetes Auge erfordert; jedoch hat sie ihre Unbequemlichkeit darin, dass wenigstens ein Gehülfe dabei nothwendig ist, wodurch nicht allein mehr Zeitaufwand erfordert wird, sondern auch bei grösseren Linien, wo gegenseitiges Einrichten anzuwenden ist, eine Controlle des richtigen Standes der Absteckstäbe gemacht werden muss. Um die Gehülfen zu entbehren, sowie auch um einer Controllirung überhoben zu sein, lässt sich, wie ich glaube, mit Nutzen das in diesem Aufsatze näher beschriebene Spiegelinstrument anwenden, dessen praktische Brauchbarkeit einem jeden Geometer aus der blossen folgenden Darstellung um so mehr sogleich einleuchten wird, als wir als bekannt vorauszusetzen berechtigt sind, dass der Gaussische Heliotrop, namentlich in Bezug auf die Einrichtung der Spiegel, bekannt genug

ist, um einer besonderen Auseinandersetzung der ihm zum Grunde liegenden Principien hier nicht weiter zu bedürfen. Jedoch mag es in der von mir erstrebten grössern Deutlichkeit Entschuldigung finden, wenn zur Verständlichkeit der Anwendung des Instruments die Grundsätze der Reflexion rechtwinklig gegen einander stehender Spiegel hierbei in der Kürze wiederholt werden.

Zwei rechtwinklig auf einander stehende Spiegel *ab* und *cd* (Taf. II. Fig. 1. und Fig. 2.), deren spiegelnde Flächen von einander abgewendet stehen und dem in *C* befindlichen Auge zugekehrt sind, werden die beiden Gegenstände *A* und *B* dem Beobachter zugleich reflectirt erscheinen lassen, wenn der Durchschnittspunkt *e* der Spiegel sich in der Linie *AB* befindet, mögen nun wie in Taf. II. Fig. 1. die Einfallswinkel der Gegenstände *A* und *B* einander gleich sein, also 45° betragen, oder wie Taf. II. Fig. 2. eine beliebige Grösse haben. Da der Einfallswinkel dem Ausfallswinkel gleich ist, so wird es beim richtigen Stande in der Linie immer einen Punkt *C* (Taf. II. Fig. 1. 2.) oder eine Linie *Ce* geben, worin beide Gegenstände *A* und *B* reflectirt zugleich sichtbar sind.

Hierauf gründet sich nun das in Rede stehende Instrument und gewiss wird jedem Geometer sogleich einleuchten, dass die reflectirten Bilder beider Gegenstände, aus einem Punkte gesehen, den Stand im Alignement der Linie begründen, und daher eine Erklärung der praktischen Anwendung auch um so überflüssiger sein, als diese aus der Theorie von selbst hervorgeht.

Ein Rahmen *A* (Taf. II. Fig. 3.) ist durch die Balken *gg* in drei gleiche Theile getheilt, in denen zwei Spiegel *a* und *b* eingefasst sind. Ein zweiter Rahmen *B*, ebenfalls mit einem Spiegel *c* versehen, passt genau zu der mittleren Oeffnung des Rahmens *A* und wird durch zwei runde Zapfen auf der Hälfte bei *r* in den Balken *gg* befestigt. An diesem Rahmen *B* ist ein Quadrant *d* (Taf. II. Fig. 4.) befestigt, der mit dem Rahmen *A* in Verbindung steht, und zur Feststellung des Rahmens *B* in der rechtwinkligen Lage zu dem Rahmen *A* dient, zu deren genauerer Berichtigung noch eine feststehende Schraube *i* bei *h* angebracht ist. Die Stellschrauben *xx* dienen zur Berichtigung der Spiegel, insofern *a* und *b* in einer Ebene liegen müssen und *c* rechtwinklig auf dieser Ebene stehen muss. Damit jedoch diese Stellschrauben eine stete Wirkung auf die Spiegel äussern, müssen kleine Druckfedern *y* (Taf. II. Fig. 5.) an dem Hinterboden *z* befestigt sein. Der Ring *e* (Taf. II. Fig. 3.) ist zum bequemeren Halten mit der Hand bestimmt, sowie der Haken *f* zum Aufhängen eines Lothes dient, um den Punkt auf der Erde bemerken zu können. Soll das Instrument mit einem Stabe in Verbindung gesetzt werden, so lässt sich leicht anstatt des Hakens *f* eine Hülse anbringen, welcher ein Stab angepasst werden kann.

Die Berichtigung des Instruments in Bezug auf die Lage der Spiegel *a* und *b* in einer und derselben Ebene, sowie auch in Beziehung auf die rechtwinklige Stellung des Spiegels *c* gegen *a* und *b*, geschieht unmittelbar durch die Beobachtung. Denn das reflectirte Bild eines Gegenstandes muss bei richtiger Lage der Spiegel *a* und *b* nicht gebrochen in beiden Spiegeln erscheinen. Der rechtwinklige Stand von *C* gegen *a* und *b* ergiebt sich dadurch, dass zwei Gegenstände *A* und *B* (Taf. II. Fig. 1. 2.) in dem

Zwischenpunkte e reflectirt zugleich erscheinen, wobei das Nichtgebrochensein wiederum die rechtwinklige Lage der Spiegelebene c gegen a und b angiebt.

Eine andere weitere Anwendung als die bereits erwähnte dürfte dies Instrument bei Croquirungen finden, indem sich durch dasselbe leicht Zwischenpunkte einer Linie finden lassen, die zu Anhaltspunkten und zur näheren Bestimmung der Distanzen nach dem Augenmasse benutzt werden können.

XV.

Beweis der Lehrsätze in Band III. S. 442.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

$$\text{A)}\quad 0 = 1 - \frac{m^2}{2^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2^2.4^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2^2.4^2.6^2} + \ldots$$

$$\text{B)}\quad 2m(-1)^{\frac{m}{2}+1}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{m-1}\right)$$

$$= \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)}{1^2.3^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1^2.3^2.5^2}$$

beide für ein gerades m.

$$\text{C)}\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1 - \frac{m^2-1^2}{2^2} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^2.4^2} - \ldots$$

$$\text{D)}\quad 1 = \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-1^2)}{1^2.3^2} + \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1^2.3^2.5^2}$$

beide für ein ungerades m.

$$\text{E)}\quad 1 + \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(1 - \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}\right)$$

F) $\frac{\alpha_0}{\beta+1}-\frac{\alpha_1}{\beta+2}+\frac{\alpha_2}{\beta+3}-\ldots=\frac{\beta_0}{\alpha+1}-\frac{\beta_1}{\alpha+2}+\frac{\beta_2}{\alpha+3}-\ldots$

G) $\frac{1.2.3\ldots n}{\alpha+1.\alpha+2\ldots\alpha+n}=\frac{1.\alpha+n-1}{\alpha+1.n+1}\cdot\frac{2.\alpha+n-2}{\alpha+2.n+2}\cdot\ldots$

In den Comm. rec. soc. Gott. T. II. 1811—13 hat Gauss bewiesen, dass die Reihe

H) $1+\frac{\alpha.\beta}{\gamma.\delta}+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1.\delta.\delta+1}+\ldots$

convergirt, wofern $1+\alpha+\beta<\gamma+\delta$ ist, und dass man hat für $\alpha+\beta<\gamma$

I) $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}+\ldots=\frac{(\gamma-1)!\,(\gamma-\alpha-\beta-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!\,(\gamma-\beta-1)!}$

Diese Gleichung ist sehr umfassend; sie enthält unter andern auch die Formel

A) Setzt man $\alpha=\frac{m}{2}$, $\beta=-\frac{m}{2}$, $\gamma=1$, so ergiebt sich

$$A=\frac{1}{(\frac{m}{2})!\,(-\frac{m}{2})!}.$$

Nun ist aber (s. d. a. A.)

$$(\tfrac{1}{2}m-1)!\,(-\tfrac{1}{2}m)!=\frac{\pi}{\sin\frac{m}{2}\pi}.$$

Folglich hat man

$$A=\frac{2\sin\frac{1}{2}m\pi}{m\pi},$$

woraus für ein gerades m das Behauptete hervorgeht.

C) Setzt man $\alpha=\frac{m+1}{2}$, $\beta=\frac{-m+1}{2}$, $\gamma=1$, so findet sich, dass die Reihe divergirt, es sei denn, dass sie von selbst abbricht, was nur für ein positives oder negatives ungerades m geschieht. In diesem Falle stellt sich der Werth derselben unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dar. Es ist aber

$$\frac{(\gamma-\alpha-\beta-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!}=(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-\alpha-\beta-1).$$

Man erhält daher

$$C=\frac{\frac{-m+1}{2}\cdot\frac{-m+3}{2}\ldots-2.-1}{(\frac{m-1}{2})!}$$

oder

$$C = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

D) Die Gleichung A) kann auch folgendermassen bewiesen werden. Bezeichnet man der Kürze halber den Ausdruck $(1-\frac{m^2}{2^2})\,(1-\frac{m_2}{4^2})\ldots(1-\frac{m^2}{4n^2})$ mit $\varphi(n)$, so hat man nach leichter Rechnung

$$\varphi(n)-\varphi(n-1) = (-1)^n\,\frac{m^2.(m^2-2^2)\ldots.(m^2-4(n-1)^2)}{2^2.4^2\ldots.4n^2}.$$

Werden hier für n alle Werthe von n bis 1 gesetzt, so erhält man eine Reihe Gleichungen, deren beide letzten sind:

$$\varphi(2)-\varphi(1) = \frac{m^2.(m^2-2^2)}{2^2.4^2}$$

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi(1)-1 = -\frac{m^2}{2^2}.$$

Addirt man sie sämmtlich, so wird

$$\varphi(n) = 1-\frac{m^2}{2^2}+\ldots.+(-1)^n\,\frac{m^2.(m^2-2^2)\ldots m^2-4(n-1)^2}{2^2.4^2\ldots.4n^2};$$

folglich ist $A=\varphi(n)$ für $n=\infty$; nach der Eulerschen Factorenentwickelung ist aber $\varphi(n)=\frac{2\sin\frac{1}{2}m\pi}{m\pi}$ für $n=\infty$.

Auf ähnliche Art ergiebt sich die Formel D). Ist nämlich $(1-\frac{m^2}{1^2})\,(1-\frac{m^2}{3^2})\ldots(1-\frac{m^2}{(2n+1)^2})=\psi(n)$, so wird

$$\psi(n-1)-\psi(n) = (-1)^n\,\frac{m^2(m^2-1^2)\ldots.m^2-(2n-1)^2}{1^2.3^2\ldots..(2n+1)^2},$$

$$1-\psi(0) = \frac{m^2}{1^2};$$

mithin

$$1-\psi(n) = \frac{m^2}{1^2}-\frac{m^2(m^2-1^2)}{1^2.3^2}+\ldots+(-1)^n\,\frac{m^2\ldots m^2-(2n-1)^2}{1^2\ldots.(2n+1)^2}$$

und $D=1-\psi(n)$ für $n=\infty$; es ist aber nach Euler $\psi(n)=\cos\frac{1}{2}m\pi$ für $n=\infty$; also schliesslich

$$D = 1-\cos\tfrac{1}{2}m\pi.$$

B) Setzt man in H) $\alpha=\frac{1}{2}m$, $\beta=-\frac{1}{2}m$, $\delta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}$, so findet sich $1+\alpha+\beta=\gamma+\delta$. Die Reihe B) divergirt also, wofern sie nicht für ein gerades m abbricht. Bezeichnet man der Kürze halber $\frac{B}{2m}$ mit $\varphi(m)$, so ist

$$\varphi(m) = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{m}{1^2}-\frac{m(m^2-2^2)}{1^2.3^2}+\frac{m(m^2-2^2)\,(m^2-4^2)}{1^2.3^2.5^2}-\ldots\Big)$$

$$\varphi(m-2)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{m-2}{1^2}-\frac{m(m-2)\,(m-4)}{1^2\,.\,3^2}+\frac{m(m^2-2^2)\,(m-4)\,(m-6)}{1^2\,.\,3^2\,.\,5^2}-\ldots\right)$$

$$\varphi(m)+\varphi(m-2)=(m-1)\left(1-\frac{(m-1)^2-1^2}{1^2\,.\,3^2}+\frac{(m-1)^2-1^2\,.\,(m-1)^2-3^2}{1^2\,.\,3^2\,.\,5^2}-\ldots\right)$$

und wegen D)

$$\varphi(m)+\varphi(m-2)=\frac{1}{m-1}.$$

Werden nun für m alle geraden Zahlen von m bis 2 gesetzt, so ist die letzte dieser Gleichungen

$$\varphi(2)+\varphi(0)=\varphi(2)=1;$$

mithin ergiebt sich:

$$\varphi(m)=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m-3}+\ldots\mp\tfrac{1}{3}\pm 1$$

und daraus

$$B=2m\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m-3}+\ldots\mp\tfrac{1}{3}\pm 1\right).$$

Aus diesen vier Formeln lassen sich eine Unzahl ähnlicher ableiten, wenn man sie für $\Delta m=2$ summirt oder differenziirt; so z. B. erhält man durch ΔA, ΣB, ΣC, ΔD beziehlich die folgenden:

$$1)\ \frac{4\cos\frac{1}{2}m\pi}{(1-m^2)\pi}=1-\frac{m^2-(-1)^2}{2^2}+\frac{m^2-(-1)^2\,.\,m^2-1^2}{2^2\,.\,4^2}-\ldots\ldots$$

$$2)\ 1+(-1)^{\frac{m+1}{2}}m+\frac{2^2}{m-2}-\frac{4^2}{m-4}+\ldots\mp\frac{(m-3)^2}{3}\pm\frac{(m-1)^2}{1}$$

$$=\frac{m^2-1^2}{1^2}-\frac{m^2-1^2\,.\,m^2-3^2}{1^2\,.\,3^2}+\ldots$$

$$3)\ (-1)^{\frac{m}{2}+1}\frac{m}{2}=1-\frac{m^2-2^2}{2^2}+\frac{m^2-2^2\,.\,m^2-4^2}{2^2\,.\,4^2}-\ldots$$

$$4)\ \frac{m^2+1-2m\sin\frac{1}{2}m\pi}{(m^2-1)^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{m^2}{1^2\,.\,3^2}+\frac{m^2\,.\,m^2-2^2}{1^2\,.\,3^2\,.\,5^2}-\ldots$$

von denen die 2) und 3) beziehlich nur für ein ungerades und gerades m convergiren, und die 1) und 4) auch unter endlicher Ausdehnung summirt werden können, nämlich:

$$5)\ \left(1-\frac{m^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{m^2}{(2n+1)^2}\right)\cdot\frac{3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2\,.\,4^2\ldots 4n^2}(4n+1-m^2)=$$

$$1-\frac{m^2-(-1)^2}{2^2}+\ldots+(-1)^n\frac{m^2-(-1)^2\,.\,m^2-1^2\ldots m^2-(2n-3)^2}{2^2\,.\,4^2\ldots\ldots 4n^2},$$

$$6)\ \frac{m^2+1}{(m^2-1)^2}-\frac{m}{(m^2-1)^2}m\left(1-\frac{m^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\frac{2^2\ldots 4n^2}{3^2\ldots(2n+1)^2}(4n+3-m^2)=$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{m^2}{1^2\,.\,3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{m^2\,.\,m^2-2^2\ldots m^2-(2n-2)^2}{1^2\,.\,3^2\ldots(2n+1)^2},$$

aus welchen beiden die 1) und 4) für $n = \infty$ wieder hervorgehen.

E) Setzt man in die Gleichung 1) β, 1, $\alpha + 1$ beziehlich anstatt α, β, γ, so erhält man

$$1 + \frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\alpha + 1 \cdot \alpha + 2} + \ldots\ldots = \frac{\alpha!\,(\alpha - \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!\,(\alpha - \beta)!} = \frac{\alpha}{\alpha - \beta},$$

wie auch der Herr Herausgeber dieses Archivs in Crelle's Journal Bd. II. Nr. 36. gezeigt hat. Wird hierin $\alpha + n + 1$ und $\beta + n + 1$ für α und β gesetzt, so hat man

$$1 + \frac{\beta + n + 1}{\alpha + n + 2} + \frac{\beta + n + 1 \cdot \beta + n + 2}{\alpha + n + 2 \cdot \alpha + n + 3} + \ldots = \frac{\alpha + n + 1}{\alpha - \beta};$$

diese Gleichung multiplicire man mit $\dfrac{\beta \cdot \beta + 1 \ldots\ldots \beta + n}{\alpha + 1 \cdot \alpha + 2 \ldots\ldots \alpha + n + 1}$ und ziehe das Resultat von der obigen ab, so wird

$$E = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\left(1 - \frac{\beta \cdot \beta + 1 \ldots\ldots \beta + n}{\alpha \cdot \alpha + 1 \ldots\ldots \alpha + n}\right).$$

Diese Herleitung zeigt, dass man die Grunertsche Summation nicht für einen speciellen Fall der Gleichung für E halten darf. So wie man aus jener den Ausdruck E herleiten kann, so kann man auch den letzteren unabhängig von ihr entwickeln und dann n unendlich werden lassen, um zur Grunertschen Reihe zu gelangen. Bezeichnet man nämlich den Bruch in obiger Parenthese mit $\varphi(n)$, so ist

$$1 - \varphi(n) = \{1 - \varphi(0)\} + \{\varphi(0) - \varphi(1)\} + \ldots + \{\varphi(n-1) - \varphi(n)\}.$$

Entwickelt man die einzelnen Glieder und multiplicirt mit $\dfrac{\alpha}{\alpha - \beta}$, so hat man die Formel für E. Lässt man nun n unendlich werden, so kann der Bruch $\varphi(n)$ zwar als aus einer Reihe von Factoren bestehend betrachtet werden, welche, wenn auch nicht von Anfang an, doch von einem gewissen Punkte an ächte Brüche sind, sobald $\beta < \alpha$ ist. Man würde aber zu weit von der Wahrheit irren, wenn man hieraus schliessen wollte, dass $\varphi(n)$ für ein unendliches n verschwindet. Zum Beweise: die Reihe G) und alle übrigen bekannten Factorenentwickelungen. Um den erwähnten Schluss zu ziehen, muss man sich ganz anderer Folgerungen bedienen. Zu dem Ende sei m irgend eine ganze Zahl, $> -\beta$ und folglich auch $> -\alpha$, ferner sei h eine ganze Zahl $> \dfrac{1}{\alpha - \beta}$. Betrachten wir nun das Product

$$1)\quad \frac{h\beta + hm}{h\alpha + hm} \cdot \frac{h\beta + hm + 1}{h\alpha + hm + 1} \cdot \frac{h\beta + hm + 2}{h\alpha + hm + 2} \cdot \ldots\ldots,$$

so ist klar, dass es beständig kleiner bleibt als das Product einer gleich grossen Anzahl von Factoren der Reihe

$$2)\quad \frac{h\beta + hm}{h\beta + hm + 1} \cdot \frac{h\beta + hm + 1}{h\beta + hm + 2} \cdot \frac{h\beta + hm + 2}{h\beta + hm + 3} \cdot \ldots\ldots,$$

weil die entsprechenden Nenner, wegen $h\beta + 1 < h\alpha$, in diesem kleiner sind als in jenem. Das Product 2) nähert sich aber beständig der Null, denn durch Vereinigung von 2, 3, ... Factoren desselben erhält man die Werthe

$$\frac{h\beta + hm}{h\beta + hm + 2}, \frac{h\beta + hm}{h\beta + hm + 3}, \ldots$$

Folglich wird um so mehr das Product 1) kleiner als jede noch so kleine Grösse. Die Factoren dieses Products wachsen beständig, wovon man sich leicht überzeugt. Fasst man also die ersten h Factoren desselben zusammen, so ist deren Produkt $> (\frac{h\beta + hm}{h\alpha + hm})^h$ oder $(\frac{\beta + m}{\alpha + m})^h$. Das Product der folgenden h Factoren ist aus dem nämlichen Grunde $> (\frac{h\beta + hm + h}{h\alpha + hm + h})^h$ oder $(\frac{\beta + m + 1}{\alpha + m + 1})^h$, u. s. w. Mithin bleibt das Product 1) beständig grösser als das Product

$$3)\ (\frac{\beta + m}{\alpha + m} \cdot \frac{\beta + m + 1}{\alpha + m + 1} \cdot \frac{\beta + m + 2}{\alpha + m + 2} \ldots)^h.$$

Dieses wird also um so mehr unter jede Gränze abnehmen. Dasselbe gilt dann auch von

$$\frac{\beta + m}{\alpha + m} \cdot \frac{\beta + m + 1}{\alpha + m + 1} \cdot \frac{\beta + m + 2}{\alpha + m + 2} \cdots$$

und schliesslich von

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} \cdots \frac{\beta + m - 1}{\alpha + m - 1} \times \frac{\beta + m}{\alpha + m} \cdot \frac{\beta + m + 1}{\alpha + m + 1} \cdots$$

Uebrigens bedient sich schon Gauss in der angeführten Abhandlung des Ausdruckes E) bei seinen Untersuchungen über die Convergenz gewisser Reihen, und einer der obigen sehr ähnlichen Beweisführung. Es wird mir vielleicht gestattet werden, in einem späteren Aufsatze eine andere Entwickelung jenes Ausdrucks nebst verwandten Gegenständen mitzutheilen.

F) Setzt man in die Gleichung I) $-\alpha$, $\beta + 1$, $\beta + 2$ für α, β, γ, so erhält man

$$\frac{\alpha_0}{\beta + 1} - \frac{\alpha_1}{\beta + 2} + \frac{\alpha_2}{\beta + 3} - \ldots = \frac{\beta!\ \alpha!}{(\beta + \alpha + 1)!}.$$

Da sich in diesem Ausdrucke α und β unbeschadet seines Werthes vertauschen lassen, so folgt unmittelbar die Gleichung F). Auch hat man nach Entwickelung von $(1 - x)^\alpha$ im folgenden Integrale

$$\int_{1 \div 0} (1 - x)^\alpha x^\beta dx = \frac{\alpha_0}{\beta + 1} - \frac{\alpha_1}{\beta + 2} + \ldots$$

Substituirt man hier $1 - x$ für x, so erhält man das nämliche Integral nur mit Vertauschung von α und β, woraus wieder das Behauptete folgt. Ueber alles dies kann man auch die Gaussische Abhandlung nachsehen.

Man kann auch den Bruch

$$\frac{1.2\ldots\ldots(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)\ldots}{\alpha+1.\alpha+2\ldots.(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\ldots}$$

nach den bekannten Regeln in seine Parzialbrüche zerlegen. Setzt man ihn zu dem Ende gleich $\ldots.+\frac{p_n}{\beta+n+1}+\ldots.$, so findet sich p_n, wenn man ihn mit $\beta+n+1$ multiplicirt und dann $\beta+n+1=0$ setzt. Auf diese Weise ergiebt sich

$$p_n=\frac{1.2\ldots.\alpha+1-n.\alpha+2-n\ldots\alpha-1.\alpha.\alpha+1.\alpha+2\ldots}{\alpha+1.\alpha+2\ldots.-n.-n+1\ldots.-2.-1.1.2\ldots}$$

$$=\frac{\alpha+1-n.\alpha+2-n\ldots\alpha-1.\alpha}{-n..n+1\ldots-2,-1}=(-1)^n\alpha_n.$$

Durch Zerlegung des obigen Bruches erhält man also einen der Ausdrücke F). Da jener Bruch in Bezug auf α und β symmetrisch ist, so folgt wieder die Gleichung F).

G) Man hat die identische Gleichung

$$\frac{1.2\ldots.n}{\alpha+1.\alpha+2\ldots\alpha+n}=\frac{1.2\ldots.m}{\alpha+1.\alpha+2\ldots\alpha+m}\cdot\frac{\alpha+n+1.\alpha+n+2\ldots.\alpha+n+m}{n+1.n+2\ldots.n+m}$$

$$\times\frac{m+1.m+2\ldots..m+n}{\alpha+m+1.\alpha+m+2\ldots\alpha+m+n}.$$

Der letzte Factor, aus n Factoren bestehend, nähert sich für ein wachsendes m der Einheit, wovon man sich überzeugt, wenn man jeden Factor im Zähler und Nenner mit m theilt. Man kann ihn deshalb weglassen und erhält die unendliche Productenreihe G).

XVI.

Einige Untersuchungen über die Krümmung der Curven, insbesondere über die Evoluten gegebener Curven; und einige Bemerkungen über die besondern Punkte der Curven.

Von

Herrn Doctor J. Ph. Wolfers

astronomischen Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin.

I.

Einige Untersuchungen über die Krümmung der Curven und insbesondere die Evoluten gegebener Curven.

Zuvor wollen wir einige Sätze anführen, welche sich in verschiedenen Lehrbüchern der Analysis und unter andern in Lacroix Traité élementaire etc. finden.

1) Ist $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer Curve einfacher Krümmung zwischen ihren rechtwinkligen Coordinaten, so wird die Curve gegen die Abscissenaxe convex oder concav sein, je nachdem das zweite Differential der Ordinate in Bezug auf die Abscisse positiv oder negativ ist.

2) Ist $y = \varphi(x)$ wieder die Gleichung einer gegebenen Curve und $y'' = \psi(x'')$ die Gleichung des die erstere berührenden Kreises, so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$y = y'', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dx''}$$

und es findet nur eine Berührung beider Curven, kein Durchschnitt statt.

3) Ist $y' = f(x')$ hingegen die Gleichung des die erste Curve osculirenden Kreises, so finden die drei Bedingungsgleichungen

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2}$$

statt, und in diesem Falle wird der osculirende Kreis die Curve im gemeinschaftlichen Punkte durchschneiden.

4) Die Anzahl der, eine Curve berührenden Kreise an einem Punkte der erstern ist unendlich gross. Man wird nämlich von

jedem Punkte der jenem Curvenpunkte angehörigen Normalen mit verschiedenen Halbmessern Kreise schlagen können, welche alle eine gemeinschaftliche Tangente haben und selbst also berührende Kreise sind. Von diesen Kreisen werden einige durch die Curve eingeschlossen, andere schliessen selbst die Curve ein und in der Mitte zwischen diesen beiden Abtheilungen von Kreisen liegt der osculirende Kreis.

5) Ist (Taf. II. Fig. 1.) AP die Abscissenaxe, DN die gegebene Curve, $D'N'$ ein sie berührender Kreis, $D''N''$ ein anderer derartiger Kreis und die übrige Bezeichnung wie in 2); so wird der berührende Kreis die Lage $D'N'$ haben, d. h. an der concaven Seite der Curve liegen, wenn

$$\frac{d^2y}{dx^2} > \frac{d^2y''}{dx^2}.$$

Er wird die Lage $D''N''$ haben, oder sich an der convexen Seite der Curve befinden, wenn

$$\frac{d^2y}{dx^2} < \frac{d^2y''}{dx^2}.$$

In der Mitte dieser beiden Bedingungen liegt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y''}{dx^2},$$

und in diesem Falle geht der berührende Kreis nach 3) in den osculirenden über, welcher weder ganz an der concaven, noch an der convexen Seite der Curve liegt, sondern innerhalb gewisser Gränzen mit der letztern zusammenfällt.

6) Ist wieder $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer gegebenen Curve und bezeichnet man den Radius des osculirenden Kreises, d. h. den Krümmungshalbmesser durch γ, die Coordinaten des Mittelpunktes eben dieses Kreises durch α und β, so haben wir die drei Gleichungen

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,.\,d^2y},\; x-\alpha = \frac{dy(dx^2+dy^2)}{dx\,.\,d^2y},\; y-\beta = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}.$$

7) Die Gleichung einer Curve zweiten Grades, bezogen auf die Axe als Abscissenaxe und den Endpunkt derselben als Anfangspunkt der Coordinaten, kann allgemein dargestellt werden durch

$$y^2 = mx + nx^2.$$

Hieraus erhalten wir

$$dy = \frac{m+2nx}{2y}\,dx,\; dx^2+dy^2 = \frac{4y^2+(m+2nx)^2}{4y^2}\,dx^2,$$

$$d^2y = -\frac{m^2}{4y^3}\,dx^2.$$

Substituirt man diese Werthe in den drei Gleichungen (6), so wird nach einiger Transformation

$$\gamma = -\frac{\{4y^2 + (m + 2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2\{4ny^2 - (m + 2nx)^2\}}$$

oder wenn man y^2 eliminirt und reducirt

$$\gamma = \frac{\{4(mx + nx^2) + (m + 2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

Für eine Parabel ist $n = 0$ und $\gamma = \frac{(m^2 + 4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$

- - Ellipse - n negativ - $\gamma = \frac{\{4(mx - nx^2) + (m - 2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$

- einen Kreis - $n = -1$ - $\gamma = \frac{1}{2}m$

- eine Hyperbel - n positiv - $\gamma = \frac{\{4(mx + nx^2) + (m + 2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$.

Für den Scheitelpunkt ist $x = 0$, und

$$\gamma = \tfrac{1}{2}m,$$

d. h. der Krümmungshalbmesser im Scheitel einer Curve zweiter Ordnung stimmt überein mit dem Halbmesser eines Kreises, der mit dem halben Parameter als Radius beschrieben ist.

8) Substituirt man ebenso die Werthe von dy und d^2y in den oben für $x - \alpha$ und $y - \beta$ gefundenen allgemeinen Ausdrücken, und eliminirt man y vermittelst der Gleichung der gegebenen Curve, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, α und β. Eliminirt man endlich x aus beiden, so erhält man eine Gleichung zwischen β und α, d. h. die Gleichung der zur gegebenen Curve gehörenden **Evolute** oder, wie sie auch genannt wird, die Gleichung der **Curve der Mittelpunkte**.

9) Für die Parabel ist

$$n = 0, \quad dy = \frac{m}{2y}\,dx, \quad dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2 + m^2}{4y^2}\,dx^2,$$

$$d^2y = -\frac{m^2}{4y^3}\,dx^2$$

also

$$y - \beta = \frac{4y^2 + m^2}{4y^2} \cdot \frac{4y^3}{m^2} = \frac{4y^3}{m^2} + y, \text{ oder } \beta = -\frac{4y^3}{m^2}.$$

Ferner

$$x - \alpha = -\frac{\frac{m}{2y}\,dx \cdot \frac{4y^2 + m^2}{4y^2}\,dx^2}{dx} \cdot \frac{4y^3}{m^2 dx^2} = -\frac{4y^2 + m^2}{2m}$$

$$= -\frac{2y^2}{m} - \tfrac{1}{2}m.$$

Da aber für die Parabel $y^2 = mx$, so wird hiernach

$$x - \alpha = -2x - \tfrac{1}{2}m \text{ oder } x = \tfrac{1}{3}(\alpha - \tfrac{1}{2}m).$$

Oben war

$$\beta = -\frac{4y^3}{m^2} = -\frac{4m^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{m^2} = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$$

und, wenn man hier den eben gefundenen Werth von x substituirt,

$$\beta = -4\,\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\frac{(\alpha - \frac{1}{2}m)^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}},$$

oder auf beiden Seiten ins Quadrat erhoben:

$$\beta^2 = \frac{16}{27m}(\alpha - \tfrac{1}{2}m)^3$$

als Gleichung der der Parabel entsprechenden Evolute.

10) Ist (Taf. II. Fig. 2.) XAx die Parabel, AB ihre Axe, A ihr Scheitel und der Anfangspunkt der Coordinaten; so erhält man für $\beta = 0$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}m,$$

dasselbe, was wir oben als Werth von γ für den Scheitelpunkt gefunden haben.

Ist $AD = \frac{1}{2}m$, so wollen wir für die Evolute den Anfangspunkt der Coordinaten nach D verlegen, also α' statt $\alpha - \frac{1}{2}m$ setzen, und erhalten dann für die beiden Zweige Df und DF der Evolute die einfache Gleichung

$$\beta^2 = \frac{16}{27m}\alpha'^3.$$

Dieselbe entspricht einer Parabel vom dritten Grade, indem man alle Curven, deren Gleichung die Form

$$y^q = mx^p$$

haben, unter dem allgemeinen Namen von Parabeln begreift und sie unter einander nach dem Grade des Exponenten unterscheidet.

11) Wickelt man also einen Faden um Df, so muss sein über D hervorragendes Ende $= AD = \frac{1}{2}m$ sein, wenn man die Parabel XAx durch Abwickelung desselben beschreiben will. Wäre die Länge eine andere, etwa DJ, so wird statt der Parabel AX eine andere Curve beschrieben werden, deren Krümmungshalbmesser im Scheitel kleiner, nämlich $= DJ$ ist. Die Krümmung selbst im Scheitel wird zugenommen haben und wird immer grösser werden, je kleiner DJ wird. Fällt J mit D zusammen, so ist der Krümmungshalbmesser der durch Abwickelung beschriebenen Curve $= 0$, also die Krümmung ∞.

12) Die Länge DF der Evolute ist gleich dem Unterschiede

$$MF - AD$$

der, beiden Endpunkten entsprechenden Krümmungshalbmesser, und

da diese sich (nach 6,) immer darstellen lassen, so zeigt es sich, dass die Curve FDf **rectificabel** ist. Diese Eigenschaft gilt nicht bloss für die vorliegende Evolute der Parabel, sondern für die Evoluten aller algebraischen Curven überhaupt.

In der That, setzt man der Kürze wegen

$$\frac{16}{27m} = p,$$

so ist die Gleichung der vorliegenden Evolute

$$\beta^2 = p\alpha'^3;$$

hieraus

$$\frac{d\beta}{d\alpha'} = \tfrac{3}{2}p\,\frac{\alpha'^2}{\beta} = \tfrac{3}{2}p\,\frac{\beta}{p\alpha'} = \tfrac{3}{2}\,\frac{\beta}{\alpha'},$$

$$\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha'^2}} = \sqrt{1+\frac{9\beta^2}{4\alpha'^2}} = \sqrt{1+\frac{9p\alpha'^3}{4\alpha'^2}} = \sqrt{1+\frac{9}{4}\,p\alpha'};$$

und wenn eine unbestimmte Länge der Evolute durch v bezeichnet wird:

$$v = \int\sqrt{1+\frac{9}{4}\,p\alpha'}\;d\alpha'$$

$$= \frac{4}{9p}\cdot\tfrac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}\,p\alpha'\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}\,\frac{27m}{16}\left(1+\frac{9}{4}\,\frac{16}{27m}\,\alpha'\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}m\left(1+\frac{4}{3m}\,\alpha'\right)^{\frac{3}{2}}.$$

13) Behufs der Quadrirung der Evolute haben wir

$$\beta = p^{\frac{1}{2}}\,\alpha'^{\frac{3}{2}}$$

und wenn s in Taf. II. Fig. 3. den durch Df, α' und β eingeschlossenen Flächenraum bezeichnet,

$$s = p^{\frac{1}{2}}\int\alpha'^{\frac{3}{2}}\,d\alpha' = \tfrac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}\,\alpha'^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5}\alpha'\beta;$$

also $\frac{2}{5}$ des über α' und β gebildeten Rechtecks $DGfH$, wogegen, wenn statt Df eine Parabel gezogen wäre, der durch diese und ihre Coordinaten eingeschlossene Flächenraum $\frac{2}{3}$ des entsprechenden Rechtecks betragen würde.

14) Um den Flächenraum zu bestimmen, welchen die durch Umdrehung der Evolute um die Axe AB beschriebene gewölbte Oberfläche hat, haben wir den Ausdruck

$$s = 2\pi\int\beta\sqrt{d\alpha'^2+d\beta^2} = 2\pi\sqrt{p}\int\alpha'^{\frac{3}{2}}d\alpha'\sqrt{1+\frac{4}{3m}\,\alpha'}$$

aus welchem sich durch Integration ein geschlossener Ausdruck ableiten lässt, der aber freilich etwas weitläufig ist. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\frac{4}{3m} = \delta,$$

so wird nach einiger Reduction

$$s = 2\pi\sqrt{p}\left\{\frac{\sqrt{\alpha' + \delta\alpha'^2}(2\delta\alpha' + 8\delta\delta\alpha'^2 - 3)}{24\delta\delta}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{16\delta^2\sqrt{\delta}}\, ln\left(\frac{1 + 2\delta\alpha'}{2\sqrt{\delta}} + \sqrt{\alpha' + \delta\alpha'^2}\right)\right\}$$

unter ln hyperbolische Logarithmen verstanden.

15) Um den Cubikinhalt des durch Umdrehung um AB erzeugten Körpers zu finden, haben wir den Ausdruck

$$K = \pi \int \beta^2\, d\alpha' = \pi \int p\alpha'^3\, d\alpha' = \tfrac{1}{4}\pi p\alpha'^4 = \tfrac{1}{4}\pi\beta^2 \,.\, \alpha'$$

also ein Viertel des Cylinders, dessen Grundfläche β zum Radius hat und dessen Höhe $= \alpha'$ ist. Wäre Df eine Parabel, so würde der ihrer Umdrehung entsprechende Körper der Hälfte jenes Cylinders gleich sein.

Man kann daher eine der Construction des **Archimedes** entsprechende Darstellung angeben, wodurch das Verhältniss eines Cylinders, dessen Höhe noch einmal so gross als der Radius seiner Grundfläche ist, zu den beiden Conoïden, deren erzeugende Curven respective eine Parabel und die Evolute einer Parabel sind, ausgedrückt wird. Die Höhe des Cylinders soll hierbei die gemeinschaftliche Abscisse der beiden letztern und der Radius der Grundfläche des erstern die zugehörige Ordinate bezeichnen. Für die Parabel wäre demnach

$$y^2 = mx,\quad y = \tfrac{1}{2}x,\ \text{also}\ x = 4m\,;$$

für die Evolute

$$\beta^2 = p\alpha'^2,\quad \beta = \tfrac{1}{2}\alpha',\quad \alpha' = \frac{1}{4p} = \frac{27}{64}m.$$

Wir erhalten dann das einfache Verhältniss des Cubikinhalts der gesammten drei Körper, indem man den Halbmesser der Grundfläche des Cylinders oder in Taf. II. Fig. 4. $BF = r$ setzt:

Cylinder $BCED = 2r^2\pi$
Conoïd $AGBCHA = r^2\pi$
- $AJBCKA = \tfrac{1}{2}r^2\pi$

also Cyl. : Par. : Evol. $= 4 : 2 : 1$, wogegen bekanntlich Cyl. : Kugel : Kegel $= 3 : 2 : 1$.

16) Für die Ellipse ist die Gleichung der Kegelschnitte

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

und vergleichen wir diese mit der in 7) aufgestellten allgemeinern Gleichung, so ist hier

$$m = \frac{2b^2}{a^2},\quad n = -\frac{b^2}{a^2}$$

wobei der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Endpunkte der grossen Axe $2a$ zusammenfällt und wo b die halbe kleine Axe bezeichnet. Um die Sache etwas zu vereinfachen, verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Mittelpunkte der Ellipse, und haben dann bekanntlich für die letztere die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Aus ihr folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\frac{dy^2+dx^2}{dx^2} = \frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^4y^2} = \frac{b^4x^2+a^4b^2-a^2b^2x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{a^2-e^2x^2}{y^2}$$

wo

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

gesetzt ist.

Substituiren wir diese Werthe in den oben in 6) aufgestellten allgemeinen Ausdrücken von $x-\alpha$ und $y-\beta$, so wird

$$x-\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{a^2-e^2x^2}{y^2}\;-\;\frac{a^2y^3}{b^4} = x\cdot\frac{a^2-e^2x^2}{a^2}$$

$$y-\beta = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{a^2-e^2x^2}{y^2}\;-\;\frac{a^2y^3}{b^4} = y\,\frac{a^2-e^2x^2}{b^2}$$

oder auch aus der ersten von beiden

$$\text{I.}\quad \alpha = \frac{e^2x^3}{a^2}.$$

Aus der zweiten folgt

$$\beta = y\left(1-\frac{a^2-e^2x^2}{b^2}\right)$$

oder nach einiger Transformation

$$\text{II.}\quad \beta = -\frac{a^2e^2}{b^4}\,y^3.$$

Wenn man zuerst y mittelst der Gleichung der Ellipse aus II. und dann aus I. und II. x eliminiren wollte, so würde die resultirende Gleichung von einem hohen Grade ausfallen. Zweckmässiger dürfte es sein, zu den in Bezug auf die Evolute der Ellipse anzustellenden Betrachtungen die Gleichungen I. und II. zu benutzen und damit die Gleichung der Ellipse

$$\text{III.}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

zu verbinden.

17) Um die Punkte auf AB und BC Taf. II. Fig. 5. zu finden, in denen die Evolute die grosse Axe schneidet, setzen wir

$$\beta = 0$$

also nach II. $y = 0$

- - III. $a^2 - x^2 = 0$ oder $x = \pm a$

und - I. $\alpha = \pm \frac{e^2 a^3}{a^2} = \pm \frac{ae \cdot ae}{a} = \pm ae^2$.

Der vorletzte Ausdruck von α eignet sich am besten zu der in Taf. II. Fig. 6. angedeuteten Construction.

$$AB = a,\ BH = BP = ae,\ BQ = BF = \frac{ae \cdot ae}{a}.$$

Für $FB = BG = ae^2$ sind F und G diese Durchschnittspunkte, und zwar wird

F dem Punkte A,
G - - C

der Ellipse entsprechen.

Um eben so die Durchschnittspunkte auf DBE zu erhalten, setzen wir, da der Anfangspunkt der Coordinaten sich in B befindet,

$$\alpha = 0$$

also nach I. $x = 0$

- - III. $y = \pm b$

und - II. $\beta = \mp \frac{a^2 e^2}{b^4} b^3 = \mp \frac{a \cdot ae^2}{b} = \mp \frac{a^2 e^2}{b}$.

Nach dem vorletzten Ausdrucke lässt sich der Werth von β finden; man erhält so die Punkte K und L und zwar, weil y und β entgegengesetzte Zeichen haben, wird

L dem Punkte D,
K - - E

der Ellipse entsprechen.

18) Aus I. folgt $d\alpha = \frac{3e^2 x^2}{a^2} dx$,

- II. - $d\beta = -\frac{3a^2 e^2 y^2}{b^4} dy$;

daher

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a^4}{b^4} \frac{y^2}{x^2} \frac{dy}{dx}.$$

Aus III. aber ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

mithin

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{a^4}{b^4}\,\frac{y}{x}\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}=-\frac{dx}{dy}$$

und auch

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{3e^2}{b^2}\,xy.$$

Da nun allgemein

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\frac{\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d^2\beta}{dx^2}-\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d^2\alpha}{dx^2}}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^3},$$

so haben wir zu diesem Ende

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{3e^2x^2}{a^2},\quad \frac{d^2\alpha}{dx^2}=\frac{6e^2x}{a^2}$$

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{3e^2}{b^2}\,xy,\quad \frac{d^2\beta}{dx^2}=\frac{3e^2}{b^2}\,y+\frac{3e^2}{b^2}\,x\,\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{3e^2}{b^2}\,y-\frac{3e^2}{b^2}\,x\cdot\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$$

$$=\frac{3e^2}{b^2}\,y-\frac{3e^2x^2}{a^2y}$$

und so

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\frac{\frac{3e^2}{a^2}\,x^2\left(\frac{3e^2}{b^2}\,y-\frac{3e^2x^2}{a^2y}\right)-\frac{3e^2}{b^2}\,xy\,\frac{6e^2x}{a^2}}{\frac{27e^6x^6}{a^6}}$$

$$=-\frac{9e^4x^2}{a^2}\left(\frac{y}{b^2}+\frac{x^2}{a^2y}\right)\frac{a^6}{27e^6x^6}$$

$$=-\frac{a^4}{3e^2x^4}\left(\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2b^2y}\right)$$

endlich

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=-\frac{a^4}{3e^2x^4y}.$$

In so fern also y negativ ist, wie hier unterhalb AC, ist das zweite Differential der Ordinate der Curve FKG in Bezug auf die Abscisse positiv; ist y hingegen positiv, wie hier oberhalb AC, so wird jenes zweite Differential negativ; daher ist nach 1) FKG und FLG gegen die Abscissenaxe convex.

19) Diese Curve der Mittelpunkte oder Evolute der Ellipse muss nun rectificabel sein.

In der That wird

$$\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}=\sqrt{\frac{b^4x^2+a^4y^2}{b^4x^2}}=\sqrt{\frac{b^4x^2+a^2b^2(a^2-x^2)}{b^4x^2}}=\frac{a\sqrt{a^2-e^2x^2}}{bx}$$

$$\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}\cdot d\alpha=\frac{3e^2}{a^2}\,x^2\,dx\cdot\frac{a\sqrt{a^2-e^2x^2}}{bx}$$

$$v=\int\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}\,.\,d\alpha=\frac{3e^2}{ab}\int\sqrt{a^2-e^2x^2}\,.\,xdx$$

$$=-\frac{1}{ab}(a^2-e^2x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Um die Länge von FK zu erhalten, müssen wir dieses Integral

$$\text{von } \alpha=-ae^2 \text{ bis } \alpha=0$$

oder

$$x=-a \qquad x=0$$

nehmen und erhalten so:

$$FK=-\frac{1}{ab}\{a^2-e^2a^2\}^{\frac{3}{2}}-\{-\frac{1}{ab}a^{2\frac{3}{2}}\}=-\frac{1}{ab}b^3+\frac{1}{ab}a^3$$

$$FK=\frac{a^3-b^3}{ab}.$$

20) Um die Fläche $FKGL$ zu quadriren, haben wir

$$\int\beta d\alpha=\int-\frac{a^2e^2}{b^4}y^3\,\frac{3e^2}{a^2}x^2dx=-\frac{3e^4}{b^4}\,\frac{b^3}{a^3}\int(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}x^2dx$$

$$=-\frac{3e^4}{a^3b}\int(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}x^2dx.$$

Wenden wir nun nach einander folgende Integralformeln an

$$\int(a+cx^2)^nx^mdx=\frac{1}{c(2n+m+1)}\{(a+cx^2)^{n+1}x^{m-1}$$

$$-(m-1)a\int(a+cx^2)^nx^{m-1}dx\}$$

$$\int(a+cx^2)^ndx=\frac{1}{2c(2n+1)}\{2cx(a+cx^2)^n$$

$$+4acn\int(a+cx^2)^{n-1}dx\}$$

$$\int\sqrt{(a+cx^2)}dx=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a+cx^2}+\tfrac{1}{2}a\int\frac{dx}{\sqrt{a+cx^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\text{ arc sin }(x\sqrt{\frac{c}{a}})$$

so erhalten wir

$$\int\beta d\alpha=\frac{e^4}{2a^2b}\{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}x-\tfrac{1}{4}a^2x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{3}{8}a^4x\sqrt{a^2-x^2}$$

$$-\tfrac{3}{8}a^6\text{ arc sin }\frac{x}{a}\}+C.$$

ur Bestimmung der Fläche *FBK* müssen wir diess Integral

$$\text{von } \alpha = -ae^2 \text{ bis } \alpha = 0$$

der

$$\text{von } x = -a \text{ bis } x = 0$$

rstrecken, und da für den erstern Werth von x

$$\int \beta d\alpha = \frac{e^4}{2a^2b} \{-\tfrac{3}{8}a^6 \arcsin(-1)\} = \frac{e^4}{2a^2b} \{-\tfrac{3}{8}a^6 (-\tfrac{1}{2}\pi)\}$$

$$= \frac{3}{32} \frac{a^4e^4\pi}{b},$$

ür den letzten Werth von x

$$\int \beta d\alpha = 0$$

ist, so wird

$$FBK = \frac{3}{32} \frac{a^4e^4\pi}{b}$$

und

$$FKGL = 4 \,.\, FBK = \tfrac{3}{8} \frac{a^4e^4\pi}{b}$$

$$= \tfrac{3}{8} \frac{a}{b} ae^2 \,.\, ae^2\pi,$$

in welcher letztern Form sich der Werth auch durch die in der Figur enthaltenen Grössen veranschaulichen lässt. Denkt man sich nämlich zu $FB = ae^2$ als halber kleinen und $BK = \frac{a}{b} \,.\, ae^2$ als halber grossen Axe (17) eine Ellipse construirt, so ist ihr Flächeninhalt $= \frac{a}{b} ae^2 \,.\, ae^2\pi$, und der Flächeninhalt der Figur $FKGL = \frac{3}{8}$ von jenem.

21) Zur Bestimmung der gewölbten Oberfläche, welche durch Undrehung um die Axe *FG* entsteht, haben wir

$$s = 2\pi \int \beta \sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2} = -2\pi \frac{a^2e^2}{b^4} \frac{3e^2}{ab} \int y^2 \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, xdx$$

$$= -2\pi \frac{a^2e^2}{b^4} \frac{3e^2}{ab} \frac{b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, xdx$$

$$= -\frac{6\pi e^4}{a^3b^3} \int (a^2 - x^2) \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - e^2x^2)}\, xdx.$$

$$= -\frac{6\pi e^4}{a^3b^3} \int \{a^2 xdx \sqrt{a^4 - (a^2 + a^2e^2)x^2 + e^2x^4}$$

$$- x^2 \,.\, xdx \sqrt{a^4 - (a^2 + a^2e^2)x^2 + e^2x^4}\}.$$

Nun ist $a^2 + a^2e^2 = 2a^2 - b^2$, ferner setzen wir

$$x^2 = z,\ x^4 = z^2,\ x dx = \tfrac{1}{2} dz$$

$$\sqrt{a^4 - (2a^2 - b^2)x^2 + e^2 x^4} = \sqrt{a^4 - (2a^2 - b^2)z + e^2 z^2} = \sqrt{R}$$

so wird

$$s = -\frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\{\tfrac{1}{2}a^2 \int dz \sqrt{R} - \tfrac{1}{2}\int z dz \sqrt{R}\}.$$

Das zweite Integral geht über in

$$-\tfrac{1}{2}\frac{R^{\frac{3}{2}}}{3e^2} - \tfrac{1}{2}\frac{2a^2 - b^2}{2e^2}\int dz \sqrt{R}.$$

Hiermit verbunden das erste

$$\tfrac{1}{2}a^2 \int dz \sqrt{R},$$

so wird

$$s = \frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\{\frac{1}{6e^2}R^{\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{4e^2}\int dz \sqrt{R}\}$$

$$= \frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\{\frac{1}{6e^2}R^{\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{4e^2}\frac{2e^2z - 2a^2 + b^2}{4e^2}\sqrt{R}$$

$$+ \frac{b^2}{4e^2}\frac{4a^4e^2 - (2a^2 - b^2)^2}{8e^2}\int\frac{dz}{\sqrt{R}}\}$$

$$= \frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\{\frac{1}{6e^2}R^{\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{4e^2}\frac{2e^2z - 2a^2 + b^2}{4e^2}\sqrt{R}$$

$$-\frac{b^6}{4e^2}\frac{1}{8e^2}\frac{1}{e}\ ln\ \frac{2e^2z - 2a^2 + b^2 + 2e\sqrt{R}}{2e}\}$$

$$= \frac{6e^2\pi}{a^2b^2}\{\frac{1}{6}R^{\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{4}\frac{2e^2z - 2a^2 + b^2}{4e^2}\sqrt{R}$$

$$-\frac{b^6}{4}\frac{1}{8e^3}\ ln(2e^2z - 2a^2 + b^2 + 2e\sqrt{R})\}.$$

Um die der Umdrehung von FBK entsprechende Fläche, d. h. die Hälfte der ganzen zu erhalten, muss das Integral wie in 20)

von $x = -a$ bis $x = 0$

d. h. - $z = a^2$ - $z = 0$

erstreckt werden. Für den ersten Werth wird $R = 0$, für den zweiten $R = a^4$, und so diese Fläche

$$= \frac{6e^2\pi}{a^2b^2}\{-\tfrac{1}{6}a^6 + \frac{a^2b^2}{16e^2}(2a^2 - b^2) - \frac{b^6}{32e^3}\ ln\ \frac{1+e}{1-e}\}.$$

22) Um die Curve zu cubiren haben wir

$$K = \pi \int \beta^2 \, d\alpha = \pi \frac{3e^2}{a^2} \frac{a^4 e^4}{b^4} \int y^6 \, x^2 dx$$

$$= \frac{3\pi a^2 e^6}{b^8} \cdot \frac{b^6}{a^6} \int (a^2 - x^2)^3 \, x^2 dx$$

$$= \frac{3\pi e^6}{a^4 b^2} \{ \tfrac{1}{3} a^6 x^3 - \tfrac{3}{5} a^4 x^5 + \tfrac{3}{7} a^2 x^7 - \tfrac{1}{9} x^9 \}.$$

die ganze Evolute ist dieses Integral zu erstrecken von $= -a$ bis $x = +a$, daher in diesem Falle

$$K = \frac{6\pi e^6}{a^4 b^2} \{ \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{7} - \tfrac{1}{9} \} a^9 = \frac{32}{105} \pi \frac{a^5 e^6}{b^2}.$$

sen Ausdruck kann man auch folgendermassen schreiben:

$$K = \frac{32}{105} \pi \left(\frac{a}{b} ae^2\right) \left(\frac{a}{b} ae^2\right) . (ae^2),$$

wenn man die in 17) gefundenen Werthe der halben Axen der lute, nämlich

$$FB = ae^2 \text{ mit } B$$

$$BK = \frac{a}{b} . ae^2 \text{ mit } A$$

eichnet, und die letztern Bezeichnungen in den Ausdruck für setzt,

$$K = \frac{32}{105} \pi \; A^2 . B.$$

Cubikinhalt eines Ellipsoids, dessen beide Axen A und B, und ches durch Umdrehung um die kleinere B entstanden wäre, de dagegen sein

$$K' = \frac{4}{3} \pi \; A^2 B,$$

dass man das Verhältniss hat

$$K' : K = \frac{4}{3} : \frac{32}{105} = 35 : 8$$

r

$$K = \frac{8}{35} K'.$$

23) Die für die Evolute der Ellipse gefundenen Ausdrücke en in die, der Evolute des Kreises entprechenden über, indem $a = b$, $e = 0$ setzt; alsdann wird aber nach 16)

$$\text{I. } \alpha = 0, \quad \text{II. } \beta = 0, \quad \text{III. } y^2 = a^2 - x^2$$

h. die Evolute des Kreises ist keine Curve, sondern ein Punkt, zwar der Anfangspunkt der Coordinaten, welcher hier der Mit-

telpunkt ist. Diess ist ein Resultat, welches man freilich auch ohne Calcul hätte erhalten können.

24) Die Betrachtungen über die, der Hyperbel entsprechenden, Evolute werden sich dadurch vereinfachen lassen, dass man aus den für die Ellipse gefundenen Resultaten einzelne durch Analogie für die Hyperbel ableiten kann.

Die Gleichung der letztern, für den einen ihrer Scheitel als Anfangspunkt der Coordinaten ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

und vergleicht man diese mit der allgemeinern Gleichung der Kegelschnitte

$$y^2 = mx + nx^2$$

so ist in diesem Falle

$$m = \frac{2b^2}{a}, \quad n = \frac{b^2}{a^2}.$$

Verlegt man den Anfangspunkt in den Mittelpunkt B (Taf. II. Fig. 7.) des zwischen beiden Scheitelpunkten befindlichen Stücks der Axe, so wird die Gleichung symmetrischer, nämlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Aus dieser erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} = \frac{b^4x^2}{a^4y^2} + 1 = \frac{b^4x^2 + a^2(b^2x^2 - a^2b^2)}{a^4y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2(a^2 + b^2) - a^4b^2}{a^4y^2}$$

oder wenn man, der bei der Ellipse angewandte Transformation analog,

$$a^2 + b^2 = a^2e^2$$

setzt:

$$\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left\{\frac{e^2x^2 - a^2}{y^2}\right\}.$$

Setzen wir diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke von $x - \alpha$ und $y - \beta$ (6), so wird

$$x - \alpha = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \; \frac{\frac{b^2}{a^2} \; \frac{e^2x^2 - a^2}{y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = -\frac{b^4}{a^4} \frac{x}{y^2}(e^2x^2 - a^2)\frac{a^2y^2}{b^4}$$

$$= \frac{a^2 - e^2x^2}{a^2} x$$

und hieraus

$$\text{I.}\quad \alpha = \frac{e^2}{a^2}\, x^3.$$

Ferner

$$y - \beta = \frac{b^2}{a^2}\, \frac{e^2x^2 - a^2}{y^2} \cdot \frac{a^2y^2}{b^4} = y\, \frac{e^2x^2 - a^2}{b^2} = y\, \frac{e^2\left\{\frac{a^2}{b^2}y^2 + a^2\right\} - a^2}{b^2}$$

$$= y \cdot \frac{\frac{a^2e^2}{b^2}\, y^2 + b^2}{b^2}$$

und hieraus

$$\text{II.}\quad \beta = -\frac{a^2e^2}{b^4} \cdot y^3.$$

Aus dem entgegengesetzten Zeichen in II. geht hervor, dass wie bei der zur Ellipse gehörigen Curve der Mittelpunkte zu einem positiven Werthe von y, etwa LM, ein negativer Werth von β, NP gehört und umgekehrt. Demnach wird

die Curve HJ dem Zweige CE der Hyperbel
- - HK - - CD - -

entsprechen, und ganz ähnlich für den zweiten Theil FAG der Hyperbel.

Man könnte nun y aus II. eliminiren mittelst der Gleichung

$$\text{III.}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2)$$

und aus der resultirenden Gleichung und I. x fortschaffen, um so eine Gleichung zwischen α und β zu erhalten, welches die der Evolute sein würde; allein wir wollen lieber, wie wir es bei der Ellipse gethan haben, die drei Gleichungen selbst benutzen.

25) Setzt man zunächst $\beta = 0$, so wird aus II. $y = 0$, aus III. $x = \pm a$, aus I. $\alpha = \pm ae^2$.

Diese beiden speciellen Werthe von α geben uns die beiden Punkte H und H' der Evolute, welche respective den Scheitelpunkten C und A entsprechen.

Die nun weiter folgenden Betrachtungen werden, wegen der ganz gleichen Form der beiden ersten Gleichungen mit den für die Ellipse ihnen entsprechenden, auch den dort angestellten sehr nahe kommen, wesshalb wir uns hier etwas kürzer fassen und die dortigen Resultate ohne Weiteres anwenden können.

Wir haben demnach

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{dy}{dx},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\, \frac{x}{y},$$

also

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a^2}{b^2}\, \frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{3e^2}{a^2}x^2,\ \frac{d^2\alpha}{dx^2}=\frac{6e^2x}{a^2}$$

$$\frac{d\beta}{dx}=-\frac{3e^2}{b^2}xy,\ \frac{d^2\beta}{dx^2}=-\frac{3e^2}{b^2}y-\frac{3e^2x}{b^2}\ \frac{dy}{dx}$$

$$=-\frac{3e^2}{b^2}y-\frac{3e^2x}{b^2}\ \frac{b^2}{a^2}\ \frac{x}{y}$$

$$=-\frac{3e^2}{b^2}y-\frac{3e^2x^2}{a^2y}$$

und so

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\frac{-\frac{3e^2x^2}{a^2}\ \left\{\frac{3e^2y}{b^2}+\frac{3e^2x^2}{a^2y}\right\}+\frac{3e^2xy}{b^2}\ \frac{6e^2x}{a^2}}{\frac{27e^6x^6}{a^6}}$$

$$=\left(\frac{9e^4x^2y}{a^2b^2}-\frac{9e^4x^4}{a^4y}\right)\ \frac{a^6}{27e^6x^6}$$

$$=-\frac{a^4}{3e^2x^4}\ \left\{\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2b^2y}\right\}=-\frac{a^4}{3e^2x^4y}.$$

Es gelten daher auch hier dieselben Regeln wie 18) über die convexe und concave Form der Evolute.

26) Zur Rectification der Curve haben wir die Gleichung

$$v=\int\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}\,.\,d\alpha=\int\sqrt{1+\frac{a^4y^2}{b^4x^2}}\,.\,\frac{3e^2}{a^2}\ x^2dx$$

$$=\frac{3e^2}{a^2}\int x^2dx\ \frac{\sqrt{a^4\,\frac{b^2}{a^2}\,(x^2-a^2)+b^4x^2}}{b^2x}$$

$$=\frac{3e^2}{a^2b^2}\int xdx\sqrt{a^2b^2x^2-a^4b^2+b^4x^2}$$

$$=\frac{3e^2}{a^2b^2}\int xdx\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}=\frac{3e^2}{ab}\int xdx\sqrt{e^2x^2-a^2}$$

oder

$$v=\frac{1}{ab}\ (e^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

27) Zur Quadrirung der Evolute haben wir

$$s=\int\beta d\alpha=-\frac{a^2e^2}{b^4}\ \frac{3e^2}{a^2}\int y^3x^2dx=-\frac{3e^4}{b^4}\ \frac{b^3}{a^3}\int(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}x^2dx$$

$$=-\frac{3e^4}{a^3b}\int(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}x^2dx$$

und hierfür findet man nach denselben drei ersten Integralformeln wie in 20) und der vierten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2})$$

$$s = -\frac{e^4}{2a^3 b} \{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} x + \tfrac{1}{4} a^2 x (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$- \tfrac{3}{8} a^4 x \sqrt{x^2-a^2} + \tfrac{3}{8} a^6 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2})\} + C.$$

28) Zur Bestimmung der gewölbten Oberfläche haben wir

$$s = 2\pi \int \beta \sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2} = -2\pi \frac{a^2 e^2}{b^4} \frac{3e^2}{ab} \int y^3 x dx \sqrt{e^2 x^2 - a^2}$$
$$= -2\pi \frac{a^2 e^2}{b^4} \cdot \frac{3e^2}{ab} \cdot \frac{b^3}{a^3} \int (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{e^2x^2-a^2} \cdot x dx$$
$$s = -\frac{6\pi e^4}{a^2 b^2} \int \{x^2 \cdot x dx \sqrt{a^4 - (a^2+a^2e^2)x^2 + a^2 x^4}$$
$$- a^2 x dx \sqrt{a^4 - (a^2+a^2e^2)x^2 + e^2x^4}\}$$

ganz denselben Ausdruck wie bei der zur Ellipse gehörigen Evolute, nur mit entgegengesetzten Zeichen; also nach der dortigen Auseinandersetzung in 21)

$$x^2 = z,\ \sqrt{a^4 - (a^2 + a^2e^2)x^2 + e^2x^4}$$
$$= \sqrt{a^4 - (2a^2 + b^2)z + e^2z^2} = \sqrt{R}$$

gesetzt:

$$s = \frac{6\pi e^4}{a^2 b^2} \int \{\tfrac{1}{2} a^2 dz \sqrt{R} - \tfrac{1}{2} z dz \sqrt{R}\},$$

$$-\tfrac{1}{2} \int z dz \sqrt{R} = -\tfrac{1}{2} \frac{R^{\frac{3}{2}}}{3e^2} - \tfrac{1}{2} \frac{2a^2+b^2}{2e^2} \int \sqrt{R}\, dz,$$

$$\int \sqrt{R}\, dz = \frac{(2e^2z - 2a^2 - b^2)\sqrt{R}}{4e^2} + \frac{4a^4e^2 - (2a^2+b^2)^2}{8e^2} \int \frac{dz}{\sqrt{R}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{1}{e} \ln \frac{2e^2z - 2a^2 - b^2 + 2e\sqrt{R}}{2e},$$

$$4a^2e^2 - (2a^2+b^2)^2 = -b^4;$$

endlich

$$s = \frac{6e^4\pi}{a^2b^2} \{-\frac{1}{6e^2} \cdot R^{\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{4e^2} \frac{(2e^2z - 2a^2 - b^2)\sqrt{R}}{4e^2}$$
$$- \frac{b^6}{4e^2} \cdot \frac{1}{8e^3} \ln \frac{2e^2z - 2a^2 - b^2 + 2e\sqrt{R}}{2e}\} + C.$$

29) Zur Cubatur erhalten wir die Formel

$$K = \pi \int \beta^2 d\alpha = \pi \frac{a^4 e^4}{b^6} \frac{3e^2}{a^2} \int y^6 x^2 dx$$

$$= \pi \frac{3a^2 \cdot e^6}{b^8} \frac{b^6}{a^6} \int (x^2 - a^2)^3 x^2 dx$$

$$= \frac{3\pi e^6}{a^4 \cdot b^2} \int \{x^8 - 3a^2x^6 + 3a^4x^4 - a^6x^2\} dx$$

$$K = \frac{3\pi e^6}{a^4 \cdot b^2} \{\tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{3}{7}a^2x^7 + \tfrac{3}{5}a^4x^5 - \tfrac{1}{3}a^6x^3\} + C.$$

II.

Einige Bemerkungen über die besondern Punkte der Curven.

Ist $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer Curve, so nehmen die positiven Ordinaten so lange an Grösse zu, als $\frac{dy}{dx}$ positiv, nehmen hingegen so lange ab, als $\frac{dy}{dx}$ negativ ist. Wenn also in einem Punkte der Curve $\frac{dy}{dx}$ vom Positiven zum Negativen übergeht, so ist das demselben Punkte entsprechende y ein Maximum, im entgegengesetzten Falle ein Minimum.

Ist z. B.

$$y = b + c(x - a)^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mc(x - a)^{m-1};$$

so wird $\frac{dy}{dx}$ dem Zeichen nach dem von x entsprechen, je nachdem m beschaffen ist.

1) Es sei m grade, also $m - 1$ ungrade, so wird

$(x - a)^{m-1}$ negativ wenn $x < a$
positiv - $x > a$
es findet ein Minimum statt - $x = a$.

Denn für $x = a - h$ wird $y = b + ch^m$
und - $x = a + h$ - $y = b + ch^m$
also beide grösser als für $x = a$, wo $y = b$.

Eine Grösse geht vom Negativen zum Positiven über entweder durch 0 oder durch ∞. Im vorliegenden Falle findet das Erstere statt, es ist also im gesuchten Punkte

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h. weil $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet den die Berührungslinie im betreffenden Punkte der Curve mit

der Abscissenaxe bildet, ist diese Berührungslinie der Abscissenaxe parallel, wie MR in Taf. II. Fig. 8., wenn

$$AP = a$$
$$PM = b.$$

Man kann diess auch so fassen. Aus

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

folgt durch Integration

$$y = \text{Constans},$$

d. h. im Punkte M ist das Element der Curve eine grade Linie, welche parallel mit der Abscissenaxe fortgeht; ein Resultat, welches der Sache nach mit dem vorigen übereinstimmt.

Wäre die gegebene Gleichung der Curve

$$y = b - c(x-a)^m,$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = -mc(x-a)^{m-1},$$

und hier geht $\frac{dy}{dx}$ von $+mch^{m-1}$ für $x = a - h$

durch 0 - $x = a$

in $-mch^{m-1}$ - $x = a + h$

über, daher findet in diesem Falle ein Maximum in M (Taf. II. Fig. 9.) statt.

2) Ist in der ersten Gleichung

$$y = b + c(x-a)^m$$

m ungrade, also $m-1$ grade, so wird, für $x = a - h$,

$$\frac{dy}{dx} = + mch^{m-1};$$

und auch, für $x = a + h$,

$$\frac{dy}{dx} = + mch^{m-1};$$

und in der Mitte liegt, für $x = a$,

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ein Maximum oder Minimum kann daher in diesem Falle nicht stattfinden. Betrachtet man aber das zweite Differential

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m.(m-1)\, c(x-a)^{m-2},$$

so wird, da $m-2$ **ungrade** ist,

$$\text{für } x=a-h,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-m.(m-1)ch^{m-2};$$

$$\text{- } x=a,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

$$\text{- } x=a+h,\ \frac{d^2y}{dx^2}=+m(m-1)ch^{m-2}.$$

Die Curve ist also nach den frühern Untersuchungen (1) für $x=a-h$ **concav** und für $x=a+h$ **convex** gegen die Abscissenaxe. Der Punkt M (Taf. II. Fig. 10.), in welchem sie für $x=a$ von dem Einen zum Andern übergeht, wird ein **Wendepunkt** genannt.

Für c **negativ**, wie in der zweiten vorausgesetzten Gleichung, würde die Curve umgekehrt von der **convexen** Form gegen die Abscissenaxe in die concave übergehen.

Im Wendepunkte ist also

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

und aus dieser Gleichung erhalten wir durch zweimalige Integration

$$y=\alpha x+\beta$$

die Gleichung einer graden Linie, d. h. im Wendepunkte ist das Element der Curve gradlinig und diese grade Linie gibt, da

$$\frac{dy}{dx}=\alpha,$$

zugleich die Richtung der Tangente MR in M an.

Oben haben wir den Krümmungshalbmesser einer Curve

$$\gamma=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gefunden. Im vorliegenden Falle wird für den Punkt M

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

also

$$\gamma=\frac{1}{0}=\infty,$$

d. h. der Krümmungshalbmesser unendlich gross, die Krümmung also unendlich klein oder vielmehr das Element in M gradlinig.

3) Es sei m ein Bruch, dessen Zähler grade und Nenner ungrade, etwa $m = \frac{2}{3}$; so wird aus

$$y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\,\frac{c}{(x-a)^{\frac{1}{3}}},$$

also für

$$x = a - h,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\,\frac{c}{\sqrt[3]{h}};$$

$$x = a + h,\quad \frac{dy}{dx} = +\frac{2}{3}\,\frac{c}{\sqrt[3]{h}};$$

$$x = a,\quad \frac{dy}{dx} = \infty.$$

Da hier $\frac{dy}{dx}$ durch ∞ vom Negativen zum Positiven übergeht, so findet im Punkt M ein Minimum statt, denn sowohl

für $x = a - h$ ist $y = b + ch^{\frac{2}{3}}$,

als auch - $x = a + h$ - $y = b + ch^{\frac{2}{3}}$.

Ferner ist in M (Taf. II. Fig. 11.) die Tangente, wegen

$$\frac{dy}{dx} = \infty,$$

senkrecht auf der Abscissenaxe. Da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{c}{(x-a)^{\frac{4}{3}}}$$

und so

$$\text{für } x = a - h,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}\,\frac{c}{h^{\frac{4}{3}}},$$

$$\text{- } x = a + h,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}\,\frac{c}{h^{\frac{4}{3}}};$$

so ist die Curve diess- und jenseits M gegen die Abscissenaxe concav und der Punkt M kein Wendepunkt. In M ist für $x = a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

Dieser Punkt, in welchem die Curve bei der Vereinigung der beiden Zweige DM und EM (Taf. II. Fig. 12.) plötzlich innehält, wird Kehrpunkt genannt.

Für c negativ wird M ebenfalls ein Kehrpunkt, PM aber ein Maximum, indem nun $\frac{dy}{dx}$ durch ∞ vom Positiven zum Negativen übergeht.

Der Krümmungshalbmesser

$$\gamma = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

wird im Punkt $M=0$, die Krümmung also unendlich gross, was auch der Fall sein muss, da die Curve, ohne in Bezug auf concave oder convexe Form ihre Lage gegen die Abscissenaxe zu ändern, doch die Richtung ihres Laufes selbst plötzlich ändert.

Wenn demnach

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{ oder } =\infty,$$

so findet ein Maximum oder Minimum von y statt, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt übergeht. Findet kein Zeichenwechsel statt, so ergibt sich weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern ein Wendepunkt.

4) Die Tangente am Wendepunkte oder am Kehrpunkte kann gegen die Abscissenaxe eine ganz willkührliche Lage haben, da man ja die Lage der letztern Linie beliebig ändern kann. Der erstere Punkt findet sich stets, wenn man

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{ oder } =\infty$$

setzt und $\frac{d^2y}{dx^2}$ vor und hinter dem gefundenen Punkte verschiedene Zeichen haben, letzterer hingegen, wenn die Zeichen unverändert bleiben.

Während

$$y=b+c(x-a)^{\frac{2}{3}} \text{ für } x=a,\ y=\text{Minimum}$$
$$y=b-c(x-a)^{\frac{2}{3}} \text{ - } x=a,\ y=\text{Maximum}$$

und in beiden Fällen einen Kehrpunkt M ergeben, erhalten wir aus

$$y=b+c(x-a)^{\frac{3}{5}}$$

für $x=a$ einen Wendepunkt, weil

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}c(x-a)^{\frac{3}{5}-2}=-\frac{6c}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$$
$$=\infty \text{ für } x=a$$

und weil

$$\text{für } x=a-h,\ \frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{6c}{25h^{\frac{7}{5}}}$$
$$\text{- } x=a+h,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{6c}{25h^{\frac{7}{5}}}.$$

Die Ordinate bleibt in beiden Fällen reell und die Curve erstreckt sich daher nach beiden Seiten hin von jenem Punkte aus.

Hätten wir dagegen die Gleichung

$$y = b + c(x-a)^{\frac{1}{2}}$$

so wird y imaginär für $x = a - h$, also endet die Curve mit dem kleinsten Werthe $x = a$, in welchem Falle $y = b$; hingegen für jeden Werth $x = a + h$ wird

$$y = b \pm ch^{\frac{1}{2}}$$

so dass jedem Werthe $a + h$ von x zwei Ordinaten entsprechen, welche unter sich um $2ch^{\frac{1}{2}}$ verschieden sind, wie in Taf. II. Fig. 13. in welcher M den Vereinigungspunkt beider Zweige ME und MD bildet.

Um die bisher gefundenen Relationen an einer bestimmten Curve darzustellen, denken wir uns den Kreis DFE (Taf. II. Fig. 14.), welcher auf der Linie DG fortrollt. Ein innerhalb der Peripherie gelegener Punkt R wird alsdann eine gestreckte Cycloïde beschreiben.

Setzt man

$$RC = a$$
$$EC = r$$

und ist der erzeugende Kreis nach HG gekommen, so dass, wenn

$$\angle DCF = v$$
$$GD = rv;$$

so wird der erzeugende Punkt sich jetzt in K befinden, indem $\angle JLH = v$. Die KM, senkrecht auf ED gefällt, sei die Ordinate y und $RM = x$ die Abscisse des Punktes K; alsdann ist

$$x = a - a \cos v,$$
$$y = rv + a \sin v;$$

hieraus

$$\frac{dx}{dv} = a \sin v, \quad \frac{d^2x}{dv^2} = a \cos v$$

$$\frac{dy}{dv} = r + a \cos v, \quad \frac{d^2y}{dv^2} = -a \sin v$$

und da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dv}}{\frac{dx}{dv}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dv} \cdot \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv} \cdot \frac{d^2x}{dv^2}}{\left(\frac{dx}{dv}\right)^3},$$

so wird, nach gehöriger Substitution:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r + a \cos v}{a \sin v}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a + r \cos v}{a^2 \sin v^3}.$$

Für $v = 0$, d. h. für den Punkt R der Curve, wird also

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

Die erstere Bedingung sagt, dass in R die Tangente der Curve RT senkrecht auf der Abscissenaxe ist.

Da ferner für

$$v = -\alpha,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{r + a\cos\alpha}{a\sin\alpha};$$

$$v = +\alpha,\ \frac{dy}{dx} = +\frac{r + a\cos\alpha}{a\sin\alpha};$$

so ist in diesem Punkt y ein **Minimum**, nämlich $= 0$.

So lange

$$a + r\cos v > 0,$$

bleibt $\frac{d^2y}{dx^2}$ **negativ**, also RK gegen RD **concav**. Für

$$a + r\cos v = 0 \text{ also } \cos v = -\frac{a}{r}$$

wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

und es tritt der Wendepunkt der Curve ein, indem für

$$a + r\cos v < 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ **positiv**, also die Curve gegen RD **convex** wird. Für den Wendepunkt hat man

$$x = a + \frac{a^2}{r} = \frac{a(r+a)}{r}.$$

Für $v = 180^\circ$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, mithin die Tangente wieder senkrecht auf RD. Ferner wird in diesem Punkte

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a\sin v}{r + a\cos v} = 0$$

und

$$\text{für } v = 180^\circ - \alpha,\ \frac{dx}{dy} = +\frac{a\sin\alpha}{r - a\cos\alpha};$$

$$\text{-}\quad v = 180^\circ + \alpha,\ \frac{dx}{dy} = -\frac{a\sin\alpha}{r - a\cos\alpha};$$

mithin $x = 2a$ ein **Maximum**.

Drücken wir, nach Elimination von v, y durch x aus, so wird

$$y = r\,.\,\text{arc}\cos\frac{a-x}{a} + a\sqrt{x(2a-x)}$$

und es würde also für $x > 2a$, y imaginär werden. In dem Punkte, der durch

$$v = 180^\circ$$

bestimmt wird, findet ein Zusammentreffen zweier Zweige der Curve statt, und in ihm wird

$$y = r\pi.$$

Da endlich für denselben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

und

$$\text{für } v = 180^\circ - \alpha, \ \frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{r \cos \alpha - a}{a^2 \sin \alpha^3} \text{ positiv;}$$

$$\text{„ } v = 180^\circ + \alpha, \ \frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{r \cos \alpha - a}{-a^2 \sin \alpha^3} \text{ negativ;}$$

so ist der gefundene Punkt gleichzeitig ein Wendepunkt, in welchem die Curve vom Convexen zum Concaven in Bezug auf die Abscissenaxe übergeht.

Von diesem Punkte aus geht ein neuer Zweig der Curve an, in welchem von $v = 180^\circ$ bis $v = 360^\circ$ dieselben Verhältnisse, welche wir für die beiden ersten Quadranten von v gefunden haben, in entgegengesetzter Reihefolge wiederkehren.

XVII.

Aufgabe.

Von
Herrn Doctor Anton Vállas
zu Wien.

Es sei

$$m_1 = m$$

$$m_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$$

$$m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

. . . .

$$m_k = \frac{m(m-1)\ldots\{m-(k-1)\}}{1.2\ldots k}$$

so hat man, wenigstens für jedes ganze positive m:

$$m_1 = m_1^2 - 2m_2$$
$$m_2 = m_2^2 - 2m_1 m_3 + 2m_4$$
$$m_3 = m_3^2 - 2m_2 m_4 + 2m_1 m_5 - 2m_6$$

. . . .

$$m_r = m_r^2 - 2m_{r-1}m_{r+1} + 2m_{r-2}m_{r+2}$$
$$- 2m_{r-3}m_{r+3} + 2m_{r-4}m_{r+4}$$

. . . .

$$(-)^{r-1} . 2m_1 m_{2r-1} (-)^r . 2m_{2r}.$$

Man verlangt den Beweis dieses Satzes.

XVIII.

Sammlung physikalischer Aufgaben nebst ihrer Auflösung. Zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht. Von Dr. Friedrich Kries, Herzogl. Sachsen-Coburg-Gothaischen Hofrath und Professor, mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede. Mit zwei Kupfertafeln. Jena, Friedrich Frommann. 1843. 8. 15 Sgr.

Von

Herrn Professor L. Kunze

zu Weimar.

Die Physik bietet für die Bildung von Uebungsaufgaben, die mit Hülfe der elementaren Mathematik aufgelöset werden können,

inen so reichen Stoff dar, dass man sich billig wundern muss, ie für solche Zwecke bis jetzt so wenig benutzt zu sehen. Ohne hier die Ursachen dieser Erscheinung näher zu erörtern, wird wohl Niemand die Nützlichkeit einer Sammlung physikalischer Aufgaben in Abrede stellen, wenn nur die Auswahl und die Behandlung derselben dem Bedürfniss der Lernenden gehörig angepasst ist. Und wir können das Letztere von der vorliegenden Sammlung mit gutem Grunde behaupten. — Sie wird gewiss allen Lehrern der Mathematik und Physik an Schulen eine willkommene Erscheinung sein, insonderheit aber von Denen freundlich begrüsst werden, die nach den weit verbreiteten Lehrbüchern des ehrwürdigen Herrn Verfassers ihren Unterricht ertheilen.

Die ganze Sammlung enthält 318 Aufgaben, nebst den vollständigen Auflösungen. Jene nehmen 43 Seiten, diese 115 Seiten ein; welche zwei Zahlen sich beinahe wie 3 zu 8 verhalten. Die Aufgaben sind mit fortlaufenden Nummern versehen, sonst aber nach zwölf verschiedenen Ueberschriften geordnet, die wir zur näheren Bezeichnung des Inhaltes hier namhaft machen wollen.

I. Bestimmung des specifischen Gewichts der Körper (15 Aufgaben).

II. Bewegung der Körper (13 Aufgaben).

III. Fall der Körper (Schwerpunkt; schiefe Ebene; Pendel; 43 Aufgaben).

IV. Stoss der Körper (49 Aufgaben).

V. Gleichgewicht fester Körper (23 Aufgaben).

VI. Gleichgewicht flüssiger Körper (23 Aufgaben).

VII. Verdichtung und Verdünnung elastischer Flüssigkeiten (9 Aufgaben).

VIII. Gleichgewicht fester und flüssiger Körper (16 Aufgaben).

IX. Archimedische Aufgabe (mit einigen anderen, zusammen 7).

X. Das Licht betreffend (76 Aufgaben).

XI. Die Wärme betreffend (7 Aufgaben).

XII. Gegenstände der angewandten Naturlehre betreffend (math. Geographie; sphärische Astronomie; Höhenmessen mit dem Barometer; 37 Aufgaben).

Wenn wir uns nun erlauben, dieser Inhaltsanzeige einige Bemerkungen über die Aufgaben selber beizufügen, so geschieht es lediglich in dem Interesse für die gute Sache und in der Hoffnung, dass diese Bemerkungen in dem Archiv keine unpassende Stelle finden werden.

1) Die meisten von den Aufgaben I. sollten mit den verwandten VIII. zusammenstehen; denn der Schüler kann sie nicht lösen, wenn er den hydrostatischen Satz vom Auftrieb nicht kennt.

2) Bei den Auflösungen der Aufgaben 13, 14 und 15 scheint es uns unnöthig, das absolute Gewicht p des Körpers in Betracht zu ziehen, da bei einerlei Volumen die absoluten Gewichte sich verhalten wie die specifischen; p fällt auch immer aus der Rechnung heraus. Wir würden die Aufgabe 14 noch etwas allgemeiner so vortragen: In einem Gefäss befindet sich eine Flüssigkeit A; darüber steht eine leichtere B; eine Kugel C (oder ein Körper von beliebiger Gestalt) sinkt in B unter und schwimmt auf A: man fragt, mit welchem Theil $=x$ die Kugel C in A eintaucht. Sind nun von A, B, C die specifischen Gewichte a, b, c, so heisst

das: wenn eine Wasser-Kugel $=1$ wiegt, so wiegt eine gleich grosse

$$A\text{-Kugel} = a$$
$$B\text{-Kugel} = b$$
$$C\text{-Kugel} = c$$

$$\text{und das Segment } x \text{ der } A\text{-Kugel} = ax$$
$$\ldots\ldots 1-x \text{ der } B\text{-Kugel} = b(1-x).$$

Demnach ist für den Zustand des Gleichgewichts $ax+b(1-x)=c$, folglich

$$x = \frac{c-b}{a-b}.$$

Der Herr Verfasser hat b für das hiesige c und 1 für das hiesige b gesetzt. In der 13. Aufgabe ist nun unmittelbar $x = \frac{6,8}{12,6} = \frac{34}{63} = 0,53968\ldots$; und in der 15. Aufgabe, nach der Formel $c = x(a-b)+b$, das gesuchte $c = 0,6 \,.\, 0,9987 + 0,0013 = 0,60052$.

3) Bei dem ballistischen Problem, Nr. 37., sagt der Herr Verf. in der Auflösung: „Da ein schief in die Höhe geworfener Körper, ohne den Widerstand der Luft, eine Parabel beschreibt, so muss hier die Theorie dieser Linie berücksichtiget werden.“ Der Herr Verf. geht nun von der Gleichung der Parabel aus und beruft sich dabei auf sein bekanntes Lehrbuch der reinen Mathematik (6. Aufl.). Er hat jedoch weder in diesem, noch in seinem Lehrbuch der Physik (5. Aufl.) nachgewiesen, dass die Bahn eines schief aufwärts geworfenen Körpers eine Parabel sein müsse. Es wäre daher wohl zweckmässig gewesen, das Fehlende hier nachzuholen. Für die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe scheint uns Bekanntschaft mit der Parabel unmittelbar gar nicht nothwendig, indem man sich an die ursprüngliche Betrachtung des Gegenstandes hält. Referent glaubt nichts Unnützes zu thun, wenn er in Kürze mittheilt, wie er seinen Schülern die Sache vorzutragen pflegt. In Fig. 2. des Buches sei $AD = k$ die Wurfsgeschwindigkeit in 1 Secunde. Man setze $AP = p$ und $DP = q$; $Dm = g$ sei der Fallraum in der ersten Secunde. Wenn nun die Punkte D', P', m' für eine Zeit von t Secunden eben das bedeuten, was D, P, m für 1 Secunde sind, so hat man

$$AD' = k\,.\,t;\ AP' = p\,.\,t;\ D'P' = q\,.\,t;\ D'm' = g\,.\,tt$$

und es gilt demnach für die Höhe $m'P' = h$ des geworfenen Körpers, nach Ablauf von t Secunden, die Gleichung

$$h = q\,.\,t - g\,.\,tt = (q - g\,.\,t)t.$$

Für den Endpunkt B der Bahn ist $h=0$, folglich $g\,.\,t = q$ und $t = \frac{q}{g}$. Die Abscisse AP' wächst nun an zur Weite des Wurfs AB, wenn die Zeit $t = \frac{q}{g}$ ist; folglich ist

$$AB = \frac{p \cdot q}{g}.$$

Da p und q Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind, dessen Hypotenuse k constant ist, so wird das Produkt $p \cdot q$ ein Grösstes, wenn $p = q$ ist. Demnach findet die grösste Weite bei einem Elevationswinkel DAP von 45° statt, und sie ist $= \frac{kk}{2g}$, weil in diesem Falle $p \cdot q = \frac{1}{2}kk$ ist. Für zwei Elevationen, die einander zu 90° ergänzen, also für $45° + w$ und $45° - w$, werden bloss die Katheten p und q mit einander vertauscht; zu diesen Elevationen gehören also gleiche Wurfweiten. Zur Elevation 15° oder 75° gehört die halbe grösste Wurfweite; dies folgt leicht aus einer einfachen geometrischen Construction. Die Höhe $h = (q - g \cdot t)t$ wird ein Grösstes, wenn $\frac{h}{g} = (\frac{q}{g} - t)t$ eines ist. Das Product zweier veränderlicher Zahlen $\frac{q}{g} - t$ und t, die eine beständige Summe $= \frac{q}{g}$ geben, bekömmt aber seinen grössten Werth, wenn die Factoren einander gleich sind, $\frac{q}{g} - t = t$, woraus folgt $t = \frac{q}{2g}$. Die grösste Höhe gehört also zur halben Zeit des Wurfs. Nach dieser halben Zeit ist der Körper senkrecht über der Mitte von AB. Darum gehört die grösste Höhe SC auch zur halben Wurfweite und sie wird erhalten, wenn man in $h = q \cdot t - g \cdot tt$ für t an den Platz setzt $\frac{q}{2g}$. Also ist

$$SC = \frac{qq}{2g} - \frac{qq}{4g} = \frac{qq}{4g}.$$

Bei der Elevation 45° ist $qq = \frac{1}{2}kk$, folglich ist $SC = \frac{kk}{8g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{kk}{2g}$, d. h. die grösste Höhe beträgt in diesem Falle immer ein Viertel von der grössten Weite. Für andere Elevationen, als die in der Aufgabe vorkommen, muss man natürlich die trigonometrischen Tafeln zu Hülfe nehmen; man hat nämlich, den Elevationswinkel $= u$ gesetzt,

$$p = k \cdot \cos u; \quad q = k \cdot \sin u.$$

Bei gleichen Zeiten vor und nach der halben Zeit des Wurfs erlangt der Körper gleiche Höhe; dies folgt, wenn man in $h = q \cdot t - g \cdot tt$ für t zuerst $\frac{q}{2g} - t'$ und dann $\frac{q}{2g} + t'$ setzt. Da aber zu solchen Zeiten auch gleiche Entfernungen CP disseits und jenseits von C gehören, so ist klar, dass die ganze Wurfslinie ASB durch SC in zwei congruente Theile AS, SB getheilt wird. Man kann nun auch leicht zeigen, dass die Wurfslinie eine Parabel sei. Denkt man sich nämlich die Bewegung in jedem Punkte der Bahn aus einer verticalen und horizontalen zusammengesetzt, so ist klar, dass in S die verticale bis auf Null abgenommen hat und nur noch die horizontale vorhanden ist, in Folge

welcher der Körper eine halbe Parabel SB beschreibt, wie in allen Elementarbüchern der Physik gewiesen wird. Will man aber lieber rechnen, so sehe man in Fig. 1. unseres Buches $SN = x$ als Abscisse und $MN = y$ als Ordinate an, und man erhält dann aus dem Vorigen leicht die Werthe

$$x = \frac{qq}{4g} - q \cdot t + g \cdot tt, \quad y = \frac{p \cdot q}{2g} - p \cdot t;$$

woraus, wenn man y quadrirt und $\frac{pp}{g}$ als gemeinschaftlichen Factor absondert, folgt

$$yy = \frac{pp}{g} \cdot x.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, die $\frac{pp}{g}$ zum Parameter hat.

4) Die Aufgabe 63 hat der Herr Verf. nur mit Hülfe der Differentialrechnung behandelt; eine elementare Auflösung scheint ihm nicht beigefallen zu sein. Wir wollen hier eine solche mittheilen. Es handelt sich darum, in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen eine Kathete a gegeben ist, die Hypotenuse x und die andere Kathete y so zu bestimmen, dass $\frac{xx}{y}$ ein Kleinstes werde. Errichtet man nun in dem Endpunkte von x, der y gegenüberliegt, auf x eine Senkrechte, die der verlängerten y begegnet, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck, worin a senkrecht auf der Hypotenuse, x eine Kathete und y der eine der beiden Abschnitte ist, in welche die Hypotenuse durch a getheilt wird. Demnach ist die Hypotenuse selber $= \frac{xx}{y}$. Aber in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Höhe a gegeben ist, fällt die Hypotenuse offenbar dann am kleinsten aus, wenn sie von a halbirt wird, d. h. wenn $y = a$ und $x = a\sqrt{2}$ ist. Eine andere elementare Auflösung bietet die Trigonometrie dar (vergl. Seite 90, unten).

5) Für die Aufgabe 129: auf einer Waage mit ungleichen Armen das richtige Gewicht eines Körpers zu finden, kann die Betrachtung wohl etwas einfacher werden. Die ungleichen Arme seien a, a'; das wahre Gewicht des Körpers x; die ungleichen Gegengewichte p, p'. Dann ist $ax = a'p'$; $a'x = ap$; folglich $aa'xx = aa'pp'$ und $xx = pp'$.

6) Auch die Auflösung der Aufgabe 141 lässt sich kürzer geben. Man findet sofort die Gleichung (Fig. 15. des Buches)

$$P = p \cdot BH \cdot \frac{CE}{CH}$$

oder, wenn man das, womit p multiplicirt ist, z nennt, $P = p \cdot z$; und hier soll P, mithin z, ein Grösstes werden. Es ist aber

$$CH : CE = BH : z$$

folglich muss z eine Senkrechte von B auf CH sein. Diese Senkrechte fällt aber offenbar dann am grössten aus, wenn CH um C

so gedreht wird, dass BC auf CH senkrecht ist (Fig. 16. des Buches). Will man zur Differentialrechnung seine Zuflucht nehmen, so gewinnt die Auflösung durch Einführung des Winkels bei H an Eleganz. Nennen wir diesen u, so finden wir leicht

$$P = p(c \,.\, \sin u + a \,.\, \cos u).$$

Und hier wird der eingeklammerte Ausdruck ein Grösstes, wenn $\cot u = \frac{a}{c}$. Da nun stets auch $\cot u = \frac{x}{a}$ ist, so erhalten wir $x = \frac{aa}{c}$, wie im Buche.

7) Bei der Aufgabe 143 findet unter derselben Bedingung ein Maximum statt, wie bei der Aufgabe 63 ein Minimum, weshalb die elementare Lösung, die wir oben für 63 mitgetheilt haben, auch hier in Anwendung kommen kann.

8) Unter den 76 Aufgaben, die das Licht betreffen, kommen mehrere vor, die sich recht zweckmässig beim Unterricht in der Stereometrie benutzen lassen, z. B. Nr. 220. für den Wechselschnitt beim Kegel. Wir haben überhaupt die Bemerkung gemacht, dass die Schüler in den physikalischen Lehrstunden weniger Neigung zeigen, einen Gegenstand aus der Physik ausführlich mit Hülfe der Mathematik zu verfolgen; während sie mit grossem Interesse bei einer physikalischen Aufgabe verweilen, die gelegentlich in den mathematischen Lehrstunden als Anwendung eines vorgetragenen Satzes behandelt wird.

9) Bei Gelegenheit der Aufgabe 229 mag die etwas schwerere hier genannt werden: Auf einer geraden Linie sind fünf beliebige Strecken AB, BC, CD, DE, EF gegeben; man soll den Standpunkt P finden, von welchem aus die beiden äussersten Strecken AB, EF und die mittlere CD unter gleichen Sehewinkeln erscheinen.

10) Bei der Aufgabe 254 können die Sinusverhältnisse füglich entbehrt werden; die Auflösung folgt kürzer aus einem bekannten Satze vom Dreieck mit einem halbirten Winkel.

11) Die Aufgaben 272 und 273 über die Ortsveränderung des Bildes bei paralleler Bewegung des ebenen Spiegels hätten etwas kürzer behandelt werden können. Die Auflösung beruht ganz einfach darauf, dass zwischen $a + b$ und $a - b$ die Differenz $= 2b$ ist.

12) Die letzte Aufgabe: „In welcher Entfernung von dem Mittelpunkt der Erdkugel wird ein Körper, der sich zwischen ihr und dem Monde befindet, von beiden Weltkörpern gleich stark angezogen?" lässt eine etwas elegantere Auflösung zu, wobei die Form einer unreinen quadratischen Gleichung vermieden wird. Ist nämlich die Entfernung der beiden Weltkörper $= 60$ Erdhalbmesser; die Masse des Mondes $= \frac{1}{80}$ der Erdmasse (nach Hansen); die gesuchte Entfernung vom Mittelpunkte des Mondes $= x$: so ist nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz

$$\frac{1}{(60-x)^2} = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad 80x^2 = (60-x)^2, \quad x\sqrt{80} = 60 - x,$$

$$x = \frac{60}{\sqrt{80}+1} = \frac{60(\sqrt{80}-1)}{79} = 6{,}0336\ldots$$

So viel von dem Inneren des Buches. Was das Aeussere desselben anlanget, so sind Druck und Papier gut zu nennen, und zwei saubere Kupfertafeln (aus der Kunstanstalt von Herrn A. Mädel in Weimar) gereichen dem Buche zur besonderen Zierde. Dass ausser den angezeigten Druckfehlern noch einige wenige stehen geblieben sind, wird man mit Schonung beurtheilen, da es gar zu leicht möglich ist, dass man bei der Correctur in den Zahlen und Formeln etwas übersieht. Die folgenden Fehler sind von dem Herrn Verf. selber, nach dem völligen Abdrucke des Buches, noch aufgefunden worden:

S. 9 Z. 12 v. u. lies 45 statt 25
- 11 - 4 v. u. - 20 - 30
- 44 - 5 v. u. - der statt die
- 53 ist immer 15,095 st. 15,1 zu setzen
- 54 Z. 11 l. 15,095 : 930 st. 15,1 — 930
- 60 - 10 v. u. l. $AD = BC = y$ st. $AD = y$; auch fehlen in der 6ten Figur die Linien AD und CD.
- 63 Z. 8 ist nach „Gleichung" einzuschalten „und der"
- 73 in der Aufgabe 94. 2) ist in den Ausdrücken für sin z und sin w im Zähler $2G^2$ wegzustreichen (wie aus 94. 1. sogleich erhellet, wenn $g = G$ gesetzt wird)
- 77 Z. 3 l. 122° 23′ st. 165° 31′
  - 12 v. u. l. 15,88 st. 18,61 und Z. 8 l. 125° 28′ st. 175° 4′
- 78 - 3 l. 21′ 3″ st. 22′ 48″.

Referent hat durch die vorstehenden Bemerkungen (die etwas mehr Raum fordern, als sonst im Archiv bei der Anzeige eines Buches üblich ist *) das Interesse seiner verehrten Herren Collegen für die treffliche Aufgabensammlung, die uns hier geboten wird, in Anspruch nehmen wollen. Dass er sich selber lebhaft dafür interessirt und dem Buche eine fruchtbringende Verbreitung wünscht, mag die Ausführlichkeit dieser Bemerkungen, wenn auch nicht rechtfertigen, doch entschuldigen.

---

*) Auch ausführlichern, so werthvolle Bemerkungen wie die vorliegende enthaltenden Recensionen werde ich immer sehr gern einen Platz in dem Archive einräumen. G.

XIX.

Einiges über die Eulerischen Integrale der zweiten Art.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

§. 1.

Im 3ten Hefte des 2ten Bandes dieses Archivs hat in Nr. XXV. der Herr Herausgeber mehrere der neuesten Entwickelungen in der interessanten Lehre von den Eulerischen Integralen mitgetheilt. Aus den dort aufgestellten Formeln lassen sich noch einige wichtige Sätze sehr kurz ableiten, von denen ein Theil auf anderem weniger einfachen Wege schon gefunden worden ist.

Wir nehmen unseren Auslauf von der in jener Abhandlung §. 19. Nr. 7. entwickelten Formel:

$$\frac{d\,.\,l\Gamma(a)}{da}=\int_0^\infty\left\{e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right\}\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{dx}{x}-\int_0^\infty\frac{dx}{x(1+x)^a}.$$

Nimmt man im zweiten Integrale $\frac{1}{1+x}=y$, also $x=\frac{1}{y}-1$, so wird $y=0$ und $y=1$, wenn $x=\infty$ und $x=0$ geworden ist, und man erhält

$$\frac{d\,.\,l\Gamma(a)}{da}=\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{dx}{x}-\int_0^1\frac{y^{a-1}dy}{1-y}.\quad(1)$$

eine Formel, die mancherlei Anwendungen fähig ist.

Man bemerke zunächst, dass das erste Integral auf der rechten Seite von a ganz unabhängig ist; schreibt man daher diese Gleichung für $a=1+\alpha$ und $a=1+\beta$ hin, so fällt bei der Subtraktion beider Gleichungen das erste transcendente Integral weg und es bleibt blos die Differenz der beiden anderen algebraischen Integrale stehen, welche man wegen der gleichen Integrationsgränzen in ein einziges Integral zusammenziehen kann. Man erhält so die Gleichung:

$$\frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha}-\frac{d\,.\,l\Gamma(1+\beta)}{d\beta}=\int_0^1\frac{y^\beta-y^\alpha}{1-y}\,dy \quad (2)$$

welche man sonst auf einem Umwege ableitete *).

§. 2.

Wir wollen jetzt folgende beiden Integrale betrachten:

$$\int_{1-\varepsilon}^{n} e^{-x}\,.\,\frac{dx}{x} \text{ und } \int_0^{\varepsilon}\frac{ya\,dy}{1-y}$$

in welchen n eine beliebige Zahl, ε einen positiven ächten Bruch bedeuten soll.

Entwickelt man im ersten e^{-x} nach Potenzen von x, so wird durch Integration der einzelnen Glieder:

$$\int_{1-\varepsilon}^{n} e^{-x}\,\frac{dx}{x}=ln-\tfrac{1}{1}\,.\,\frac{n}{1}+\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{n^2}{1\,.\,2}-\tfrac{1}{3}\,.\,\frac{n^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$
$$-l(1-\varepsilon)+\tfrac{1}{1}\,.\,\frac{1-\varepsilon}{1}-\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{(1-\varepsilon)^2}{1\,.\,2}+\ldots.$$

Es fragt sich jetzt, was aus dieser Gleichung wird, wenn man n ins Unendliche wachsen lässt. Man erfährt diess leicht, wenn man sich aus der Theorie des Integrallogarithmus erinnert, dass

$$li(e^{-u})=\int_{\infty}^{u} e^{-x}\,.\,\frac{dx}{x}$$

ist. Die Entwickelung giebt hier, wenn wir das Unendliche als Lim einer grossen Zahl n betrachten:

$$\text{li}\,(e^{-u})=lu-\tfrac{1}{1}\,.\,\frac{u}{1}+\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{u^2}{1\,.\,2}-\ldots.$$
$$+\text{Lim}\,\{-ln+\tfrac{1}{1}\,.\,\frac{n}{1}-\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{n^2}{1\,.\,2}+\ldots.\}.$$

Der zweite Theil ist die berühmte Constante 0,5772156 deren Bestimmung in der Theorie des Integrallogarithmus eine nicht unerhebliche Schwierigkeit war, welche Mascheroni auf sinnreiche Weise gehoben hat. Vergleichen wir diess mit dem Werthe unseres Integrales, so ist durch Entwickelung von $l(1-\varepsilon)$

$$\left.\begin{aligned}\int_{1-\varepsilon}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}&=-C+\frac{\varepsilon}{1}+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}+\ldots.\\&+\tfrac{1}{1}\,.\,\frac{1-\varepsilon}{1}-\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{(1-\varepsilon)^2}{1\,.\,2}+\ldots.\end{aligned}\right\}C=0{,}577\ldots,\quad(3)$$

Setzen wir ferner im zweiten Integrale, welches wir betrachten, für $\frac{1}{1-y}$ die Reihe: $1+y+y^2+y^3+\ldots$, so ergiebt sich

*) Legendre: Traité des fonctions elliptiques, tome II. Chap. XIII.

$$\int_0^\varepsilon \frac{y^\alpha dy}{1-y} = \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\varepsilon^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{\varepsilon^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \ldots (4).$$

Multipliziren wir die Gleichung (3) mit ε^α und ziehen die vorstehende davon ab, so kommt

$$\varepsilon^\alpha \int_{1-\varepsilon}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} - \int_0^\varepsilon \frac{y^\alpha dy}{1-y} = \varepsilon^\alpha\{-C + \tfrac{1}{1}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\varepsilon)^2}{1.2} + \ldots\}$$

$$+ \varepsilon^{\alpha+1}(1 - \frac{1}{\alpha+1}) + \varepsilon^{\alpha+2}(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2}) + \ldots$$

$$= \varepsilon^\alpha\{-C + \tfrac{1}{1}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\varepsilon)^2}{1.2} + \ldots\}$$

$$+ \tfrac{1}{1}\cdot\frac{\alpha\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\varepsilon^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \ldots$$

Während die beiden Reihen (3) und (4) nur für positive ächt gebrochene ε convergirten, so convergirt die vorstehende auch noch für $\varepsilon = 1$; wir erhalten für diesen Werth:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{y^\alpha dy}{1-y} = -C + \tfrac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+3} + \ldots$$

Bringen wir auf der linken Seite die Gleichung (1) in Anwendung und transponiren die Constante $C = 0{,}5772156$ so erhalten wir das elegante Resultat:

$$C + \frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha} = \tfrac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+3} + \ldots\ldots (5)$$

eine für jedes positive α und für negative α, deren absoluter Werth kleiner als die Einheit ist, convergirende Reihe.

Sobald α zwischen den Gränzen $+1$ und -1 liegt, lässt sich jedes einzelne Glied in eine convergirende Reihe umwandeln und man erhält

$$C + \frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha} = \tfrac{1}{1}\{\alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4 + \ldots\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\{\frac{\alpha}{2} - (\frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\alpha}{2})^3 - (\frac{\alpha}{2})^4 + \ldots\}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\{\frac{\alpha}{3} - (\frac{\alpha}{3})^2 + (\frac{\alpha}{3})^3 - (\frac{\alpha}{3})^4 + \ldots\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nimmt man diese Reihen in vertikaler Richtung zusammen und bezeichnet mit S_n die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

so ergiebt sich:

$$C+\frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha}=S_2\alpha-S_3\alpha^2+S_4\alpha^3-\ldots,\ +1>\alpha>-1.\ (6)^{*})$$

Multiplizirt man die Gleichung mit $d\alpha$ und integrirt, so ist

$$l\Gamma(1+\alpha)=-C\alpha+\tfrac{1}{2}S_2\alpha^2-\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3+\tfrac{1}{4}S_4\alpha^4-\ldots,\ +1>\alpha>-1\ (7).$$

Eine Constante ist nicht beizufügen, weil für $\alpha=0$, $l\Gamma(1)=l1=0$ wird und die rechte Seite sich ebenfalss annullirt. Für negative α ist

$$l\Gamma(1-\alpha)=C\alpha+\tfrac{1}{2}S_2\alpha^2+\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3+\tfrac{1}{4}S_4\alpha^4+\ldots,\ +1>\alpha>-1.\ (8).$$

Da die Zahlen S_2, S_3, S_4 u. s. w. immer weniger von der Einheit differiren, je grösser der Index ist, so übersieht man leicht, dass die Gleichung (7) auch noch für $\alpha=+1$ gilt, was bei Formel (8) nicht der Fall ist. Aus jeder von beiden lässt sich C bestimmen, wenn man α so nimmt, dass $l\Gamma(1\pm\alpha)$ bekannt ist. Diess findet in (7) statt, wenn, man $\alpha=+1$ setzt, weil dann $l\Gamma(1)=0$ wird und in (8) für $\alpha=+\frac{1}{2}$, wobei $l\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}l\pi$ ist.

Durch Addition erhält man

$$l\Gamma(1+\alpha)+l\Gamma(1-\alpha)=l\{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\}=l\{\alpha\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\}$$

oder

$$l\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}=S_2\alpha^2+\tfrac{1}{2}S_4\alpha^4+\tfrac{1}{3}S_6\alpha^6+\ldots$$

Durch Substitution dieses Werthes erhöht man die Convergenz der Reihen (7) und (8) und bekommt:

$$l\Gamma(1+\alpha)=\tfrac{1}{2}l\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}-C\alpha-\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3-\tfrac{1}{5}S_5\alpha^5-\ldots\ (9)$$

$$l\Gamma(1-\alpha)=\tfrac{1}{2}l\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}+C\alpha+\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3+\tfrac{1}{5}S_5\alpha^5+\ldots\ (10).$$

§. 3.

Die Formel (5) kann auch dazu dienen, die Gammafunktion $\Gamma(1+\alpha)$ in ein unendliches Produkt zu verwandeln. Man kann nämlich jene Gleichung so schreiben:

$$\begin{aligned}C+\frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha}&=\left(\tfrac{1}{1}-\frac{1}{\alpha+1}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+2}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\frac{1}{\alpha+3}\right)+\ldots\\&=\quad 1\quad+\quad\tfrac{1}{2}\quad+\quad\tfrac{1}{3}\quad+\ldots\\&\quad-\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+2}-\frac{1}{\alpha+3}-\ldots\end{aligned}$$

---

*) Legendre geht gerade den umgekehrten Weg. Er findet zuerst diese Formel und reduzirt die Gleichung (5) auf dieselbe. Traité des fonct. ell. tome II. chap. IX. et X.

Bezeichnen wir die erste Reihe mit K, so ist durch Multiplikation mit $d\alpha$ und Integration zwischen den Gränzen $\alpha = \alpha$ und $\alpha = 0$:

$$C\alpha + l\Gamma(1+\alpha) = K\alpha - l(1+\alpha) - l(2+\alpha) - l(3+\alpha) - \ldots \\ + l1 \quad + l2 \quad + l3 \quad + \ldots$$

oder

$$l\Gamma(1+\alpha) = (K-C)\alpha - l(1+\frac{\alpha}{1}) - l(1+\frac{\alpha}{2}) - l(1+\frac{\alpha}{3}) - \ldots$$

Bemerken wir, dass $(K-C)\alpha = le^{(K-C)\alpha}$ ist und gehen von den Logarithmen auf die Zahlen zurück, so ergiebt sich

$$\Gamma(1+\alpha) = \frac{e^{(K-C)\alpha}}{(1+\frac{\alpha}{1})\,(1+\frac{\alpha}{2})\,(1+\frac{\alpha}{3})\ldots\ldots}$$

und wenn wir uns an den Werth von K erinnern

$$\Gamma(1+\alpha) = e^{-C\alpha}\,\frac{e^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots)\alpha}}{(1+\frac{\alpha}{1})\,(1+\frac{\alpha}{2})\,(1+\frac{\alpha}{3})\ldots}$$

oder auch

$$e^{C\alpha}\Gamma(1+\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1}}\cdot\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{e^{\frac{\alpha}{3}}}{1+\frac{\alpha}{3}}\ldots\ldots \quad (12)$$

Schreibt man diese Gleichung auch für negative α hin und multiplizirt beide, so erhält man die bekannte unendliche Faktorenfolge für $\sin \alpha\pi$.

Nimmt man in (12) $\alpha = 1$ und dann beiderseits die natürlichen Logarithmen, so ergiebt sich

$$C = l(\tfrac{1}{2}e) + l(\tfrac{2}{3}e^{\frac{1}{2}}) + l(\tfrac{3}{4}e^{\frac{1}{3}}) + \ldots\ldots \quad (13).$$

Die Reihe ist hinsichtlich ihres Bildungsgesetzes merkwürdig, zur praktischen Berechnung indessen unbrauchbar wegen der sehr geringen Convergenz. Durch eine kleine Umwandlung erhält man hieraus eine schon bekannte Eigenschaft von C. Gehen wir nämlich bis zu einem $n$ten Gliede, so ist

$$C = \text{Lim}\,\{l(\tfrac{1}{2}e) + l(\tfrac{2}{3}e^{\frac{1}{2}}) + l(\tfrac{3}{4}e^{\frac{1}{3}}) + \ldots + l(\tfrac{n-1}{n}\,e^{\frac{1}{n-1}})\}$$

oder wenn man alle Logarithmen auflöst:

$$C = \text{Lim}\left\{\begin{array}{l} l\tfrac{1}{2} + l\tfrac{2}{3} + l\tfrac{3}{4} + \ldots + l\frac{n-1}{n} \\ + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} \end{array}\right\}$$

Die erste Reihe ist $= l(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{n-1}{n}) = l(\frac{1}{n})$, mithin

$$C = \text{Lim}\ \{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-ln\}. \ (14)$$

Man könnte leicht einen allgemeineren Satz dieser Art aufstellen, wenn man in Formel (11) α als positiv und ganz annimmt. Er ist indessen von keiner besonderen Bedeutung.

§. 4.

Bezeichnen wir $\frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha}$ für den Augenblick mit $f(\alpha)$, so ergiebt sich aus Formel (5) für $\alpha=0$, $f(0)=-C$. Nehmen wir daher in Gleichung (2) $\beta=0$, so ist

$$f(\alpha)+C=\int_0^1\frac{1-y^\alpha}{1-y}\,dy$$

oder, wenn wir uns an die Bedeutung von $f(\alpha)$ erinnern und im Integral x für y setzen,

$$\frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha}=-C+\int_0^1\frac{1-x^\alpha}{1-x}\,dx. \ (15)$$

Das Integral kann jederzeit leicht ausgeführt werden. Denn was auch α sein möge, so kann man es durch die gehörige Substitution für x immer auf die Form

$$\int_0^1\frac{z^m-z^n}{1-z^p}\,dz$$

bringen, worin m, n, p positive ganze Zahlen sind. Man kennt aber den unbestimmten Werth eines solchen Integrales, folglich auch den zwischen den Gränzen 0 und 1. Man hat nun ferner:

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x}\,lx\,dx=\Gamma'(\mu+1)=\Gamma(\mu+1)\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}$$

$$=\Gamma(\mu+1)\frac{d\,.\,l\Gamma(\mu+1)}{d\mu}$$

und mit Hülfe der Gleichung (15)

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x}\,lx\,dx=\Gamma(\mu+1)\left[-C+\int_0^1\frac{1-x^\mu}{1-x}\,dx\right] \ (16)$$

wodurch der Werth des Integrals links jederzeit gefunden werden kann. Für $\mu=0$ hat man sehr einfach

$$\int_0^\infty e^{-x}\,lx\,dx=-C=-(0{,}5772156\,.\,.) \quad (17).$$

Man kann sich von dem Integral (16) zu einem allgemeineren erheben, indem man kx für k setzt, wo k eine willkührliche aber **positive** Grösse ist. Die linke Seite wird dann:

$$= k^{\mu+1} lk \int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, dx + k^{\mu+1} \int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, lx\, dx$$

$$= \quad lk \,.\, \Gamma(\mu+1) \quad + k^{\mu+1} \int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, lx\, dx,$$

und durch Vergleichung mit der rechten Seite in (16) findet man nun

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, lx\, dx = \frac{\Gamma(\mu+1)}{k^{\mu+1}} \left[-C - lk + \int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x}\, dx\right] \quad (18)$$

und dieses Resultat ist allgemeiner, weil darin eine willkührliche Constante vorkommt.

Ein Paar bemerkenswerthe spezielle Fälle sind folgende. Für $\mu = -\frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty e^{-kx} \,.\, \frac{lx}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} \left[-C - lk - 2l2\right];$$

oder für $x = t^2$:

$$\int_0^\infty e^{-kt^2}\, lt\, dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{k}} (lk + C + 2l2) \quad (19).$$

Ist ferner in (18) μ eine ganze positive Zahl $= n$, so hat man $\Gamma(n+1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$; ferner

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\, dx = \int_0^1 (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})\, dx$$

$$= \quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Folglich ist:

$$\int_0^\infty x^n e^{-kx}\, lx\, dx = \frac{n!}{k^{n+1}} \left[-C - lk + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right] \quad (20).$$

Daraus lässt sich leicht ein in die Differenzialrechnung gehörendes Theorem ableiten. Wenn man nämlich in (18) $\mu = 0$ setzt, so ist

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, lx\, dx = -\frac{c}{k} - \frac{lk}{k}.$$

Differenziirt man diese Gleichung n mal nach k, so erhält man leicht

$$\int_0^\infty x^n e^{-kx}\, lx\, dx = -\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{k^{n+1}}\, C - (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} \left(\frac{lk}{k}\right).$$

Vergleicht man diess mit der Formel (20), so wird

$$(-1)^n \,.\, \frac{d^n}{dk^n} \left(\frac{lk}{k}\right) = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{k^{n+1}} \left[lk - \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right] \quad (21).$$

§. 5.

Ein anderweit bemerkenswerthes Resultat lässt sich auf folgende Weise aus Formel (2) ableiten. Man setze $\alpha = \mu + u$, $\beta = \nu + u$. wo μ und ν für die Differenziation constant bleiben sollen, so ist:

$$\frac{d \,.\, l\Gamma(1+\mu+u)}{du} - \frac{d \,.\, l\Gamma(1+\nu+u)}{du} = \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, x^u dx.$$

Es werde nun beiderseits mit du multiplizirt und nach u innerhalb der Gränzen $u = \alpha$, $u = \beta$ integrirt, so kommt:

$$l \,.\, \frac{\Gamma(1+\mu+\alpha)}{\Gamma(1+\mu+\beta)} - l\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha)}{\Gamma(1+\nu+\beta)} = \int_\beta^\alpha du \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, x^u dx.$$

Kehren wir auf der rechten Seite die Ordnung der Integration um und integriren zuerst nach u, so wird das Integral

$$= \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, dx \int_\beta^\alpha x^u du = \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, dx\, \frac{(x^\alpha - x^\beta)}{lx}$$

$$= \int_0^1 \frac{(x^\alpha - x^\beta)\;(x^\mu - x^\nu)}{1-x} \,.\, \frac{dx}{l\frac{1}{x}}.$$

Vergleichen wir diess mit der linken Seite, so ist

$$\int_0^1 \frac{(x^\alpha - x^\beta)\;(x^\mu - x^\nu)}{1-x} \,.\, \frac{dx}{l\frac{1}{x}} = l\,\frac{\Gamma(1+\mu+\alpha)\;\Gamma(1+\nu+\beta)}{\Gamma(1+\mu+\beta)\;\Gamma(1+\nu+\alpha)} \quad (22).$$

eine Formel, welche sich ebenso sehr durch ihre Allgemeinheit, als durch ihren symmetrischen Bau auszeichnet.

XX.

Ueber das Fundamentalproblem der Katoptrik und Dioptrik.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Die neuesten Arbeiten der Herren Schleiermacher und Petzval auf dem Gebiete der Optik veranlassen mich, dem im zweiten Theile dieser Zeitschrift veröffentlichten Aufsatze über die Grundformeln der Katoptrik und Dioptrik nach und nach einige andere Abhandlungen über diese interessanten Theile der Mathematik folgen zu lassen, welche ich ursprünglich in einem grössern, der weitern Ausbildung der Katoptrik und Dioptrik gewidmeten Werke mit einander zu vereinigen und zu einem systematischen Ganzen zu verarbeiten dachte.

In der vorliegenden, die Reihe dieser Arbeiten eröffnenden Abhandlung werde ich zuvörderst eine neue Auflösung der Fundamentalaufgabe der Katoptrik und Dioptrik zu geben versuchen, da mir diese Aufgabe, auch nach den bisherigen sehr verdienstlichen Arbeiten über diesen Gegenstand, so weit dieselben zu meiner Kenntniss gekommen sind, noch nicht mit der Geschmeidigkeit, Allgemeinheit, Strenge und Eleganz, wie man wohl wünschen möchte, aufgelöst worden zu sein scheint; wobei ich, wie wohl kaum noch besonders zu bemerken nöthig ist, unter der Fundamentalaufgabe der Katoptrik und Dioptrik die Bestimmung des Weges eines von einem gewissen gegebenen Punkte im Raume nach einer bestimmten Richtung hin ausgehenden, und an einer Reihe gegebener sphärischer Flächen, — denn auf solche bis jetzt allein in der Praxis vorkommende Flächen werde ich die folgenden Untersuchungen einschränken, wenngleich eine Erweiterung derselben auf Flächen überhaupt eine besondere Schwierigkeit nicht darbieten würde*), — eine Zurückwerfung oder Brechung erleidenden Lichtstrahls verstehe. An die allgemeine Auflösung dieses Fundamentalproblems sollen sich dann späterhin verschiedene speciellere Untersuchungen anschliessen.

---

*) Eine Ebene kann immer als eine Kugelfläche mit einem unendlich grossen Halbmesser betrachtet werden.

§. 2.

Es seien überhaupt

$$1)\ y = Ax + B,\ z = A_1x + B_1$$

die Gleichungen einer geraden Linie im Raume in Bezug auf das beliebige rechtwinklige Coordinatensystem der xyz. In dieser geraden Linie nehme man einen beliebigen Punkt als Anfang eines neuen dem primitiven Systeme der xyz parallelen Coordinatensystems der $x_1y_1z_1$ an. Dann sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$2)\ y_1 = Ax_1,\ z_1 = A_1x_1$$

die Gleichungen unserer geraden Linie in Bezug auf das System der $x_1y_1z_1$. Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche einer der beiden Theile unserer geraden Linie, in welche dieselbe von dem Anfange der $x_1y_1z_1$ getheilt wird, mit den positiven Theilen der Axen der x_1, y_1, z_1 einschliesst, seien respective α, β, γ; und a_1, b_1, c_1 seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem in Rede stehenden Theile unserer geraden Linie in dem Systeme der $x_1y_1z_1$. Bezeichnen wir dann die Entfernung dieses Punktes von dem Anfange der $x_1y_1z_1$ durch ϱ, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$3)\ a_1 = \varrho \cos \alpha,\ b_1 = \varrho \cos \beta,\ c_1 = \varrho \cos \gamma;$$

wie augenblicklich erhellet, wenn man nur überlegt, dass nach einer bekannten Construction die geometrischen Darstellungen der Coordinaten a_1, b_1, c_1 des Punktes $(a_1b_1c_1)$ leicht erhalten werden, wenn man von diesem Punkte auf die Axen der x_1, y_1, z_1 drei Perpendikel fällt. Weil nun nach 2)

$$b_1 = Aa_1,\ c = A_1a_1$$

ist, so ist nach 3)

$$\varrho \cos \beta = \varrho A \cos \alpha,\ \varrho \cos \gamma = \varrho A_1 \cos \alpha;$$

und folglich

$$4)\ A = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},\ A_1 = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

Sind nun a, b, c die Coordinaten irgend eines Punktes der durch die Gleichungen 1) charakterisirten geraden Linie in dem Systeme der xyz, so ist nach 1)

$$b = Aa + B,\ c = A_1a + B_1;$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen von den Gleichungen 1) subtrahirt:

$$y - b = A(x - a),\ z - c = A_1(x - a).$$

Also lassen sich nach 4) die Gleichungen der gegebenen geraden Linie immer unter der Form

$$5)\begin{cases} y-b=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-a), \\ z-c=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-a) \end{cases}$$

oder unter der Form

$$6)\ \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

darstellen, wobei man aber nicht aus den Augen zu lassen hat, dass hierbei immer rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt werden.

Von diesen, übrigens auch sonst schon bekannten, für das Folgende aber sehr wichtigen allgemeinen Bemerkungen über die gerade Linie im Raume wollen wir nun zu unserm eigentlichen Gegenstande übergehen.

§. 3.

Wir denken uns drei von einem Punkte im Raume ausgehende sämmtlich in einer Ebene liegende gerade Linien, welche wir für jetzt die erste, zweite, dritte gerade Linie nennen wollen, und bezeichnen die Gleichungen dieser drei geraden Linien und natürlich auch ihrer Verlängerungen über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz respective durch

$$7)\begin{cases} y=ax+f,\ z=bx+g; \\ y=a'x+f',\ z=b'x+g'; \\ y=a_1x+f_1,\ z=b_1x+g_1. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Punktes, von welchem diese drei geraden Linien ausgehen, in dem angenommenen rechtwinkligen Systeme der xyz seien p_1, q_1, r_1; und die Gleichung der Ebene, in welcher die drei in Rede stehenden Linien liegen, sei

$$8)\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Ferner seien Θ und Θ_1 die beiden 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die erste und dritte gerade Linie mit der zweiten geraden Linie einschliessen.

Weil der Punkt $(p_1q_1r_1)$ in jeder der drei geraden Linien, also auch in der durch die Gleichung 8) charakterisirten Ebene liegt; so haben wir nach 7) und 8) die folgenden Gleichungen:

$$9)\begin{cases} q_1=ap_1+f,\ r_1=bp_1+g; \\ q_1=a'p_1+f',\ r_1=b'p_1+g'; \\ q_1=a_1p_1+f_1,\ r_1=b_1p_1+g_1; \end{cases}$$

und

$$10)\ Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 + D = 0.$$

Weil ferner jede unserer drei geraden Linien nebst ihrer Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus ganz in der durch die Gleichung 8) charakterisirten Ebene liegt; so ist nach 7) und 8) offenbar für jedes x

$$(A + Ba + Cb)x + Bf + Cg + D = 0,$$
$$(A + Ba' + Cb')x + Bf' + Cg' + D = 0,$$
$$(A + Ba_1 + Cb_1)x + Bf_1 + Cg_1 + D = 0;$$

woraus sich unmittelbar die beiden folgenden Systeme von Gleichungen ergeben:

$$11) \begin{cases} A + Ba + Cb = 0, \\ A + Ba' + Cb' = 0, \\ A + Ba_1 + Cb_1 = 0 \end{cases}$$

und

$$12) \begin{cases} Bf + Cg + D = 0, \\ Bf' + Cg' + D = 0, \\ Bf_1 + Cg_1 + D = 0. \end{cases}$$

Ferner ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$13) \begin{cases} \sin\Theta = \sqrt{\dfrac{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2}{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}, \\ \sin\Theta_1 = \sqrt{\dfrac{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1-a_1b')^2}{(1+a'^2+b'^2)(1+a_1{}^2+b_1{}^2)}}; \end{cases}$$

und folglich, wie leicht erhellet,

$$14)\ \sin\Theta : \sin\Theta_1$$
$$= \sqrt{\frac{1+a_1{}^2+b_1{}^2}{1+a^2+b^2}} : \sqrt{\frac{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1-a_1b')^2}{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2}}.$$

Wegen der Gleichungen 11) ist nun

$$15) \begin{cases} A(a-a') + C(ab'-a'b) = 0, \\ A(a'-a_1) + C(a'b_1-a_1b') = 0, \\ A(a_1-a) + C(a_1b-ab_1) = 0 \end{cases}$$

und

$$16) \begin{cases} B(a-a') + C(b-b') = 0, \\ B(a'-a_1) + C(b'-b_1) = 0, \\ B(a_1-a) + C(b_1-b) = 0; \end{cases}$$

oder

$$17)\begin{cases} A(a-a') = -C(ab'-a'b), \\ A(a'-a_1) = -C(a'b_1-a_1b'), \\ A(a_1-a) = -C(a_1b-ab_1) \end{cases}$$

und

$$18)\begin{cases} B(a-a') = -C(b-b'), \\ B(a'-a_1) = -C(b'-b_1), \\ B(a_1-a) = -C(b_1-b). \end{cases}$$

Also ist

$$19)\ \frac{ab'-a'b}{a-a'} = \frac{a'b_1-a_1b'}{a'-a_1} = \frac{a_1b-ab_1}{a_1-a} = -\frac{A}{C}$$

und

$$20)\ \frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b'-b_1}{a'-a_1} = \frac{b_1-b}{a_1-a} = -\frac{B}{C}.$$

Nach 17) und 18) hat man auch die folgenden Gleichungen:

$$A^2(a-a')^2 = C^2(ab'-a'b)^2,$$
$$B^2(a-a')^2 = C^2(b-b')^2,$$
$$C^2(a-a')^2 = C^2(a-a')^2$$

und

$$A^2(a'-a_1)^2 = C^2(a'b_1-a_1b')^2,$$
$$B^2(a'-a_1)^2 = C^2(b'-b_1)^2,$$
$$C^2(a'-a_1)^2 = C^2(a'-a_1)^2.$$

Also ist

$$(A^2+B^2+C^2)\,(a-a')^2$$
$$= C^2\{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2\}$$

und

$$(A^2+B^2+C^2)\,(a'-a_1)^2$$
$$= C^2\{(a'-a_1)^2+(b'-b_1)^2+(a'b_1-a_1b')^2\};$$

folglich

$$\left(\frac{a'-a_1}{a-a'}\right)^2 = \frac{(a'-a_1)^2+(b'-b_1)^2+(a'b_1-a_1b')^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}.$$

Weil nun nach 14)

$$\sin\Theta^2 : \sin\Theta_1{}^2$$
$$= \frac{1+a_1{}^2+b_1{}^2}{1+a^2+b^2} : \frac{(a'-a_1)^2+(b'-b_1)^2+(a'b_1-a_1b')^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\sin\Theta^2 : \sin\Theta_1{}^2 = \frac{1+a_1{}^2+b_1{}^2}{1+a^2+b^2} : \left(\frac{a'-a_1}{a-a'}\right)^2,$$

also

$$21)\ \left(\frac{a-a'}{a'-a_1}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = \left(\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}\right)^2,$$

oder, wenn wir annehmen, dass das Verhältniss

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}$$

constant ist, und der Kürze wegen

$$22)\ \frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1} = n$$

setzen,

$$23)\ \left(\frac{a-a'}{a'-a_1}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2.$$

Da nach 20)

$$\frac{a-a'}{a'-a_1} = \frac{b-b'}{b'-b_1}$$

und nach 19)

$$\frac{a-a'}{a'-a_1} = \frac{ab'-a'b}{a'b_1-a_1b'}$$

ist, so ist auch

$$24)\ \left(\frac{b-b'}{b'-b_1}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2$$

und

$$25)\ \left(\frac{ab'-a'b}{a'b_1-a_1b'}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2.$$

§. 4.

Durch den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt unserer drei geraden Linien denken wir uns jetzt ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$ gelegt, und bezeichnen die von den drei Linien mit den positiven Theilen der Axen der x_1, y_1, z_1 eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ; α', β', γ'; α_1, β_1, γ_1; so sind nach 6) die Gleichungen unserer drei Linien nebst ihren Verlängerungen über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus in dem Systeme der xyz, da p_1, q_1, r_1 die Coordinaten des gemeinschaftlichen Ausgangspunkts der drei Linien in diesem Systeme sind:

$$26)\ \begin{cases} \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma}, \\[2ex] \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha'} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta'} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma'}, \\[2ex] \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma_1} \end{cases}$$

und im Obigen ist also

$$27)\begin{cases} a=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}, & b=\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha};\\ a'=\dfrac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}, & b'=\dfrac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'};\\ a_1=\dfrac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}, & b_1=\dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1}\end{cases}$$

zu setzen.

Daher ist nach 19)

$$28)\ \frac{A}{C}=\frac{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$
$$=\frac{\cos\beta'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}$$
$$=\frac{\cos\beta_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\beta}{\cos\alpha_1\cos\beta-\cos\beta_1\cos\alpha}$$

und

$$29)\ \frac{B}{C}=-\frac{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha'}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$
$$=-\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}$$
$$=-\frac{\cos\alpha_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\alpha}{\cos\alpha_1\cos\beta-\cos\beta_1\cos\alpha};$$

also

$$30)\ \frac{A}{B}=-\frac{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha'}$$
$$=-\frac{\cos\beta'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1}$$
$$=-\frac{\cos\beta_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\beta}{\cos\alpha_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\alpha};$$

oder, wie man etwas symmetrischer diese Ausdrücke auch schreiben kann:

$$31)\ \frac{A}{B}=\frac{\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma'}{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha'}$$
$$=\frac{\cos\gamma'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\gamma_1}{\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1}$$
$$=\frac{\cos\gamma_1\cos\beta-\cos\beta_1\cos\gamma}{\cos\alpha_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\alpha},$$

$$32)\ \frac{B}{C}=\frac{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha'}{\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta'}$$
$$=\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\beta'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\beta_1}$$
$$=\frac{\cos\alpha_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\alpha}{\cos\beta_1\cos\alpha-\cos\alpha_1\cos\beta},$$

$$33)\ \frac{C}{A}=\frac{\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta'}{\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma'}$$

$$=\frac{\cos\beta'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\beta_1}{\cos\gamma'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\gamma_1}$$

$$=\frac{\cos\beta_1\cos\alpha-\cos\alpha_1\cos\beta}{\cos\gamma_1\cos\beta-\cos\beta_1\cos\gamma}.$$

Nach der Gleichung 23) ist ferner

$$\left(\frac{\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}-\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}}{\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}-\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}}\right)^2.\frac{1+(\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1})^2+(\frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1})^2}{1+(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})^2+(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha})^2}=n^2,$$

woraus sich leicht

$$\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}\right)^2.\frac{\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2}{\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2}=n^2,$$

d. i., weil nach einem aus der analytischen Geometrie bekannten Satze

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

$$\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2=1$$

ist,

$$\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}\right)^2=n^2,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$34)\ \mu=\pm\frac{1}{n}$$

setzen,

$$35)\ \frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}=\mu$$

ergiebt.

Weil nun aber nach dem Obigen

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$

$$=\frac{\cos\beta'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}$$

$$=\frac{\cos\gamma'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\gamma_1}{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'}$$

ist, so haben wir nach 35) die drei folgenden Gleichungen:

$$36)\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}=\mu,\\[2mm] \dfrac{\cos\beta'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}=\mu,\\[2mm] \dfrac{\cos\gamma'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\gamma_1}{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'}=\mu;\end{cases}$$

aus denen sich auch leicht die Relationen

$$37)\quad\left.\begin{array}{l}(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta')\cos\alpha_1\\ +(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma')\cos\beta_1\\ +(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')\cos\gamma_1\end{array}\right\}=0$$

oder

$$38)\quad\left.\begin{array}{l}(\cos\beta\cos\gamma_1-\cos\gamma\cos\beta_1)\cos\alpha'\\ +(\cos\gamma\cos\alpha_1-\cos\alpha\cos\gamma_1)\cos\beta'\\ +(\cos\alpha\cos\beta_1-\cos\beta\cos\alpha_1)\cos\gamma'\end{array}\right\}=0$$

oder

$$39)\quad\left.\begin{array}{l}(\cos\beta'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\beta_1)\cos\alpha\\ +(\cos\gamma'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\gamma_1)\cos\beta\\ +(\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1)\cos\gamma\end{array}\right\}=0$$

ergeben.

Nach 36) ist nun

$$\cos\beta'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\beta_1=\mu(\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta'),$$
$$\cos\gamma'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\gamma_1=\mu(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma'),$$
$$\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1=\mu(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha');$$

und man hat daher die drei folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\cos\alpha'\cos\alpha_1=\cos\alpha'\cos\alpha_1,$$
$$\cos\alpha'\cos\beta_1=\cos\beta'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'),$$
$$\cos\alpha'\cos\gamma_1=\cos\gamma'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha');$$

ferner

$$\cos\beta'\cos\alpha_1=\cos\alpha'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta'),$$
$$\cos\beta'\cos\beta_1=\cos\beta'\cos\beta_1,$$
$$\cos\beta'\cos\gamma_1=\cos\gamma'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta');$$

endlich

$$\cos\gamma'\cos\alpha_1=\cos\alpha'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'),$$
$$\cos\gamma'\cos\beta_1=\cos\beta'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma'),$$
$$\cos\gamma'\cos\gamma_1=\cos\gamma'\cos\gamma_1.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen, und addirt die

dadurch hervorgehenden Gleichungen zu einander, so erhält man, weil bekanntlich

$$\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2=1$$

ist, die drei folgenden Gleichungen:

$$40)\left\{\begin{aligned}
\cos\alpha'^2=&\cos\alpha'^2\cos\alpha_1^2\\
&+\{\cos\beta'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')\}^2\\
&+\{\cos\gamma'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')\}^2,\\
\cos\beta'^2=&\cos\beta'^2\cos\beta_1^2\\
&+\{\cos\alpha'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta')\}^2\\
&+\{\cos\gamma'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta')\}^2,\\
\cos\gamma'^2=&\cos\gamma'^2\cos\gamma_1^2\\
&+\{\cos\alpha'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma')\}^2\\
&+\{\cos\beta'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma')\}^2
\end{aligned}\right.$$

oder auch

$$\begin{aligned}
1=&\left\{\frac{\cos\beta'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')}{\cos\alpha'\sin\alpha_1}\right\}^2\\
&+\left\{\frac{\cos\gamma'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')}{\cos\alpha'\sin\alpha_1}\right\}^2,\\
1=&\left\{\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta')}{\cos\beta'\sin\beta_1}\right\}^2\\
&+\left\{\frac{\cos\gamma'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta')}{\cos\beta'\sin\beta_1}\right\}^2,\\
1=&\left\{\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma')}{\cos\gamma'\sin\gamma_1}\right\}^2\\
&+\left\{\frac{\cos\beta'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma')}{\cos\gamma'\sin\gamma_1}\right\}^2.
\end{aligned}$$

Durch gehörige Entwickelung der ersten der Gleichungen 40) erhält man, weil bekanntlich

$$\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2=1$$

ist, die Gleichung

$$\begin{aligned}
\cos\alpha'^2=&\cos\alpha_1^2\\
&+2\mu\left\{\begin{aligned}&\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')\\+&\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')\end{aligned}\right\}\cos\alpha_1\\
&+\mu^2\left\{\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')^2\\+&(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')^2\end{aligned}\right\}
\end{aligned}$$

und folglich

$$\cos\alpha_1{}^2 + 2\mu\left\{\begin{array}{l}\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')\\+\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')\end{array}\right\}\cos\alpha_1$$

$$=\cos\alpha'^2 - \mu^2\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')^2\\+(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')^2\end{array}\right\}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}&\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')\\&+\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')\\&=\cos\alpha(\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2)-\cos\alpha'(\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')\\&=\cos\alpha(\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2)\\&\quad-\cos\alpha'(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma').\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')^2\\&+(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')^2\\&=\cos\alpha^2(\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2)+\cos\alpha'^2(\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\\&\quad-2\cos\alpha\cos\alpha'(\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')\\&=\cos\alpha^2(\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2)\\&\quad+\cos\alpha'^2(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\\&\quad-2\cos\alpha\cos\alpha'(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma').\end{aligned}$$

Weil nun bekanntlich

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$
$$\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2=1,$$

und

$$41)\ \cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}&\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')\\&+\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')\\&=\cos\alpha-\cos\alpha'\cos\Theta\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')^2\\&+(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')^2\\&=\cos\alpha^2+\cos\alpha'^2-2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta.\end{aligned}$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$\cos\alpha_1{}^2 + 2\mu(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)\cos\alpha_1$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2(\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta),$$

also

$$\{\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)\}^2$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\{\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta$$
$$-(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)^2\}$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\cos\alpha'^2\sin\Theta^2$$
$$= \cos\alpha'^2(1 - \mu^2\sin\Theta^2).$$

Daher ist

$$\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta) = \pm\cos\alpha'\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}$$

und folglich

$$\cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}).$$

Nach dem Obigen ist

$$\cos\beta_1 = \frac{\cos\beta'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')}{\cos\alpha'}$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\gamma'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')}{\cos\alpha'}.$$

Führt man in diese Gleichungen den vorher gefundenen Ausdruck von $\cos\alpha_1$ ein, so erhält man die drei folgenden Gleichungen, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$42)\begin{cases}\cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}),\\ \cos\beta_1 = -\mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}),\\ \cos\gamma_1 = -\mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2});\end{cases}$$

oder

$$43)\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha_1 + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2},\\ \dfrac{\cos\beta_1 + \mu\cos\beta}{\cos\beta'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2},\\ \dfrac{\cos\gamma_1 + \mu\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}.\end{cases}$$

Vorzüglich entsteht jetzt die Frage, wie in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen sind, worüber auf folgende Art eine bestimmte Entscheidung gegeben werden kann, wobei wir von nun an die zweite gerade Linie das Einfallsloth nennen wollen.

Nach 26) sind

$$y - q_1 = \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}(x - p_1),$$

$$z-r_1=\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}(x-p_1)$$

die Gleichungen der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie. Sind nun ϱ und ϱ_1 die Entfernungen zweier beliebigen Punkte in der ersten und dritten geraden Linie von dem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte $(p_1 q_1 r_1)$ der drei Linien; so sind die Coordinaten dieser Punkte in dem Systeme der xyz, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit:

$$p_1+\varrho\cos\alpha,\ q_1+\varrho\cos\beta,\ r_1+\varrho\cos\gamma$$

und

$$p_1+\varrho_1\cos\alpha_1,\ q_1+\varrho_1\cos\beta_1,\ r_1+\varrho_1\cos\gamma_1.$$

Die Gleichungen der durch diese Punkte der Lage nach bestimmten geraden Linie sind nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$y-q_1-\varrho\cos\beta=\frac{\varrho\cos\beta-\varrho_1\cos\beta_1}{\varrho\cos\alpha-\varrho_1\cos\alpha_1}(x-p_1-\varrho\cos\alpha),$$

$$z-r_1-\varrho\cos\gamma=\frac{\varrho\cos\gamma-\varrho_1\cos\gamma_1}{\varrho\cos\alpha-\varrho_1\cos\alpha_1}(x-p_1-\varrho\cos\alpha);$$

oder

$$y-q_1-\varrho\cos\beta=\frac{\cos\beta-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\beta_1}{\cos\alpha-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1}(x-p_1-\varrho\cos\alpha),$$

$$z-r_1-\varrho\cos\gamma=\frac{\cos\gamma-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\gamma_1}{\cos\alpha-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1}(x-p_1-\varrho\cos\alpha).$$

Soll nun diese gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten Linie parallel sein, so muss nach den Principien der analytischen Geometrie $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ so bestimmt werden, dass

$$\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\beta-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\beta_1}{\cos\alpha-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1},$$

$$\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\gamma-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\gamma_1}{\cos\alpha-\frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1};$$

d. h., wie man hieraus leicht findet, dass

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}=-\frac{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1},$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}=-\frac{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1}$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho_1}=-\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'},$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_1}=-\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha'}$$

ist.

Nach 32) ist

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$

$$=\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha'},$$

und die beiden vorhergehenden Gleichungen werden sich also, wobei man zu beachten hat, dass $\frac{\varrho}{\varrho_1}$ seiner Natur nach eine positive Grösse ist, jederzeit zugleich erfüllen lassen, wenn die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$

negativ ist; oder mit andern Worten:

Wenn die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$

negativ ist, so werden sich immer zwei Punkte, der eine in der ersten, der andere in der dritten geraden Linie, von solcher Lage angeben lassen, dass die durch diese beiden Punkte der Lage nach bestimmte gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten Linie parallel ist.

Nun erhellet aber auf der Stelle, dass sowohl bei der Reflexion *), als auch bei der Refraction die erste und dritte gerade Linie immer auf verschiedenen oder entgegengesetzten Seiten der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie liegen, und dass es also nie zwei in der ersten und dritten geraden Linie liegende Punkte von solcher Lage geben kann, dass die durch diese beiden Punkte der Lage nach bestimmte gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie parallel ist, indem von jeder durch zwei in der ersten und dritten geraden Linie liegende Punkte gezogenen geraden Linie die durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt

*) Man vergleiche Archiv. Thl. II. S. 147 die Note.

hinaus dargestellte gerade Linie offenbar nothwendig geschnitten werden muss. Daher kann weder bei der Reflexion, noch bei der Refraction die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$

jemals negativ sein, und ist folglich in allen Fällen positiv. Hieraus, in Verbindung mit der ersten der Gleichungen 36) und der Gleichung 34), ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass sowohl bei der Reflexion, als auch bei der Refraction, nie $\mu=-\frac{1}{n}$ gesetzt werden darf, sondern immer

$$44)\ \mu=\frac{1}{n}$$

gesetzt werden muss, wie von nun an auch im Laufe der ganzen folgenden Untersuchung immer geschehen soll.

Aus den drei Gleichungen 42) folgt, wenn man dieselben nach der Reihe mit

$$\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt:

$$\begin{aligned}&\cos\alpha'\cos\alpha_1+\cos\beta'\cos\beta_1+\cos\gamma'\cos\gamma_1\\=&-\mu(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')\\&+(\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2)(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),\end{aligned}$$

und folglich, weil

$$45)\left\{\begin{aligned}\cos\Theta&=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',\\\cos\Theta_1&=\cos\alpha'\cos\alpha_1+\cos\beta'\cos\beta_1+\cos\gamma'\cos\gamma_1\end{aligned}\right.$$

und

$$\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2=1$$

ist,

$$\cos\Theta_1=-\mu\cos\Theta+(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

d. i.

$$46)\ \cos\Theta_1=\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}.$$

Nun erhellet aber sehr leicht mittelst einer einfachen Construction, dass bei der Reflexion die 180° nicht übersteigenden Winkel Θ und Θ_1 immer entweder beide kleiner als 90°, oder beide grösser als 90° sind; dass dagegen bei der Refraction der eine dieser beiden 180° nicht übersteigenden Winkel immer kleiner als 90°, der andere grösser als 90° ist. Demnach haben $\cos\Theta$ und $\cos\Theta_1$ bei der Reflexion immer gleiche, bei der Refraction immer ungleiche Vorzeichen, und es ergeben sich daher nach 46) jetzt die folgenden Regeln.

I. Reflexion.

1) Wenn $\Theta < 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta$ positiv ist, so ist auch $\Theta_1 < 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta_1$ positiv, und folglich

$$\cos\Theta_1 = +\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die obern Zeichen zu nehmen.

2) Wenn $\Theta > 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta$ negativ ist, so ist auch $\Theta_1 > 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta_1$ negativ, und folglich

$$\cos\Theta_1 = -\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die untern Zeichen zu nehmen.

II. Refraction.

1) Wenn $\Theta < 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta$ positiv ist, so ist $\Theta_1 > 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta_1$ negativ und folglich

$$\cos\Theta_1 = -\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die untern Zeichen zu nehmen.

2) Wenn $\Theta > 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta$ negativ ist, so ist $\Theta_1 < 90^\circ$, d. h. $\cos\Theta_1$ positiv, und folglich

$$\cos\Theta_1 = +\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die obern Zeichen zu nehmen.

Wir sind daher durch die vorhergehende Untersuchung jetzt überhaupt zu dem folgenden Resultate gelangt:

Es ist

$$47)\qquad \mu = \frac{1}{n},$$

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

und

$$\cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\cos\beta_1 = -\mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\cos\gamma_1 = -\mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$\frac{\cos\alpha_1 + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\beta_1 + \mu\cos\beta}{\cos\beta'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\gamma_1+\mu\cos\gamma}{\cos\gamma'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

auch

$$\cos\Theta_1=\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

mit der Bestimmung, dass man in diesen Formeln im Falle der Reflexion die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\Theta<90^\circ$ oder $\Theta>90^\circ$ ist; im Falle der Reflexion dagegen die obern oder untern Zeichen nehmen muss, jenachdem $\Theta>90^\circ$ oder $\Theta<90^\circ$ ist.

§. 5.

Im Folgenden wollen wir uns nun immer die erste gerade Linie von einem gewissen Punkte, dessen Coordinaten p, q, r sein mögen, ausgehend denken, und wollen unter dieser Voraussetzung, allen übrigen im Vorhergehenden eingeführten Symbolen die ihnen beigelegte Bedeutung lassend, fernerhin die von der ersten Linie mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen der xyz paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ bezeichnen. Dann muss man offenbar in allen obigen Formeln für α, β, γ respective $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, $180^\circ-\gamma$ setzen, und erhält dadurch die folgenden Formeln.

Die Gleichungen der ersten Linie sind wie früher

$$48)\quad \frac{x-p_1}{\cos\alpha}=\frac{y-q_1}{\cos\beta}=\frac{z-r_1}{\cos\gamma}$$

oder auch

$$49)\quad \frac{x-p}{\cos\alpha}=\frac{y-q}{\cos\beta}=\frac{z-r}{\cos\gamma},$$

da der Punkt (pqr) auch in der ersten Linie liegt.

Ferner ist:

$$50)\quad \mu=\frac{1}{n}$$

$$\cos\Theta=-(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')$$

und

$$\cos\alpha_1=\mu\cos\alpha+\cos\alpha'(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1=\mu\cos\beta+\cos\beta'(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1=\mu\cos\gamma+\cos\gamma'(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

$$\frac{\cos\alpha_1-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\beta_1-\mu\cos\beta}{\cos\beta'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\gamma_1-\mu\cos\gamma}{\cos\gamma'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

auch

$$\cos\Theta_1 = \pm\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2};$$

mit der Bestimmung, dass man in diesen Formeln im Falle der Reflexion die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\Theta < 90^\circ$ oder $\Theta > 90^\circ$ ist; im Falle der Refraction dagegen die obern oder untern Zeichen nehmen muss, jenachdem $\Theta > 90^\circ$ oder $\Theta < 90^\circ$ ist.

§. 6.

Es sei nun

$$51)\ (x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=R_1^2$$

die Gleichung einer Kugelfläche, und p_1, q_1, r_1 seien die Coordinaten des Durchschnittspunkts der ersten geraden Linie mit dieser Kugelfläche; so haben wir nach 49) und 51) zur Bestimmung von p_1, q_1, r_1 die folgenden Gleichungen:

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\cos\beta}=\frac{r_1-r}{\cos\gamma},$$

$$(p_1-a_1)^2+(q_1-b_1)^2+(r_1-c_1)^2=R_1^2$$

oder

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\cos\beta}=\frac{r_1-r}{\cos\gamma},$$

$$\{p_1-p-(a_1-p)\}^2+\{q_1-q-(b_1-q)\}^2$$
$$+\{r_1-r-(c_1-r)\}^2=R_1^2.$$

Weil nun wegen der zwei ersten Gleichungen

$$q_1-q-(b_1-q)=\frac{(p_1-p)\cos\beta-(b_1-q)\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

$$r_1-r-(c_1-r)=\frac{(p_1-p)\cos\gamma-(c_1-r)\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

ist, so ist wegen der dritten Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\{p_1-p-(a_1-p)\}^2\cos\alpha^2\\ +\{(p_1-p)\cos\beta-(b_1-q)\cos\alpha\}^2\\ +\{(p_1-p)\cos\gamma-(c_1-r)\cos\alpha\}^2\end{array}\right\}=R_1^2\cos\alpha^2,$$

also, weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

ist,

$$(p_1-p)^2-2\{(a_1-p)\cos\alpha+(b_1-q)\cos\beta$$
$$+(c_1-r)\cos\gamma\}(p_1-p)\cos\alpha$$
$$=\{R_1^2-[(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2]\}\cos\alpha^2,$$

der, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\begin{cases} E_1 = \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}, \\ K_1 = (a_1-p)\cos\alpha + (b_1-q)\cos\beta + (c_1-r)\cos\gamma \end{cases}$$

setzen, wo E_1 bekanntlich die Entfernung des Punktes (pqr) von dem Mittelpunkte $(a_1 b_1 c_1)$ der gegebenen Kugelfläche ist:

$$(p_1-p)^2 - 2K_1(p_1-p)\cos\alpha = (R_1{}^2 - E_1{}^2)\cos\alpha^2.$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung auf, so erhalten wir

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha} = K_1 \pm \sqrt{R_1{}^2+K_1{}^2-E_1{}^2},$$

und nach dem Obigen haben wir daher überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$53)\begin{cases} \dfrac{p_1-p}{\cos\alpha} = K_1 \pm \sqrt{R_1{}^2+K_1{}^2-E_1{}^2}, \\ \dfrac{q_1-q}{\cos\beta} = K_1 \pm \sqrt{R_1{}^2+K_1{}^2-E_1{}^2}, \\ \dfrac{r_1-r}{\cos\gamma} = K_1 \pm \sqrt{R_1{}^2+K_1{}^2-E_1{}^2}; \end{cases}$$

in denen natürlich die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen sind.

Nehmen wir nun den nach dem Punkte $(p_1 q_1 r_1)$ gezogenen Halbmesser der gegebenen Kugelfläche als Einfallsloth an, so haben wir die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$a_1 - p_1 = R_1 \cos\alpha',$$
$$b_1 - q_1 = R_1 \cos\beta',$$
$$c_1 - r_1 = R_1 \cos\gamma';$$

also

$$\cos\alpha' = \frac{a_1-p_1}{R_1},\quad \cos\beta' = \frac{b_1-q_1}{R_1},\quad \cos\gamma' = \frac{c_1-r_1}{R_1};$$

und folglich nach 53)

$$54)\begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a_1-p-(K_1\pm\sqrt{R_1{}^2+K_1{}^2-E_1{}^2})\cos\alpha}{R_1}, \\ \cos\beta' = \dfrac{b_1-q-(K_1\pm\sqrt{R_1{}^2+K_1{}^2-E_1{}^2})\cos\beta}{R_1}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c_1-r-(K_1\pm\sqrt{R_1{}^2+K_1{}^2-E_1{}^2})\cos\gamma}{R_1}. \end{cases}$$

Weil nach 50)

$$\cos\Theta = -(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$

ist, so erhalten wir aus 54) mit Hülfe von 52) leicht

$$55)\quad \cos\Theta = \pm\frac{\sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2}}{R_1}.$$

§. 7.

Wir wollen nun die erste gerade Linie immer den einfallenden Strahl, die zweite wie früher das Einfallsloth, die dritte den ausfallenden Strahl nennen, und wie vorher annehmen, dass der einfallende Strahl von dem Punkte (pqr) ausgehe, und die im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Kugelfläche in dem Punkte $(p_1 q_1 r_1)$ treffe. Jenachdem die concave oder convexe Seite dieser Kugelfläche der Richtung, nach welcher der einfallende Strahl von dem Punkte (pqr) ausgeht, zugekehrt ist, wollen wir sagen, dass der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der in Rede stehenden Kugelfläche treffe.

Trifft der einfallende Strahl die concave Seite, so ist immer $\Theta < 90^\circ$; trifft dagegen der einfallende Strahl die convexe Seite, so ist immer $\Theta > 90^\circ$; welches Alles mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung leicht erhellen wird.

Nach §. 5. sind daher in den Formeln

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

im Falle der Reflexion die obern oder die untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der in Rede stehenden Kugelfläche trifft; dagegen sind in diesen Formeln im Falle der Refraction die obern oder die untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die convexe oder concave Seite der in Rede stehenden Kugelfläche trifft.

Nehmen wir nun aber im Folgenden das Einfallsloth mit dem einfallenden Strahle immer auf einer Seite der zurückwerfenden oder brechenden Kugelfläche an, so muss man in dem Falle, wo der einfallende Strahl die convexe Seite trifft, offenbar in den obigen Formeln statt

$$\Theta \text{ und } \alpha', \beta', \gamma'$$

respective

$$180^\circ - \Theta \text{ und } 180^\circ - \alpha',\ 180^\circ - \beta',\ 180^\circ - \gamma'$$

setzen, wodurch in diesem Falle die obigen Formeln *) in die folgenden übergehen:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

*) Der oben in 50) für $\cos\Theta$ gegebene Ausdruck bleibt ungeändert.

$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist daher allgemein im Falle der Reflexion:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

und im Falle der Refraction:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Also ist

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

wo im Falle der Reflexion immer die obern, im Falle der Refraction immer die untern Zeichen zu nehmen sind.

In der Gleichung 55) des vorhergehenden Paragraphen ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft. Also sind auch in den aus 53) bekannten Formeln

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha} = K_1 \pm \sqrt{R_1{}^2 + K_1{}^2 - E_1{}^2},$$
$$\frac{q_1-q}{\cos\beta} = K_1 \pm \sqrt{R_1{}^2 + K_1{}^2 - E_1{}^2},$$
$$\frac{r_1-r}{\cos\gamma} = K_1 \pm \sqrt{R_1{}^2 + K_1{}^2 - E_1{}^2},$$

oder in den Formeln

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha} = K_1 \pm R_1\sqrt{1-\frac{E_1{}^2-K_1{}^2}{R_1{}^2}},$$
$$\frac{q_1-q}{\cos\beta} = K_1 \pm R_1\sqrt{1-\frac{E_1{}^2-K_1{}^2}{R_1{}^2}},$$
$$\frac{r_1-r}{\cos\gamma} = K_1 \pm R_1\sqrt{1-\frac{E_1{}^2-K_1{}^2}{R_1{}^2}}$$

die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfal-

lende Strahl die concave oder convexe Seite trifft. Nehmen wir nun aber den Halbmesser R_1 positiv oder negativ, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft, so können wir allgemein

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1{}^2 - K_1{}^2}{R_1{}^2}},$$

$$\frac{q_1 - q}{\cos\beta} = K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1{}^2 - K_1{}^2}{R_1{}^2}},$$

$$\frac{r_1 - r}{\cos\gamma} = K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1{}^2 - K_1{}^2}{R_1{}^2}}$$

setzen; oder

$$p_1 = p + (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1{}^2 - K_1{}^2}{R_1{}^2}})\cos\alpha,$$

$$q_1 = q + (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1{}^2 - K_1{}^2}{R_1{}^2}})\cos\beta,$$

$$r_1 = r + (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1{}^2 - K_1{}^2}{R_1{}^2}})\cos\gamma.$$

Halten wir die vorher wegen des Einfallsloths gegebene Bestimmung fest, so ist offenbar, wenn man R_1 immer als positiv betrachtet,

$$R_1 \cos\alpha' = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos\beta' = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos\gamma' = c_1 - r_1$$

oder

$$R_1 \cos(180° - \alpha') = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos(180° - \beta') = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos(180° - \gamma') = c_1 - r_1;$$

jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft; und folglich

$$\pm R_1 \cos\alpha' = a_1 - p_1,$$
$$\pm R_1 \cos\beta' = b_1 - q_1,$$
$$\pm R_1 \cos\gamma' = c_1 - r_1;$$

indem man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft. Nimmt man aber wie vorher den Halbmesser R_1 positiv oder negativ, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft, so ist allgemein

$$R_1 \cos\alpha' = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos\beta' = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos\gamma' = c_1 - r_1;$$

also

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1};$$

und folglich nach dem Obigen

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p - (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}})\cos\alpha}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q - (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}})\cos\beta}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r - (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}})\cos\gamma}{R_1};$$

oder

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p - K_1\cos\alpha}{R_1} - \cos\alpha\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q - K_1\cos\beta}{R_1} - \cos\beta\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r - K_1\cos\gamma}{R_1} - \cos\beta\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}.$$

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$\cos\Theta = -(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$

ist, so erhält man aus den vorhergehenden Formeln leicht

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}$$

oder

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}},$$

und folglich

$$\sin\Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}}.$$

Also ist nach dem Obigen auch

$$p_1 = p + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$

$$q_1 = q + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\beta,$$

$$r_1 = r + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\gamma.$$

§. 8.

Es wird nöthig sein, die im Vorgehenden gefundenen Formeln zur Bestimmung der Lage des ausfallenden Strahles nochmals übersichtlich zusammenzustellen.

Zum Grunde gelegt wird ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz.

Gegeben sind:

die Coordinaten p, q, r des Punktes, von welchem der einfallende Strahl ausgeht;

die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ, welche der einfallende Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst;

die Gleichung der zurückwerfenden oder brechenden Kugelfläche, nämlich die Gleichung

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=R_1{}^2,$$

wo der Halbmesser R_1 als positiv oder als negativ betrachtet wird, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite dieser Kugelfläche trifft.

Gesucht werden die Coordinaten p_1, q_1, r_1 des Einfallspunkts, in welchem der einfallende Strahl die gegebene Kugelfläche trifft, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte $(p_1q_1r_1)$ ausgehende ausfallende Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(p_1q_1r_1)$ gelegter den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst.

Zur Berechnung dieser sechs Grössen, durch welche die Lage des ausfallenden Strahls offenbar vollkommen bestimmt wird, hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln.

Zuerst berechnet man die Grössen E_1 und K_1 mittelst der Formeln

$$E_1=\sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2},$$
$$K_1=(a_1-p)\cos\alpha+(b_1-q)\cos\beta+(c_1-r)\cos\gamma;$$

und hierauf den 180° nicht übersteigenden Winkel Θ *) mittelst der Formeln

$$\cos\Theta=\sqrt{1-\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1{}^2}}$$

oder

$$\sin\Theta=\sqrt{\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1{}^2}}.$$

Dann ergeben sich die Coordinaten p_1, q_1, r_1 mittelst der Formeln

$$p_1=p+(K_1+R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$

*) Man sieht übrigens aus dem folgenden Ausdrucke von $\cos\Theta$, dass unter den oben gemachten Voraussetzungen der Winkel Θ nie 90° übersteigt.

$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos\Theta) \cos\beta,$$
$$r_1 = r + (K_1 + R_1 \cos\Theta) \cos\gamma;$$

nd hierauf die 180° nicht übersteigenden Winkel α', β', γ' mittelst der Formeln

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$
$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$
$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1}.$$

ndlich erhält man die 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1, mittelst der Formeln

$$\cos\alpha_1 = \mu \cos\alpha + \cos\alpha'(\mu \cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu \cos\beta + \cos\beta'(\mu \cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu \cos\gamma + \cos\gamma'(\mu \cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2});$$

denen im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction e untern Zeichen zu nehmen sind.

Durch Einführung einiger Hülfswinkel kann man sich die echnung nach diesen Formeln erleichtern.

Berechnet man die Hülfswinkel φ und ψ mittelst der Formeln

$$\tang\varphi = \frac{c_1 - r}{b_1 - q},$$
$$\tang\psi = \frac{b_1 - q}{(a_1 - p)\cos\varphi} = \frac{c_1 - r}{(a_1 - p)\sin\varphi};$$

o ist, wie man leicht findet,

$$E_1{}^2 = \left(\frac{a_1 - p}{\cos\psi}\right)^2.$$

Nimmt man nun aber, was offenbar verstattet ist, wenn

$b_1 - q$	und	$c_1 - r$
positiv		positiv
negativ		positiv
negativ		negativ
positiv		negativ

ist, φ so, dass respective

$$0 < \varphi < 90^\circ,$$
$$90^\circ < \varphi < 180^\circ,$$
$$180^\circ < \varphi < 270^\circ,$$
$$270^\circ < \varphi < 360^\circ$$

ist, so hat $\cos\varphi$ mit $b_1 - q$ stets einerlei Vorzeichen, und das Vorzeichen von $\operatorname{tang}\psi$ hängt also bloss von $a_1 - p$ ab. Nimmt man dann ferner ψ stets positiv und nicht grösser als 180°, so hat $\cos\psi$ einerlei Vorzeichen mit $a_1 - p$, und man kann also unter diesen Voraussetzungen immer

$$E_1 = \frac{a_1 - p}{\cos\psi}$$

setzen.

Berechnet man ferner den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$\sin\omega = \mu \sin\Theta,$$

und nimmt ω nicht grösser als 90°, so ist

$$\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2} = \cos\omega,$$

und folglich, weil

$$\mu = \frac{\sin\omega}{\sin\Theta}$$

ist, nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha \frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\alpha' \frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\beta_1 = \cos\beta \frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\beta' \frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma \frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\gamma' \frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta};$$

wo im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

Daher sind die bequemsten Formeln zur Auflösung unserer Aufgabe die folgenden:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c_1 - r}{b_1 - q},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b_1 - q}{(a_1 - p)\cos\varphi} = \frac{c_1 - r}{(a_1 - p)\sin\varphi};$$

$$E_1 = \frac{a_1 - p}{\cos\psi},$$

$$K_1 = (a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\cos\beta + (c_1 - r)\cos\gamma;$$

$$\sin\Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}},\ \sin\omega = \mu\sin\Theta;$$

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos\Theta)\cos\alpha,$$

$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos\Theta)\cos\beta,$$

$$r_1 = r + (K_1 + R_1 \cos\Theta)\cos\gamma;$$

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1};$$

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha\,\frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\alpha'\,\frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\beta_1 = \cos\beta\,\frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\beta'\,\frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma\,\frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\gamma'\,\frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta}.$$

Wie die Winkel φ, ψ, ω genommen werden müssen, ist aus dem Obigen bekannt; der Winkel Θ ist nie grösser als 90° zu nehmen.

Die Gleichungen des ausfallenden Strahls sind

$$\frac{x - p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y - q_1}{\cos\beta_1} = \frac{z - r_1}{\cos\gamma_1}.$$

Wenn die Gleichungen

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = R_1{}^2,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = R_2{}^2,$$
$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = R_3{}^2,$$
u. s. w.
$$(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2 = R_k{}^2$$

mehrerer zurückwerfenden oder brechenden Kugelflächen und die Zurückwerfungsverhältnisse *) oder die Brechungsverhältnisse für je zwei durch diese Kugelflächen von einander getrennte brechende Media gegeben sind, so hat es nun auch nach dem Vorhergehenden nicht die geringste Schwierigkeit mehr, die zur Bestimmung der Lage des letzten ausfallenden Strahls erforderlichen Formeln zu construiren. Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand und Anwendungen der im Vorhergehenden gewonnenen allgemeinen Formeln behalten wir aber spätern Abhandlungen vor.

---

*) Man vergleiche über den hier immer zum Grunde gelegten allgemeinern Begriff der Zurückwerfung Archiv. Thl. II. S. 147. Note.

XXI.

Drei Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung und ihrer conjugirten Halbmesser.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

I.

Wenn die Summe der Quadrate der aus n gegebenen Punkten auf eine Ebene gefällten Normalen constant ist, so berührt diese Ebene beständig eine centrale Oberfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt im Schwerpunkt der n Punkte liegt und deren Axen mit den Hauptaxen des Systems der n Punkte zusammenfallen (S. Litt. Bericht. Nr. XII. S. 191) und deren Brennpunkte eine bestimmte Entfernung vom Mittelpunkte haben.

Ehe ich zum Beweise dieses Satzes schreite, rufe ich einige elementare Sätze der analytischen Geometrie ins Gedächtniss zurück.

Die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Bezug auf ihren Mittelpunkt, als Anfangspunkt, und ihre (rechtwinkligen) Hauptaxen, als Coordinatenaxen, ist:

$$1)\ A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 1.$$

Ihre Halbaxen sind der Reihe nach $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{B}}$, $\sqrt{\frac{1}{C}}$, wie man findet, wenn der Reihe nach $y=0$, $z=0$; $z=0$, $x=0$; $x=0$, $y=0$ gesetzt wird. Die Gattung der Oberfläche wird leicht an den Zeichen von A, B, C erkannt. Sind alle drei positiv, so sind alle drei Halbaxen reell und man hat ein Ellipsoid. Ist eine der Grössen A, B, C negativ, so wird eine Halbaxe imaginär, und die Gleichung gehört einem einhülligen Hyperboloid an. Sind zwei derselben negativ, so liefert sie ein zweihülliges Hyperboloid.

Differenziirt man die Gleichung 1), so hat man

$$2)\ A\alpha d\alpha + B\beta d\beta + C\gamma d\gamma = 0.$$

Betrachtet man hier α, β, γ als beliebig gegeben und unveränderlich, so stellt diese Gleichung in Bezug auf die Coordinaten $d\alpha$,

$d\beta$, $d\gamma$ ein unendlich kleines, um den Punkt (α, β, γ) herumliegendes Stück der krummen Oberfläche dar. Da sie vom ersten Grade ist, so wird sie die Gleichung einer Ebene, welche die Oberfläche im Punkte (α, β, γ) berührt, wenn man statt der unendlich kleinen vom Berührungspunkte an gezählten Coordinaten $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ die endlichen $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ setzt, wo x, y, z die laufenden Coordinaten bedeuten; nämlich

$$3)\ A\alpha(x-\alpha)+B\beta(y-\beta)+C\gamma(z-\gamma)=0.$$

Addirt man hiezu die Gleichung 1), so ergiebt sich

$$4)\ A\alpha x+B\beta y+C\gamma z=1$$

als Gleichung der Tangentialebene im Punkte (α, β, γ). Diese Gleichung stellt zugleich die ganze Schaar der Tangentialebenen vor, wenn man den α, β, γ alle möglichen der Gleichung 1) genügenden Werthe giebt. Wenn umgekehrt die Gleichung einer Ebene

$$5)\ px+qy+rz=D$$

gegeben ist, so findet man sehr leicht die zwischen p, q, r, D stattfindende Bedingungsgleichung, damit sie die Oberfläche 1) berühre. Es muss nämlich

$$p=A\alpha D,\ q=B\beta D,\ r=C\gamma D$$

sein; eliminirt man hieraus mit Hülfe der Gleichung 1) α, β und γ, so bleibt als Bedingungsgleichung

$$6)\ \frac{p^2}{A}+\frac{q^2}{B}+\frac{r^2}{C}=D^2.$$

Bedeuten nun p, q, r die Cosinus der Winkel, welche eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade mit den Coordinatenaxen macht, so ist

$$7)\ p^2+q^2+r^2=1.$$

Sind ferner x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes, so bildet sein Leitstrahl mit den Axen Winkel, deren Cosinus beziehlich

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

sind. Der Cosinus des Winkels, den derselbe mit der Geraden (p, q, r) bildet, ist daher

$$p\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+q\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+r\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$=\frac{px+qy+rz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

die Länge des Leitstrahls ist $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, und folglich ist

$px + qy + rz$ die Projection desselben auf die Gerade (p, q, r). Es werden also der Gleichung 5)

$$px + qy + rz = D$$

alle diejenigen Punkte (x, y, z) genügen, deren Projectionen auf die Gerade (p, q, r) um D vom Anfangspunkt entfernt sind. Folglich ist obige Gleichung diejenige einer Ebene, deren Abstand vom Anfangspunkt gleich D ist und deren Normale mit den Axen Winkel von den Cosinus p, q, r macht. Die Gleichung einer Ebene kann immer auf die obige Form gebracht werden; denn sollte in der Gleichung

$$p_1 x + q_1 y + r_1 z = D_1$$

nicht $p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = 1$ sein, so darf man nur beide Seiten durch $\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}$ dividiren, um sogleich die gewünschte Form zu erhalten.

Seien nun x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ..... x_n, y_n, z_n die Coordinaten der in dem Lehrsatze gegebenen n Punkte; sei ferner

$$px + qy + rz = D,$$

wo $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, die Gleichung der fraglichen Ebene. Wenn man den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ auf die Normale (p, q, r) projicirt, so ist dem Obigen zufolge

$$px_1 + qy_1 + rz_1$$

der Abstand dieser Projection vom Anfangspunkt; mithin ist

$$8)\quad px_1 + qy_1 + rz_1 - D$$

der Abstand derselben von der in Rede stehenden Ebene. Aehnliche Ausdrücke erhält man für die übrigen Punkte $(x_2 y_2 z_2)$ u. s. w.

Wir wollen jetzt, den Lehrsatz ein wenig verallgemeinernd, die Quadrate dieser Abstände mit beliebigen Coefficienten m_1, m_2, ... m_n multipliciren und dann addiren. Auf diese Weise erhalten wir zwischen den Bestimmungsstücken der Ebene (p, q, r, D) die folgende Bedingung:

$$9)\quad \left.\begin{array}{l} m_1(px_1 + qy_1 + rz_1 - D)^2 \\ + m_2(px_2 + qy_2 + rz_2 - D)^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + m_n(px_n + qy_n + rz_n - D)^2 \end{array}\right\} = K$$

wo K eine Constante ist. Bedienen wir uns der Summenzeichen S und entwickeln wir die Quadrate, so erhalten wir

$$10)\quad \left.\begin{array}{l} p^2 S(mx^2) + 2qrS(myz) - 2DpS(mx) \\ + q^2 S(my^2) + 2rpS(mzx) - 2DqS(my) \\ + r^2 S(mz^2) + 2pqS(mxy) - 2DrS(mz) \\ + D^2 S(m) \end{array}\right\} = K$$

Denken wir uns nun die gegebenen n Punkte mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ behaftet, und stellen wir uns den Anfangspunkt und die Coordinatenaxen in dem Schwerpunkt und den Haupt-(trägheits)axen dieses materiellen Systems vor, so ist den Elementen der Statik zufolge:

$$11)\quad S(mx) = S(my) = S(mz) = S(myz) = S(mzx) = S(mxy) = 0.$$

Führt man ferner die folgenden Bezeichnungen ein:

$$12)\quad P = S(mx^2),\ Q = S(my^2),\ R = S(mz^2),\ M = S(m);$$

so stellt sich die Bedingungsgleichung 10) folgendermassen dar:

$$13)\quad Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + MD^2 = K,$$

oder, wegen $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, so:

$$14)\quad MD^2 = (K - P)p^2 + (K - Q)q^2 + (K - R)r^2.$$

Diese Gleichung hat dem Vorhergehenden zufolge genau die nöthige Form, damit die Ebene 5) eine Oberfläche zweiter Ordnung berühre, deren Mittelpunkt und Hauptaxen in den Anfangspunkt und die Coordinatenaxen, d. h. in den Schwerpunkt und die Hauptaxen des erwähnten materiellen Systems fallen. Hiemit ist der erste Theil des Lehrsatzes erwiesen.

Die Halbaxen dieser Oberfläche erhält man durch Vergleichung von 14) mit 6); nämlich

$$15)\quad \frac{1}{A} = \frac{K-P}{M},\ \frac{1}{B} = \frac{K-Q}{M},\ \frac{1}{C} = \frac{K-R}{M}.$$

Nun sind $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$, wie zu Anfang erwähnt worden, beziehlich gleich a^2, b^2, c^2, wenn a, b, c die halben Axen der Oberfläche zweiter Ordnung bedeuten. Es sind daher wegen 15) die Differenzen

$$a^2 - b^2,\ b^2 - c^2,\ c^2 - a^2$$

von der Constanten K unabhängig; woraus wir schliessen, dass die zu verschiedenen Werthen von K gehörigen krummen Oberflächen sämmtlich confocal sind. Hiermit ist auch der zweite Theil unseres Lehrsatzes erwiesen.

II.

Je zwei Ternionen conjugirter Halbmesser einer krummen Oberfläche zweiter Ordnung liegen in einer Kegelfläche zweiter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung einer Kegelfläche in Bezug auf drei beliebig durch ihre Spitze gehende Axen ist

$$1)\quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + Pyz + Qzx + Rxy = 0.$$

Wenn die drei Axen auf ihrer Oberfläche liegen, so muss

$$L = M = N = 0$$

sein; weil alsdann die Gleichungen $y = 0$, $z = 0$; $z = 0$, $x = 0$; $x = 0$, $y = 0$ ihr genügen müssen. Man hat daher

$$2)\quad \frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + \frac{R}{z} = 0$$

als Gleichung einer durch die drei Coordinatenaxen gehenden Kegelfläche. Die Gerade, deren Gleichung

$$3)\quad x : y : z = p : q : r$$

ist, wird daher in dieser Fläche liegen, wenn p, q, r der Gleichung

$$4)\quad \frac{P}{p} + \frac{Q}{q} + \frac{R}{r} = 0$$

genügen.

Sind nun (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ die auf der Oberfläche zweiter Ordnung

$$5)\quad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 1$$

liegenden Endpunkte dreier conjugirten Halbmesser, so ist der Definition derselben zufolge die Tangentialebene an einem dieser Punkte parallel mit der von den Leitstrahlen der beiden anderen gebildeten Ebene. Die Gleichung der Tangentialebene am ersten Punkt ist aber

$$6)\quad A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 1;$$

wird durch den Anfangspunkt eine Ebene mit dieser parallel geführt, so ist deren Gleichung

$$7)\quad A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 0;$$

in dieser Ebene liegen aber der zweite und dritte Punkt. Folglich ist

$$8)\begin{cases} A\alpha\alpha' + B\beta\beta' + C\gamma\gamma' = 0 \\ A\alpha''\alpha + B\beta''\beta + C\gamma''\gamma = 0; \end{cases}$$

und auf dieselbe Art findet sich noch die zugehörige Gleichung

$$8)\quad A\alpha'\alpha'' + B\beta'\beta'' + C\gamma'\gamma'' = 0.$$

Führt man nun die Bezeichnungen

$$9)\quad A\alpha\alpha'\alpha'' = P,\ B\beta\beta'\beta'' = Q,\ C\gamma\gamma'\gamma'' = R$$

ein, so kann man jene drei Gleichungen auch so schreiben:

$$10)\begin{cases}\frac{P}{\alpha}+\frac{Q}{\beta}+\frac{R}{\gamma}=0\\ \frac{P}{\alpha'}+\frac{Q}{\beta'}+\frac{R}{\gamma'}=0\\ \frac{P}{\alpha''}+\frac{Q}{\beta''}+\frac{R}{\gamma''}=0;\end{cases}$$

mithin genügen die drei Punkte (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$ $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ der Gleichung

$$2)\quad \frac{P}{x}+\frac{Q}{y}+\frac{R}{z}=0;$$

und folglich liegen die durch sie bestimmten drei conjugirten Halbmesser auf der von dieser Gleichung ausgedrückten Kegelfläche. Diese Kegelfläche geht aber durch die drei Coordinatenaxen; also liegen schiesslich diese conjugirten Halbmesser mit denjenigen, auf welche wir die Gleichung 5) bezogen haben, auf einer und derselben Kegelfläche zweiter Ordnung.

III.

Je zwei Ternionen conjugirter Durchmesserebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung berühren einen Kegel zweiter Ordnung.

Wenn man in der obigen allgemeinen Gleichung der Kegelfläche der Reihe nach $x=0$, $y=0$, $z=0$ setzt, so erhält man, α, β, γ für x, y, z setzend:

$$1)\begin{cases}M\beta^2+N\gamma^2+P\beta\gamma=0\\ N\gamma^2+L\alpha^2+Q\gamma\alpha=0\\ L\alpha^2+M\beta^2+R\alpha\beta=0.\end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen liefert zwei Gerade, als Durchschnitte der Kegelfläche mit den drei Coordinatenebenen. Setzt man nun

$$2)\quad P^2=4MN,\ Q^2=4NL,\ R^2=4LM,$$

so werden obige Ausdrücke vollständige Quadrate und liefern also jede nur eine Gerade. Unter den Bedingungen 2) wird folglich der Kegel die drei Coordinatenebenen berühren. Man erhält aus ihnen

$$3)\quad L=\pm\frac{QR}{2P},\ M=\pm\frac{RP}{2Q},\ N=\pm\frac{PQ}{2R}.$$

Die oberen Zeichen würden die Gleichung des Kegels zu einem vollständigen Quadrate machen; mithin gelten die unteren. Nach Substitution der Werthe 3) hat man

$$4)\quad \frac{\alpha^2}{P^2}+\frac{\beta^2}{Q^2}+\frac{\gamma^2}{R^2}-\frac{2\beta\gamma}{QR}-\frac{2\gamma\alpha}{RP}-\frac{2\alpha\beta}{PQ}=0$$

als Gleichung einer die drei Coordinatenebenen berührenden Kegelfläche.

Differentiirt man und setzt dann $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ für $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, so wird die Gleichung einer Tangentialebene:

$$\left(\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}\right)\frac{x-\alpha}{P}+\left(\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}\right)\frac{y-\beta}{Q}$$
$$+\left(\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}\right)\frac{z-\gamma}{R}=0$$

oder nach Addition von 4)

$$5)\quad \left(\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}\right)\frac{x}{P}+\left(\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}\right)\frac{y}{Q}$$
$$+\left(\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}\right)\frac{z}{R}=0.$$

Führt man jetzt die folgenden Bezeichnungen ein:

$$6)\quad u=\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R},\ v=\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P},\ w=\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q},$$

so ist

$$\frac{\alpha}{P}=-\tfrac{1}{2}(v+w),\ \frac{\beta}{Q}\tfrac{1}{2}=-(w+u),\ \frac{\gamma}{R}=-\tfrac{1}{2}(u+v).$$

Durch Einführung dieser Werthe reduzirt sich die Gleichung der Kegelfläche 4) auf

$$7)\quad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$$

und die ihrer Tangentialebene 5) auf

$$8)\quad \frac{ux}{P}+\frac{vy}{Q}+\frac{wz}{R}=0.$$

Die Ebene (p, q, r), nämlich deren Gleichung

$$9)\quad px+qy+rz=0$$

ist, berührt daher den Kegel 4), wenn, wie sich durch Vergleichung von 9) mit 8) findet,

$$10)\quad \frac{1}{Pp}+\frac{1}{Qq}+\frac{1}{Rr}=0$$

ist.

Für die Oberfläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$11)\quad Ax^2+By^2+Cz^2=1,$$

sind folgende die Gleichungen dreier conjugirter Durchmesserebenen:

$$12)\begin{cases} A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 0 \\ A\alpha' x + B\beta' y + C\gamma' z = 0 \\ A\alpha'' x + B\beta'' y + C\gamma'' z = 0, \end{cases}$$

wenn α, β, u. s. w. den Bedingungen:

$$13)\begin{cases} A\alpha'\alpha'' + B\beta'\beta'' + C\gamma'\gamma'' = 0 \\ A\alpha''\alpha + B\beta''\beta + C\gamma''\gamma = 0 \\ A\alpha\alpha' + B\beta\beta' + C\gamma\gamma' = 0 \end{cases}$$

entsprechen, wie aus dem Beweise zum vorigen Lehrsatze erhellt. Wenn man

$$14)\quad A^2\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{1}{P},\ B^2\beta\beta'\beta'' = \frac{1}{Q},\ C^2\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{1}{R}$$

setzt, so erhalten die Bedingungen 13) die Form

$$14)\begin{cases} \frac{1}{P.A\alpha} + \frac{1}{Q.B\beta} + \frac{1}{R.C\gamma} = 0 \\ \frac{1}{P.A\alpha'} + \frac{1}{Q.B\beta'} + \frac{1}{R.C\gamma'} = 0 \\ \frac{1}{P.A\alpha''} + \frac{1}{Q.B\beta''} + \frac{1}{R.C\gamma''} = 0. \end{cases}$$

Stellt man sich daher die Gleichungen 12) unter der Form $px + qy + rz = 0$ vor, so genügen die Coefficienten von allen dreien der Gleichung 10)

$$\frac{1}{P.p} + \frac{1}{Q.q} + \frac{1}{R.r} = 0.$$

Die drei Ebenen 12) berühren also den Kegel 4), wo P, Q, R die Werthe 14) haben; also berühren schliesslich diese drei conjugirten Durchmesserebenen nebst denen, auf welche wir die Gleichung 11) bezogen haben, einen und denselben Kegel zweiter Ordnung.

Die beiden Lehrsätze II. und III. können für die vollständige Verallgemeinerung des folgenden Satzes von Herrn Steiner (s. dessen Entwickelung der Abhängigkeit u. s. w. p. 313) gelten:

59) „Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige „Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so „findet Folgendes statt:

„**Die 6 Coordinatenaxen** „**liegen allemal in irgend** „**einer Kegelfläche zwei-** „**ten Grades.**

Die 6 Coordinatenebenen berühren allemal irgend eine Kegelfläche zweiten Grades.

„Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines umfassenderen Satzes.‘

Obgleich aber umgekehrt aus den Gleichungen 13) leicht hervorgeht, dass je zweimal drei Seiten einer Kegelfläche immer als zwei Ternionen zugeordneter Halbmesser einer Oberfläche zwei-

ten Grades angesehen werden können, so sind unsere beiden Lehrsätze doch nur besondere Fälle von zwei umfassenderen Sätzen, deren analytische Behandlung sehr verwickelt ausfallen dürfte, und die ich bei einer andern Gelegenheit mittheilen werde.

XXII.

Bestimmung eines Polynomiums durch Integrale seiner partiellen Differentialien, nebst einer Anwendung derselben.

Von

Herrn L. Mossbrugger

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

I. Sind $y_1, y_2, \ldots\ldots y_m$ eine Anzahl veränderlicher Grössen, $A'_1, A''_1, A''_2, A''_3, \ldots\ldots; A'''_1, A'''_2, A'''_3, \ldots\ldots$ u. s. w. aber beständige Coefficienten, und ist allgemein:

$$1)\ldots F=$$

$$A'_1 y^n_1 + \{A''_1 y_2 + A''_2 y_3 + A''_3 y_4 + \ldots + A''_{m-1} y_m + A''_m\} y_1^{n-1}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} A'''_1 y_2^2 + A'''_2 y_2 y_3 + A'''_3 y_2 y_4 + \ldots\ldots \\ \qquad + A'''_{m-1} y_2 y_m + A'''_m y_3^2 \\ + A'''_{m+1} y_3 y_4 + \ldots\ldots + A'''_{2m-2} y_3 y_m \\ \qquad + A'''_{2m-1} y_4^2 + \ldots\ldots \\ A'''_{\frac{m(m-1)+2}{2}} y_2 + \ldots\ldots + A'''_{\frac{m(m+1)-2}{2}} y_m \\ \qquad + A'''_{\frac{m(m+1)}{2}} \end{array}\right\} y_1^{n-2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \overset{n}{A}_1 y_2^{n-1} + \overset{n}{A}_2 y_2^{n-2}.y_3 + \ldots + \overset{n}{A}_{m-1} y_2^{n-2}.y_m + \overset{n}{A}_m y_3^{n-1} \\ + \overset{n}{A}_{m+1} y_3^{n-2}.y_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \overset{n}{A}\left(\frac{(m+n-2)(m+n-3)\ldots\ldots(n+1)n}{1.2\ldots.(m-2)(m-1)} - 1\right) y_m \\ \qquad + \overset{n}{A}\left(\frac{(m+n-2)(m+n-3)\ldots\ldots(n+1)n}{1.2\ldots.(m-2)(m-1)}\right) \end{array}\right\} y_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \overset{n+1}{A}_1 y_2^{n} + \overset{n+1}{A}_2 y_2^{n-1} y_3 + \ldots\ldots + \overset{n+1}{A}_{m-1} y_2^{n-1}.y_m + \overset{n+1}{A}_m y_3^{n} \\ \qquad + \overset{n+1}{A}_{m+1} y_3^{n-1} y_4 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \overset{n+1}{A}\left(\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots(n+2)(n+1)}{1.2\ldots.(m-2)(m-1)} - 2\right) y_{m-1} \\ \qquad + \overset{n+1}{A}\left(\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots.(n+2)(n+1)}{1.2\ldots.(m-2)(m-1)} - 1\right) y_m \\ + \overset{n+1}{A}\left(\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots(n+2)(n+1)}{1.2\ldots\ldots(m-2)(m-1)}\right) \end{array}\right\}$$

so kann gezeigt werden, dass, wenn:

$$\int\frac{dF}{dy_1}dy_1 + \int\frac{dF}{dy_2}.dy_2 + \int\frac{dF}{dy_3}.dy_3 + \ldots\ldots\ldots + \int\frac{dF}{dy_m}.dy_m = S' \ldots 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \int dy_1 \int\frac{d^2F}{dy_1 dy_2} dy_2 + \int dy_1 \int\frac{d^2F}{dy_1 dy_3} dy_3 + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \int dy_1 \int\frac{d^2F}{dy_1 dy_m} dy_m \\ + \int dy_2 \int\frac{d^2F}{dy_2 dy_3} dy_3 + \ldots\ldots\ldots + \int dy_{m-1} \int\frac{d^2F}{dy_{m-1} dy_m}.dy_m \end{array}\right\} = S'' \ldots 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \int dy_1 \int dy_2 \int\frac{d^3F}{dy_1 dy_2 dy_3} dy_3 + \\ \qquad \int dy_1 \int dy_2 \int\frac{d^3F}{dy_1 dy_2 dy_4} dy_4 + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \int dy_1 \int dy_2 \int\frac{d^3F}{dy_1 dy_2 dy_m}.dy_m \\ + \int dy_1 \int dy_3 \int\frac{d^3F}{dy_1 dy_3 dy_4} dy_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \int dy_{m-2} \int dy_{m-1} \int\frac{d^3F}{dy_{m-2} dy_{m-1} dy_m} dy_m \end{array}\right\} = S''' \ldots 4)$$

+ u. s. w. . . . .

+ u. s. w. . . . .

$$\left.\begin{array}{l}\int dy_1 \int dy_2 \ldots\ldots \int dy_{m-2} \int \frac{d^{m-1}F}{dy_1 dy_2 \ldots\ldots dy_{m-1}} \cdot dy_{m-1} \\ + \int dy_1 \int dy_2 \ldots\ldots \int dy_{m-2} \int \frac{d^{m-1}F}{dy_1 dy_2 \ldots dy_{m-2} \cdot dy_m} \cdot dy_m \\ + \ldots\ldots + \int dy_2 \int dy_3 \ldots \int dy_{m-1} \int \frac{d^{m-1}F}{dy_2 . dy_3 \ldots dy_{m-1} dy_m} \cdot dy_m\end{array}\right\} = \overset{(m-1)}{S} \ldots 5)$$

$$\int dy_1 \int dy_2 \ldots\ldots \int dy_{m-1} \int \frac{d^m F}{dy_1 dy_2 \ldots dy_m} dy_m = \overset{(m)}{S} \ldots\ldots 6)$$

gesetzt wird, alsdann:

$$F = S' - S'' + S''' - S'''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mp \overset{(m-1)}{S} \pm \overset{(m)}{S} + \text{Const.} \ldots 7)$$

Das obere Zeichen gilt für ein ungerades, und das untere für ein gerades m.

Hiebei ist jedoch zu bemerken, dass bei der Integration eines jeden partiellen Differentials die Constante jedesmal gleich Null gesetzt werden muss. Die einzige der ganzen Summe in Nr. 7. beizufügende Constante ist das letzte Glied des Ausdrucks von F in Nr. 1., welches wir erhalten, wenn wir $y_1 = y_2 = \ldots\ldots = y_m = 0$ setzen, so dass also

$$\text{Const} = A\left(\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots(n+2)(n+1)}{1 . 2 \ldots\ldots (m-2)(m-1)}\right) \ldots\ldots 8)$$

Die Richtigkeit der Gleichung Nr. 7. können wir aus Folgendem entnehmen. Differenziiren wir die Gleichung 1) nach einander nach $y_1, y_2, y_4, \ldots\ldots y_m$; integriren alsdann die so entstandenen partiellen Differentialien, so finden wir:

a) Dass in der Summe Nr. 2. jedes der Glieder, in welchem nur eine einzige der Veränderlichen $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_m$ in Verbindung mit einem der constanten Coefficienten $A'_1, A''_1, A''_2, \ldots$ u. s. w. enthalten ist, nur einmal vorkommt. Wir finden auch in der gleichen Summe S' Nr. 2., dass jedes der Glieder, in welchem irgend eine Verbindung von je zwei jener Veränderlichen vorkommt, in jener Summe zweimal enthalten ist. Ebenso kommt jedes der Glieder der Summe S', in dem eine Verbindung von 3, 4, ... m jener Veränderlichen enthalten ist, respective 3mal, 4mal, ... $m$mal vor.

b) Differenziiren wir aber die Gleichung 1) nach einander nach y_1 und y_2; nach y_1 und y_3; u. s. w. ..... nach y_{m-1} und y_m; und suchen alsdann, mit der Berücksichtigung, dass wie in *a*) bei jeder partiellen Integration die Constante als Null genommen wird, die Werthe der Integrale, welche in der Summe S'' der Nr. 3. vorkommen, so werden wir wieder finden, dass in der Summe S'' jedes Glied, in welchem eine Verbindung je zweier jener Veränderlichen vorkommt, $\frac{2 . 1}{1 . 2}$mal enthalten ist; ebenso kömmt in der gleichen Summe jedes der Glieder, in dem eine Verbindung von 4, ... m Veränderlichen enthalten ist, respektive $\frac{3 . 2}{1 . 2}$,

$\frac{4.3}{1.2}, \ldots\ldots \frac{m(m-1)}{1.2}$ mal vor; hingegen befindet sich in der Summe S'' kein einziges Glied, welches nur eine einzige Veränderliche enthält.

c) Differenziiren wir ferner die Gleichung 1) nach einander in Beziehung auf y_1, y_2 und y_3; in Beziehung auf y_1, y_2 und y_4; u. s. w. . . . . . in Beziehung auf y_{m-2}, y_{m-1} und y_m; nehmen alsdann mit der gleichen Berücksichtigung bei der Bestimmung der Constanten, wie in *a*) und *b*), die Integrale jener partiellen Differentialien, so werden wir die in Nr. 4. enthaltene Summe S''' erhalten, und in dieser so wie in den Vorhergehenden bemerken, dass in ihr kein Glied vorkommt, welches nur eine oder zwei Veränderliche enthält, hingegen, dass

jedes Glied, das drei Veränderliche enthält,		$\frac{3.2.1}{1.2.3}$	mal vorkommt.
- - - vier	- -	$\frac{4.3.2}{1.2.3}$	- -
- - - fünf	- -	$\frac{5.4.3}{1.2.3}$	- -
. . . .	. .	.	. .
. . . .	. .	.	. .
. . . .	. .	.	. .
. . . .	. .	.	. .
. . . .	. .	.	. .
- - - m	- -	$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$	mal -

d) Fahren wir bei der Bestimmung der übrigen Summen S^{IV}, S^{V}, u. s. w. auf die oben angegebene Art fort, und differenziiren, wenn wir endlich zur Bestimmung der Summe $S^{(m-1)}$ kommen, die Gleichung 1) in Beziehung auf $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{m-1}$; $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{m-2}, y_m$; u. s. w. . . . . $y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots y_m$; integriren alsdann wieder die partiellen Differentiale, indem wir ebenfalls bei jeder Integration die Constante gleich Null setzen, so erhalten wir die in Nr. 5. angegebene Summe $S^{(m-1)}$; in dieser Summe kommen keine Glieder vor, die weniger als $m-1$ Veränderliche enthalten; jedes der mit $m-1$ Veränderlichen behafteten Glieder kommt aber

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots\ldots(m-2)(m-1)} = 1 \text{ mal}$$

vor; jene hingegen, in welchen die Anzahl der Veränderlichen gleich m ist, kommen $\frac{m(m-1)\ldots\ldots 3.2}{1.2\ldots\ldots(m-1)} = m$ mal vor. Auf ähnliche Art finden wir die Summe $S^{(m)}$, in welcher das mit m Veränderlichen behaftete Glied einmal enthalten ist. Nehmen wir alsdann die Glieder sämmtlicher Summen S', S'', S''', ... $S^{(m)}$ wie es die Zeichen in Nr. 7. verlangen, zusammen, fügen endlich dem

Aggregat noch die in 8) angegebene Constante bei, und bemerken bei der Summation dieser Glieder den bekannten Satz, dass:

$$(1-1)^m = 0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + - + -$$
$$+ - \ldots \pm \frac{m}{1} \mp 1 \text{ ist,}$$

so finden wir, dass die Gleichung in 7) mit der in 1) identisch sei.

II. Dieser durch die Gleichung 7) ausgedrückte Satz lässt sich noch sehr erweitern. Um jedoch nicht allzuweitläufig zu werden, können wir, ohne dass dadurch der Allgemeinheit des Verfahrens geschadet wird, statt der m Veränderlichen nur drei, nemlich x, y und z nehmen; dadurch geht die Gleichung Nr. 7. I. in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} F = \int\frac{dF}{dx}\,.\,dx + \int\frac{dF}{dy}\,.\,dy + \int\frac{dF}{dz}\,.\,dz \\ -\int dy\int\frac{d^2F}{dxdy}\,.\,dx \\ -\int dx\int\frac{d^2F}{dxdz}\,.\,dz - \int dy\int\frac{d^2F}{dydz}\,.\,dz \\ +\int dx\int dy\int\frac{d^3F}{dxdydz}\,.\,dz + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \ldots 1)$$

Bei der Bestimmung der Werthe der einzelnen Integralien in dieser Gleichung (wobei jedoch jedesmal die Constante gleich Null gesetzt wird), werden wir sogleich bemerken, dass das erste x, das zweite y, und das dritte z zum gemeinschaftlichen Faktor hat; die Ausdrücke für das 4te, 5te, 6te und 7te Integral haben aber respektive xy, xz, yz und xyz zum gemeinschaftlichen Faktor, so dass wir also setzen können:

$$\int\frac{dF}{dx}\,.\,dx = xF', \int\frac{dF}{dy}\,.\,dy = yF'', \int\frac{dF}{dz}\,.\,dz = zF''';$$

$$\int dy\int\frac{d^2F}{dxdy}\,.\,dx = xy\,.\,f', \int dx\int\frac{d^2F}{dxdz}\,.\,dz = xz\,.\,f'',$$
$$\int dz\int\frac{d^2F}{dydz}\,.\,dy = yz\,.\,f''';$$

$$\int dx\int dy\int\frac{d^3F}{dxdydz}\,.\,dz = xyz\,\mathrm{f}.;$$

wo F', F'', ... diejenigen Theile der Werthe von $\int\frac{dF}{dx}dx$, $\int\frac{dF}{dx}\,.\,dy$, ... bezeichnen, welche respektive mit den Faktoren x, y, u. s. w. vervielfacht sind. Da nun diesem nach auch F', F'', F''', f' u. s. w. in Beziehung auf x, y und z Funktionen von gleicher Form sind wie F, so folgt auch nach Nr. 7. I. dass ebenso:

$$\left.\begin{aligned}F'=&\int\frac{dF'}{dx}.dx+\int\frac{dF'}{dy}.dy+\int\frac{dF'}{dz}.dz\\&-\int dy\int\frac{d^2F'}{dxdy}.dx\\&-\int dx\int\frac{d^2F'}{dxdz}.dz-\int dz\int\frac{d^2F'}{dydz}.dy\\&+\int dx\int dy\int\frac{d^3F'}{dxdydz}.dz+\text{Const.}\end{aligned}\right\}2)$$

$$\left.\begin{aligned}f'=&\int\frac{df'}{dx}.dx+\int\frac{df'}{dy}.dy+\int\frac{df'}{dz}.dz-\int dy\int\frac{d^2f'}{dxdy}\\&-\int dx\int\frac{d^2f'}{dxdz}.dz\\&-\int dz\int\frac{d^2f'}{dy.dz}.dy+\int dx\int dy\int\frac{d^3f'}{dxdydz}.dz+\text{Const.}\end{aligned}\right\}3)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{f}=&\int\frac{d\mathfrak{f}}{dx}.dx+\int\frac{d\mathfrak{f}}{dy}.dy+\int\frac{d\mathfrak{f}}{dz}.dz-\int dy\int\frac{d^2\mathfrak{f}}{dxdy}.dx\\&-\int dx.\int\frac{d^2\mathfrak{f}}{dxdz}.dz-\int dz\int\frac{d^2\mathfrak{f}}{dydz}.dy\\&+\int dx\int dy\int\frac{d^3\mathfrak{f}}{dxdydz}.dz+\text{Const.}\end{aligned}\right\}4)$$

Aehnliche Ausdrücke erhalten wir für F'', F''', f'', f'''. Die so eben in 2), 3) und 4) angegebenen Ausdrücke können wir auch leicht unter eine andere Form bringen; setzen wir nemlich:

$$xF'=\overset{1}{V}_1,\ yF''=\overset{1}{V}_2,\ zF'''=\overset{1}{V}_3;$$
$$xy.f'=\overset{2}{V}_1,\ xzf''=\overset{2}{V}_2,\ yzf'''=\overset{2}{V}_3,\ xyz\mathfrak{f}=\overset{3}{V}_1;$$

so ist auch: $\frac{V'_1}{x}=F'$ also $\frac{dF'}{dx}=\frac{1}{x}.\frac{dV'_1}{dx}-\frac{V'_1}{x^2}$, und daher:

$$\int\frac{dF'}{dx}.dx=\int\frac{1}{x}.\frac{dV'_1}{dx}.dx-\int\frac{V'_1}{x^2}dx;$$

$$\int\frac{dF'}{dy}dy=\frac{1}{x}.\int\frac{dV'_1}{dy}.dy,\ \int\frac{dF'}{dz}.dz=\frac{1}{x}\int\frac{dV'_1}{dz}.dz;$$

$$\int dy\int\frac{d^2F'}{dxdy}.dx=\int dy\int\frac{1}{x}.\frac{d^2V'_1}{dxdy}.dx-\int dy\int\frac{1}{x^2}\frac{dV'}{dy}.dx;$$

$$\int dx\int\frac{d^2F'}{dx.dz}dz=\int dx\int\frac{1}{x}.\frac{d^2V'_1}{dxdz}dz-\int dx\int\frac{1}{x^2}\frac{dV'_1}{dz}dz;$$

$$\int dz\int\frac{d^2F'}{dydz}.dy=\frac{1}{x}\int dz\int\frac{d^2V'_1}{dydz}dz;$$

$$\int dx\int dy\int\frac{d^3F'}{dxdydz}dz=\int dx\int dy\int\frac{1}{x}.\frac{d^3V'_1}{dxdydz}.dz-\int dx\int dy\int\frac{1}{x^2}\frac{d^2V'_1}{dydz}.dz.$$

Führen wir diese Werthe in 2) ein, so ist:

$$\left.\begin{aligned}F'=\int\frac{dV'_1}{xdx}.dx+\frac{1}{x}\int\frac{dV'_1}{dy}.dy+\frac{1}{x}\int\frac{dV'_1}{dz}dz\\ -\int dy\int\frac{d^2V'_1}{xdxdy}dx\\ -\int dx\int\frac{d^2V'_1}{xdxdz}.dz-\frac{1}{x}\int dz\int\frac{d^2V'_1}{dydz}.dy\\ +\int dy\int\frac{dV'_1}{x^2dy}.dx\\ +\int dx\int\frac{dV'_1}{x^2dz}.dz+\int dx\int dy\int\frac{d^3V'_1}{xdxdydz}dz\\ -\int dx\int dy\int\frac{d^2V'_1}{x^2dydz}.dz+\text{Const.}\end{aligned}\right\}5)$$

Ganz auf gleiche Art erhalten wir auch für F'', F''', f' f'', f''' und $\mathfrak{f}$ ähnliche Ausdrücke, wie hier von F'; und wir werden erkennen, dass die auf diese Weise für F', F'', F''' gefundenen Werthe durch die zweiten, dritten, vierten Ableitungen von F und durch eine Constante bestimmt sind; ebenso hängt die Bestimmung der Werthe von f', f'', f''' von einer Constanten und der dritten, vierten, fünften, so wie die von $\mathfrak{f}$ von der vierten, fünften und sechsten Ableitung von F und einer Constanten ab. Führen wir die gefundenen Werthe der Ausdrücke F', F'', F''', f' u. s. w. in der Gleichung 1) ein, so erhalten wir einen neuen Ausdruck, welcher die Abhängigkeit der Funktion F von den Integralien ihrer ersten, zweiten, u. s. w. Ableitungen angiebt. Auf welche Weise dieses Verfahren weiter fortgesetzt werden kann ist klar.

III. Der Taylor'sche Satz zeigt uns, wie aus der Gleichung der Fläche die Gleichungen der Oerter der Mittelpunkte gefunden werden können. Es ist nemlich bekannt, dass wenn durch $F=0$ die Gleichung einer Fläche des $n$ten Grades, und mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten ihres Mittelpunkts ausgedrückt werden, dass alsdann, für $n=2m$,

$$\frac{d^{2m-1}F}{dz_1{}^{2m-1}}=0;\ \frac{d^{2m-1}F}{dz^{2m-2}dy_1}=0;\ \text{u. s. w.} \dots\dots$$

$$\frac{d^{2m-3}F}{dz_1{}^{2m-3}}=0;\ \frac{d^{2m-3}F}{dz_1{}^{2m-4}dy_1}=0;\ \text{u. s. w.} \dots\dots$$

u. s. w. . . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{dF}{dz}=0;\ \frac{dF}{dy}=0;\ \frac{dF}{dx}=0$$

und für $n=2m+1$

$$\frac{d^{2m}F}{dz_1{}^{2m}} = 0; \quad \frac{d^{2m}F}{dz_1{}^{2m-1}dy_1} = 0; \text{ u. s. w. } \ldots\ldots$$

$$\frac{d^{2m-2}F}{dz_1{}^{2m-2}} = 0; \quad \frac{d^{2m-2}F}{dz_1{}^{2m-3}dy_1} = 0; \text{ u. s. w. } \ldots\ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^2F}{dz_1{}^2} = 0; \quad \frac{d^2F}{dz_1 dy_1} = 0; \text{ u. s. w. } \ldots\ldots$$

Bedingungsgleichungen für das Vorhandensein von Mittelpunk-
einer Fläche des $n$ten Grades sind. Die Gleichung 1). II. zeigt
aber, wie aus einer gegebenen Constanten, und den gegebe-
Werthen der Ausdrücke

$$\frac{dF}{dz}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dx}, \frac{d^2F}{dxdy}, \frac{d^2F}{dxdz}, \frac{d^2F}{dydz}, \frac{d^3F}{dxdydz}$$

Funktion F oder die Gleichung der Fläche des $n$ten Grades
gestellt werden kann; oder wie wir mittelst der Gleichungen
, 3, u. s. w. im Stande sind, aus gegebenen Constanten, und
2ten, 3ten, 4ten, 5ten und 6ten Ableitungen von $F = 0$ die
chung der Fläche selbst herzustellen. Wir wollen dieses in
m Beispiel ausführen.

Es seien die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \ldots{}^2 + Fy^2 + Gxy + Hx^2 + 2Exz + 2Dyz \\ \qquad + 2A'z + F'y + E'x + A'' = \dfrac{dF}{dz} \end{array}\right\} = 0 \ldots 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots{}^2 + 2By^2 + Kx^2 + 2Mxy + Gxz + 2Fyz \\ \qquad + F'z + 2B'y + D'x + B'' = \dfrac{dF}{dy} \end{array}\right\} = 0 \ldots 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots{}^2 + My^2 + 3Cx^2 + 2Kxy + 2Hxz + Gyz \\ \qquad + E'z + D'y + 2C'x + C'' = \dfrac{dF}{dx} \end{array}\right\} = 0 \ldots 3)$$

$$Gz + 2My + 2Kx + D' = \frac{d^2F}{dxdy} = 0 \ldots 4)$$

$$2Ez + 2Hx + Gy + E' = \frac{d^2F}{dxdz} = 0 \ldots 5)$$

$$2Dz + 2Fy + Gx + F' = \frac{d^2F}{dydz} = 0 \ldots 6)$$

$$\frac{d^3F}{dxdydz} = G \ldots\ldots 7)$$

eben, so finden wir aus 1, 2, 3:

$$\int \frac{dF}{dz}\,dz = Az^3 + Fy^2z + Gxyz + Hx^2z + Exz^2 + Dyz^2$$
$$+ A'z^2 + F'yz + E'xz + A''z$$
$$\int \frac{dF}{dy}\,dy = Dz^2y + By^3 + Kx^2y + Mxy^2 + Gxyz + Fy^2z$$
$$+ F'yz + B'y^2 + D'xy + B''y$$
$$\int \frac{dF}{dx}\,.\,dx = Ez^2x + My^2x + Cx^3 + Kx^2y + Hx^2z + Gxyz$$
$$+ E'xz + D'yx + C'x^2 + C''x$$

und aus 4), 5), 6):

$$\int dy \int \frac{d^2F}{dxdy}\,.\,dx = Gxyz + Mxy^2 + Kx^2y + D'xy$$
$$\int dx \int \frac{d^2F}{dxdz}\,.\,dz = Ez^2x + Hx^2z + Gxyz + E'xz$$
$$\int dz \int \frac{d^2F}{dydz}\,.\,dy = Dz^2y + Fy^2z + Gxyz + F'yz$$

endlich ist aus 7):

$$\int dx \int dy \int \frac{d^3F}{dxdydz}\,.\,dz = Gxyz.$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung 1). II. ein, so erhalten wir:

$$F = \left\{ \begin{array}{l} Az^3 + Dz^2y + Ez^2x + Fzy^2 + Gzxy + Hzx^2 \\ \qquad + By^3 + My^2x + Kyx^2 \\ + Cx^3 + A'z^2 + B'y^2 + C'x^2 + D'xy + E'xz \\ \qquad + F'yz + A''z + B''y \\ + C''x + \text{Const.} \end{array} \right\} = 0 \;..\; 8)$$

Wir können nun die Gleichungen 1), 2) und 3) als drei Flächen angehörig betrachten, auf deren Oberfläche reelle oder imaginäre Mittelpunkte der Fläche, die durch die zu bestimmende Gleichung $F=0$ ausgedrückt wird, liegen müssen. Ebenso können die Gleichungen 4), 5), 6) als Gleichungen von drei Ebenen angesehen werden, auf denen sich ebenfalls reelle oder imaginäre Mittelpunkte der zu bestimmenden Fläche befinden müssen. Der Ausdruck 7) stellt einen aus jeder der drei Gleichungen 4), 5) oder 6) zu erhaltenden, also bekannten Coefficienten vor.

Um die Fläche 8) vollends zu bestimmen, können wir die Bedingungen treffen, dass sie durch einen gegebenen Punkt (a, b, c) gehe, so dass also:

$$\left. \begin{array}{l} Ac^3 + Dc^2b + Ec^2a + Fcb^2 + Gcba + Hca^2 + Bb^3 + Mb^2a \\ + Kba^2 + Ca^3 + A'c^2 + B'b^2 + C'a^2 + D'ab + E'ac + F'bc \\ + A''c + B''b + C''a + \text{Const.} \end{array} \right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der Werth der Constanten. Auf ganz gleiche Art können wir aus den 3 gegebenen Gleichungen:

$$\frac{dF}{dz} = az + c'y + b'x + a'' = 0 \; \ldots \; 9)$$

$$\frac{dF}{dy} = c'z + by + a'x + b'' = 0 \; \ldots \; 10)$$

$$\frac{dF}{dx} = b'z + a'y + cx + b'' = 0 \; \ldots \; 11)$$

und der Bedingung, dass die Fläche, deren Gleichung gesucht wird, durch einen gegebenen Punkt (α, β, γ) gehen soll, die Gleichung einer Fläche zweiten Grades bestimmen, deren Mittelpunkt auf den drei Ebenen 9), 10) und 11) liegt. Denn es ist aus 9), 10) und 11)

$$\frac{d^2F}{dzdy} = c', \; \frac{d^2F}{dzdx} = b', \; \frac{d^2F}{dydx} = a';$$

$$\frac{d^3F}{dxdydz} = 0.$$

Aus 9), 10), 11) und den so eben erhaltenen Werthen von $\frac{d^2F}{dxdy}$, $\frac{d^2F}{dxdz}$, u. s. w. erhalten wir, wie im vorigen Beispiel, für die fragliche Gleichung folgende:

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + d = 0$$

wo wir der Kürze wegen

$$d = -\tfrac{1}{2}\{a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 + 2a'\alpha\beta + 2b'\alpha\gamma + 2c'\beta\gamma + 2a''\gamma + 2b''\beta + 2c''\alpha\}$$

gesetzt haben.

Stellt endlich $F = 0$ die Gleichung einer Fläche des $n$ten Grades vor, so kann diese ebenfalls bestimmt werden, wenn die Werthe der Ausdrücke $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$, also auch die von $\frac{d^2F}{dxdy}$, $\frac{d^2F}{dxdz}$, $\frac{d^2F}{dydz}$, $\frac{d^3F}{dxdydz}$ und noch eine Constante bekannt sind; die Gleichung 1). II. ist ebenfalls zur Bestimmung von F erforderlich.

XXIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Doctor A. Wiegand, Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Halle.

Denkt man sich die Kanten einer regulären Pyramide, so wie auch die Seiten der Grundfläche in den Zusammenstossungspunkten beweglich, so wird man diesem Gestelle (um diesen kurzen Ausdruck zu gebrauchen) verschiedene Gestalten geben können, wobei sich jedoch nur die Winkel der Grundfläche ändern können. Bringt man zwischen die Seiten der Grundfläche dieses Gestelles eine Kugel und drückt diese zwischen die Kanten, so wird dieselbe, wenn sie am weiteren Vordringen gehindert wird

1) die reguläre Pyramide herstellen;

2) die Kanten werden die Kugel sämmtlich berühren;

3) die Berührungspunkte werden sämmtlich in einem Kreise liegen;

4) die Berührungspunkte werden diesen Kreis in n gleiche Theile theilen, wenn die Grundfläche des Gestelles n Seiten hatte.

5) Wie gross ist der Radius dieses Kreises, wenn der Radius der Kugel $=r$, die Kanten $=k_1\ k_2 \ldots k_n$, die Seiten der Grundfläche $s_1\ s_2 \ldots s_n$ sind?

6) Wie weit wird die Kugel vordringen, d. h. wie gross wird der Abstand ihres Mittelpunkts von der Spitze sein?

7) Wenn man sich ein solches Gestelle durch Drähte, Stäbe u. s. w. machen wollte, was hätte man bei der Wahl des Winkels an der Spitze oder der Seite der Grundfläche zu beachten?

8) Kann man bei jeder beliebig vielseitigen Pyramide einen construirbaren Winkel an der Spitze wählen?

9) Welche Winkel würden die bequemsten sein, wenn man sich einen Kreis auf die angegebene Weise in 7, 9, 11, 13 u. s. w. gleiche Theile theilen wollte?

10) Unter welchen Umständen wird die Kugel die Seiten der Grundfläche berühren?

11) Wird die Kugel die Seiten der Grundfläche und die Kanten zugleich berühren können?

12) Wie werden die Erscheinungen sich abändern, wenn man statt der Kugel einen Kegel nimmt?

13) Wird jeder Kegel gebraucht werden können?

14) Was wird eintreten, wenn die Seitenlänge des Kegels gleich der Kante des Gestelles ist? u. s. w.

Verbindet man die Mittelpunkte der drei Seiten eines Dreiecks durch gerade Linien, sucht in den entstehenden 4 Dreiecken die 4 ausgezeichneten Punkte und verbindet in den 3 äussern Dreiecken die analogen Punkte durch gerade Linien, dann ist zu untersuchen:

1) In welcher Beziehung stehen die Seiten und Flächeninhalte dieser Dreiecke unter sich und zum ursprünglichen Dreiecke?

2) In welcher Beziehung stehen zu den neuen Dreiecken und zum ursprünglichen die ausgezeichneten Punkte des mittleren?

3) Welche ähnlichen Betrachtungen lassen sich beim 4eck, 5eck, (regelmässigen und unregelmässigen) $n$eck anstellen?

4) Wenn man die ausgezeichneten Punkte eines beliebigen Dreiecks mit den Winkelspitzen desselben verbindet und die ausgezeichneten Punkte der entstandenen 3 Dreiecke in ähnlicher Weise, wie vorher, verbindet, welche Resultate geben dann die den vorigen ähnlichen Betrachtungen der entstehenden Dreiecke?

5) Wenn man ein reguläres 4eck, 5eck, 6eck, 8eck, 10eck u. s. w. durch Radien in 4, 5, 6 u. s. w. Dreiecke theilt und verbindet die entsprechenden ausgezeichneten Punkte dieser Dreiecke, in welcher Beziehung stehen die durch ähnliche Verbindung der merkwürdigen Punkte entstehenden 4, 5, 6 . . ecke unter sich und zum ursprünglichen?

6) Welche Progressionen ergeben sich bei fortgesetzter Operation für die Flächenräume, Seiten und Radien der um- und eingeschriebenen Kreise?

XXIV.

Miscellen.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Professors G. J. Verdam an der Universität zu Leiden an den Herausgeber.

En developpant pour mes élèves, ces jours ci, les premières règles du calcul intégral, il m'a paru, que la recherche de l'intégrale $\int\frac{dx}{x}$ ne fait pas un cas d'exception, quand on envisage la question d'un autre point de vue qu'ordinairement.

Dans touts les Traités on se contente de dire:

puisqu'on a $d \,.\, x^{m+1} = (m+1)x^m \,.\, dx$, on en conclut

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

La valeur $m = -1$ donne un cas d'exception, puisqu'elle entraine un changement dans la nature de la fonction, par la quelle l'intégrale est représentée; et en effet, on sait, par le calcul différentiel, que $d \,.\, l(x) = \frac{dx}{x}$, d'ou, reciproquement,

$$\int \frac{dx}{x} = l(x) + C.$$

Pareillement on conclut de $d \,.\, e^x = e^x dx$, que l'on aura $\int e^x dx = e^x + C$, et ainsi de suite.

D'ailleurs on explique, que la considération d'un cas d'exception pour la formule $\frac{dx}{x}$ peut être évitée par l'emploi d'une intégrale définie, savoir:

$$\int_a^x x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

dont la valeur est indeterminée $\frac{0}{0}$ pour $m = -1$; puis la vraie valeur $l(\frac{x}{a})$ est fournie par l'application de la règle connue du calcul différentiel.

Or ni une telle inversion de formules, ni une pareille remarque sont nécessaires, si l'on part d'un autre principe. Ce principe est celui de l'intégration par parties, par lequel on a $\int v \,.\, du = v \,.\, u - \int u dv$. Ainsi, par exemple, et sans avoir egard a la constante arbitraire,

$$\int x^m \,.\, dx = x^m \,.\, x - \int x \,.\, m x^{m-1} dx = x^{m+1} - m \int x^m dx;$$

d'ou

$$(1 + m) \int x^m dx = x^{m+1},$$

et

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

De la même manière, et par une application répétée du même principe on peut trouver directement les integrales des formules différentielles, que l'on considère comme fondamentales, et que l'on pose ordinairement par inversion. La formule $\frac{dx}{x}$ même n'en fait pas exception. A la vérité, quand on y applique directement le dit principe, on retombe sur l'indétermination, ou conduit la méthode ordinaire; mais rien n'empèche de poser la variable x comme étant la somme d'une autre variable y et d'une constante, par exemple l'unité. Faisant ainsi $x = 1 + y$, on aura $dx = dy$, et

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{1}{1+y}\,.\,dy=\frac{y}{1+y}-\int y\,.\,d\,.\,\frac{1}{1+y}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\int\frac{ydy}{(1+y)^2}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2}-\tfrac{1}{2}\int y^2\,.\,d\,.\,\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2}+\int\frac{y^2dy}{(1+y)^3}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2}+\tfrac{1}{3}\frac{y^3}{(1+y)^3}+\int\frac{y^3dy}{(1+y)^4}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{y}{1+y}\right)^4+$$

etc.

et comme la valeur de cette serie a pour limite $-l(1-\frac{y}{1+y})$ $=-l(\frac{1}{1+y})=+l(1+y)=+l(x)$, on pourra conclure que c'est la valeur de l'integrale cherchée.

Comme je trouve de temps en temps dans votre Journal des nouvelles démonstrations, dévéloppemens ou expositions de Theorèmes, formules ou règles connues, il ne m'a paru pas sans intérêt de vous communiquer le dévéloppement ci dessus; bien qu'il n'est pas difficile de trouver, dans plusiers cas, d'autres voies pour atteindre un but deja connu, mais il pourrait que la voie, indiquée ci haut, fut digne de rémarque.

Herr Divisionsprediger **Otto** zu **Stargard** hat mir folgende bloss auf den ptolemäischen Lehrsatz gestützte, also von trigonometrischen Betrachtungen ganz unabhängige Auflösung der Aufgabe von der Trisection des Winkels mitgetheilt.

In Taf. II. Fig. 15. sei ACB der in drei gleiche Theile zu theilende Winkel, und um dessen Spitze C als Mittelpunkt mit dem beliebigen Halbmesser $AC=r$ ein Kreis beschrieben. Setzen wir die bekannten Sehnen $AB=a$, $BF=k$, den bekannten Durchmesser $AF=d$, und $AD=DE=BE=x$, $AE=BD=y$, so liefert das in den Kreis beschriebene Viereck $ADEB$ nach dem ptolemäischen Lehrsatze die Gleichung

$$x^2+ax=y^2,$$

und das in den Kreis beschriebene Viereck $ADBF$ liefert nach demselben Satze, weil $DF=\sqrt{d^2-x^2}$ ist, die Gleichung

$$kx+dy=a\sqrt{d^2-x^2}.$$

Durch Elimination von y erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$kx + d\sqrt{x^2 + ax} = a\sqrt{d^2 - x^2}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten, so kommt

$$(k^2 + d^2)x^2 + ad^2x + 2kdx\sqrt{x^2 + ax} = a^2(d^2 - x^2)$$

oder

$$(k^2 + a^2 + d^2)x^2 + ad^2x + 2kdx\sqrt{x^2 + ax} = a^2d^2,$$

also, weil $k^2 + a^2 = d^2$ ist, wenn man zugleich durch d dividirt:

$$2kx\sqrt{x^2 + ax} = d(a^2 - ax - 2x^2).$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen, wobei man immer zu beachten hat, dass $d^2 - k^2 = a^2$ ist, die Gleichung des vierten Grades

$$4x^4 + 4ax^3 - 3d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2 = 0$$

oder, wenn man $d = 2r$ setzt, die Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 - 3r^2x^2 - 2ar^2x + a^2r^2 = 0,$$

mittelst welcher die gesuchte Sehne x, durch die der dritte Theil des gegebenen Winkels bestimmt wird, gefunden werden muss.

Beträgt der gegebene Winkel zwei rechte Winkel oder 180°, so ist $a = 2r$, und die Gleichung zur Bestimmung der Sehne x des dritten Theils wird nach dem Obigen

$$x^4 + 2rx^3 - 3r^2x^2 - 4r^3x + 4r^4 = 0.$$

Bekanntlich ist in diesem Falle $x = r$, und wirklich ist auch

$$r^4 + 2r \,.\, r^3 - 3r^2 \,.\, r^2 - 4r^3 \,.\, r + 4r^4 = 0.$$

G.

Berichtigung.

Auf Seite 127 hat man statt Taf. II. überall Taf. III. zu setzen.

XXV.

Bemerkungen zu den Aufsätzen XXXI. und XXXII. des Herrn Dr. Schlömilch in Thl. III. S. 269 und S. 278. dieses Archives.

Von
Herrn Doctor Barfuss
zu Weimar.

1.

In diesen beiden Aufsätzen ist Herr Dr. Schlömilch zuerst gegen die Methode der unbestimmten Coefficienten und dann gegen den Gebrauch divergirender Reihen aufgetreten und hat seine Meinung in Bezug auf den zweiten Punkt durch Beispiele unterstützt, die gewiss jeden Mathematiker sogleich auf seine Parthei führen würden, wenn die Grundlagen der Rechnungen richtig wären. Da man heut zu Tage allgemein auf Seiten des Verfassers steht und von einer Gegenparthei fast gar nicht die Rede ist, so halte ich es für angemessen, dass auch einmal die letztere ergriffen werde, und versuche demgemäss, das Irrige der Ansichten, namentlich in den genannten Aufsätzen des Herrn Verfassers, aufzuklären.

2.

Zuerst also wird gegen die Methode der unbestimmten Coefficienten der schon wiederholt besprochene Einwand gemacht: „dass noch gezeigt werden müsse, dass die Function $f(x)$ durch die Eigenschaft, durch welche die Entwickelung gemacht wurde, vollkommen charakterisirt sei, dass es keine andere Function $\varphi(x)$ gebe, welche die nämliche Eigenschaft besitze, ohne mit $f(x)$ identisch zu sein." Verstehe ich hier recht, so ist die Meinung die, dass wohl für zwei ganz verschiedene Functionen in Folge gemeinschaftlicher syntaktischer Eigenschaften ein und dieselbe, in allen ihren Theilen vollkommen bestimmte, Reihe gefunden werden könnte. Dann

passt aber das angeführte Beispiel nicht hierher; denn müsste dasselbe nicht so gewählt sein, dass durch die Methode der unbestimmten Coefficienten für zwei verschiedene Functionsformen doch ein und dieselbe Reihe hervorginge?

So haben allerdings die Funktionen $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ und $\cos ax$ die Eigenschaft gemein, dass $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$, allein diess beweist gar nichts gegen die Methode der unbestimmten Coefficienten. Beide Functionen haben die Eigenschaft, dass sie $= 1$ sind für $x = 0$ und für gleiche aber entgegengesetzte Werthe von x ganz gleiche Werthe erhalten, so dass man für beide setzen darf:

$$f(x) = 1 + bx^2 + cx^4 + dx^6 + \ldots .$$

Durch die gedachte Eigenschaft beider Functionen bestimmt sich nun für beide auch einerlei Relation der Reihencoefficienten, aber auch weiter nichts. Denn setzen wir $x+y$ und $x-y$ statt x, so erhalten wir durch leichte Rechnung:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \\ + 1 \cdot 2by^2 + 3 \cdot 4 \cdot cx^2y^2 + 5 \cdot 6dx^4y^2 + \ldots \\ + Py^4.$$

Wir erhalten aber auch

$$2f(x)\,f(y) = 2f(x) + 2by^2 + 2bbx^2y^2 + 2bcx^4y^2 + \ldots\ldots \\ + Qy^4,$$

und wenn wir nun beide Entwickelungen einander gleich setzen, so hebt sich $2f(x)$ und Alles lässt sich mit y^2 dividiren. Setzen wir dann noch $y = 0$, so wird

$$1 \cdot 2b + 3 \cdot 4cx^2 + 5 \cdot 6dx^4 + \ldots\ldots \\ = 2b + 2bbx^2 + 2bcx^4 + \ldots\ldots$$

und folglich $b = b$, $c = \frac{2b^2}{3 \cdot 4}$, $d = \frac{2^2b^3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ u. s. w. Daher gilt für $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ sowohl, als auch für $\cos ax$ die Entwickelung

$$1 + bx^2 + \frac{2b^2}{3 \cdot 4} \cdot x^4 + \frac{2^2b^3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\,x^6 + \ldots,$$

aber b ist noch nicht bestimmt und hat in der That in jeder Function einen eignen Werth, der nur durch eine Eigenschaft gefunden werden kann, die eine jede Function als verschieden von der anderen charakterisirt.

Hätte aber Herr Dr. Schlömilch nun noch für beide Functionen dasselbe b gefunden, so wäre sein Beispiel treffend gewesen. So wird aber im Beispiele der Schluss verfehlt. Es werden dem Ausdrucke $f(x)$ die Eigenschaften beigelegt, die der Function $\operatorname{arctg} x$ zukommen, und es findet sich für $f(x)$ eine vollkommen bestimmte Reihe, welche zeigt, dass jedem bestimmten Werthe von x ein bestimmter Werth von $f(x)$ angehört, und dass folglich die Func-

tion $f(x)$ durch die ihr beigelegten Eigenschaften vollkommen bestimmt ist. Die Nachweisung, dass $f(x) = \operatorname{arctg} x$ sei, hat mit der Methode der unbestimmten Coefficienten nichts zu schaffen.

Und wo wollte man auch den Beweisgrund hernehmen, dass zwei verschiedene Functionen dennoch einerlei Reihenentwickelung geben könnten. Dass eine gemeinschaftliche syntaktische Eigenschaft derselben auch eine gemeinschaftliche Relation der Coefficienten in beiden Entwickelungen begründet, ist doch wohl ganz natürlich.

Dennoch aber müssen wir den Gegnern zugeben, dass die Methode der unbestimmten Coefficienten, so wie sie meistens in Anwendung gebracht worden, nicht befriedigt; der Grund davon ist aber nicht der vom Herrn Dr. Schlömilch angegebene, sondern ist lediglich in dem Umstande zu suchen, dass, bevor die Coefficienten berechnet werden, die Form der Reihe bezüglich der Hauptgrösse gar nicht hinlänglich begründet ist. Weil für $x = 0$ auch $f(x) = 0$ wird, sagt Herr Dr. Schlömilch *), so darf die fragliche Reihe kein von x freies Glied enthalten. Ja wenn überhaupt eine solche Reihe existirt! Dann ist aber auch der Satz nicht richtig, denn oft existiren zwei Reihen neben einander, von denen die erste kein von x freies Glied hat und nach positiven Potenzen von x geordnet ist, während die andere ein constantes Glied hat und nach negativen Potenzen der Hauptgrösse fortschreitet. Vor diesem Schlusse warnte vor einiger Zeit ein Engländer, indem er die Function $e^{-\frac{1}{x}}$ als Beispiel anführte; dieselbe verschwindet für $x = 0$, hat aber in ihrer Entwickelung ein constantes Glied und ist aus negativen Potenzen von x gebildet.

Die Existenz der Reihe muss vor Allem erwiesen sein! und dieses können die unbestimmten Coefficienten nicht leisten. So wird der binomische Lehrsatz sehr gut allgemein mit Hülfe der unbestimmten Coefficienten bewiesen, weil sich sehr leicht zeigen lässt, dass bei jedem Werthe von m für $(1+x)^m$ eine Reihe von der Form $1 + mx + Ax^2 + Bx^3 + \ldots$ wirklich existirt. Die Methode der unbestimmten Coefficienten soll die Reihe nicht erfinden, sondern nur auf eine leichte Weise die Coefficienten und ihr Bildungsgesetz darthun. Hierauf kommt der Herr Verfasser der gedachten Aufsätze später, wo er das Beispiel $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots$, anführt, wirklich zurück. Die Existenz dieser Reihe hätte erst dargethan sein müssen.

Die Existenz einer Reihe wird nur dann mit Evidenz bewiesen, wenn sie auf schon bekannte Entwickelungen zurückgeführt wird. Diess geht leicht bei dem Binom und dann bei den Exponentialfunctionen, nicht aber bei den Ausdrücken $\sin x$ und $\cos x$, weil dieselben nicht durch eine Synthesis der allgemeinen Arithmetik, sondern durch geometrische Abstractionen gewonnen worden sind. Hier könnte man die Methode der unbestimmten Coefficienten schon damit chicaniren, dass man fragte, ob denn auch $\sin x$ oder $\cos x$ einerlei Functionsformen für alle Werthe von x seien. Die geome-

---

*) Es versteht sich, dass diese Behauptung nicht dem Herrn Verfasser sondern Anderen zur Last fällt.

trische Betrachtung giebt uns keine bestimmtere Relation zwischen Sinus und Bogen als die, dass die Sinus verschwindender Bögen mit den Bögen zusammenfallen, oder vielmehr, dieser Satz ist ein Postulat für die geometrische Anschauung. Daher können wir auf keine andere Art vom Bogen zum Sinus hinüber geführt werden, als durch die Betrachtung der verschwindenden Elemente. Dafür bieten uns die leicht zu findenden Formeln für $\sin mx$ und $\cos mx$ durch $\sin x$ und $\cos x$ die Hand, und es bedarf der Methode der unbestimmten Coefficienten nicht. Sind nun aber die Entwickelungen für $\sin x$ und $\cos x$ gefunden, so ergiebt sich alsbald auch die Nothwendigkeit ähnlicher Entwickelungen für alle anderen goniometrischen Ausdrücke, und hierfür kann man sich der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen.

3.

Der zweite Vorwurf, welcher die Methode der unbestimmten Coefficienten trifft, ist der, dass sie die Ergänzung der Reihe zur vollständigen Function nicht beachte, wodurch die natürliche Bestimmung der Divergenz oder Convergenz verloren gehe. Dieser Vorwurf hängt innig mit der jetzt allgemeinen Ansicht zusammen, dass divergirende Reihen ganz falsche Ausdrücke seien, und diese will ich daher zuerst zu beleuchten suchen.

Es ist sehr zu billigen, dass man ein gewisses oft getriebenes unnützes Spiel mit divergirenden Reihen bei Seite setzte, aber woher der Schluss gezogen wurde, dass divergirende Reihen fehlerhaft werden, ist nicht abzusehen. Wie es scheint, rechnete man damit und fand falsche Resultate. Da aber anderseits auch richtige Resultate aus divergirenden Reihen hervorgingen, so wird man veranlasst zu fragen, nach welcher Logik man den Grund der Fehler in der Divergenz finden konnte. Wie es nun mit jenen Fehlern etwa stehen mag, davon will ich ein Beispiel geben, indem ich die Irrungen aufkläre, wodurch Herr Dr. Schlömilch in seiner Abhandlung auf so widersinnige Resultate durch divergirende Reihen gekommen ist.

Zu diesem Behufe frage ich zuerst, was wird aus dem Ausdrucke $S = \frac{v \cos x - v^2}{1 - 2v \cos x + v^2}$ wenn $v = 1$ und $x = 0$ ist? Setzen wir zuerst $v = 1$, so wird $S = \frac{\cos x - 1}{2 - 2 \cos x} = -\frac{1}{2}$, und hiernach also $S = -\frac{1}{2}$ für $v = 1$ und $x = 0$. Setzen wir aber zuerst $x = 0$, so wird $S = \frac{v - v^2}{(1 - v)^2} = \frac{v}{1 - v}$, was für $v = 1$ unendlich wird. Welches Resultat ist nun das richtige?

So hätte Herr Dr. Schlömilch berücksichtigen sollen, dass die Gleichung $S = \cos x + 2S \cos x - 1 - S$ in dem Falle, wo $x = 0$ oder $= 2n\pi$ ist, keine Bestimmung giebt, dass also auch, wenn $x = 2n\pi$, $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$ nicht ohne Weiteres $= -\frac{1}{2}$ gesetzt werden durfte. Für diesen Fall lässt sich die Summe nur bestimmen, wenn man zu einem allgemeineren Ausdrucke übergeht, in welchem der fragliche als besonderer Fall enthalten ist. Die Summe $1 + 1 + 1 + \ldots$ ist also $= \infty$ und nicht $= -\frac{1}{2}$, und dieses stimmt auf das Schönste mit anderen Entwicke-

lungen, z. B. mit der von $\frac{1}{1-x}$ zusammen, wenn $x=1$ genommen wird.

Hiermit fallen nun alle Argumente, welche der Herr Verfasser der gedachten Aufsätze gegen die divergirenden Reihen aufgestellt hat. Zuerst nämlich ist nicht

$$S=-\tfrac{1}{2}=1+1+1+\ldots.$$
$$-(1^2+2^2+3^2+\ldots.)\frac{x^2}{1.2}$$
$$+(1^4+2^4+3^4+\ldots.)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

für jeden Werth von x, sondern für $x=0$ wird

$$S=\infty=1+1+1+\ldots.,$$

was in der Ordnung ist. Für jeden andern Werth von x aber erhalten wir das triviale Resultat $\infty-\infty+\infty-\ldots.$

Ich komme nun zu der unter (7) angeführten Folgerung. Der Ausdruck $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=-\frac{1}{2}+\frac{\sin(\frac{2n+1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ sagt, dass, wenn eine beliebige Anzahl von Gliedern der Reihe $\cos x+\cos 2x+\ldots.$ die Summe $-\frac{1}{2}$ geben soll, immer noch $-\frac{\sin(\frac{2n+1}{2})x}{2\sin x}$ als Ergänzung hinzugefügt werden müsse. Diess sagt unsere divergirende unendliche Reihe auch eben so gut. Wir haben $\cos x+\cos 2x+\ldots.+\cos nx+\cos(n+1)x+\cos(n+2)x+\ldots.. =-\frac{1}{2}$, also wenn wir bei dem Gliede $\cos nx$ abbrechen, den Rest $R=\cos(n+1)x+\cos(n+2)x+\ldots.=-\frac{1}{2}-(\cos x+\cos 2x+\ldots.+\cos nx)$; wir werden also darauf hingewiesen, die Summirung bis $\cos nx$ in endlicher Weise zu machen. Jedermann sieht ein, dass hier mit der Supposition $n=\infty$ nicht mehr ausgerichtet wird, als wenn $n=3$ wäre, jene ist nur unbestimmter. Diese Bemerkung würde den Herrn Verfasser nicht auf $\sin\infty x$ und $\cos\infty x=0$, sondern auf eine identische Gleichung geführt haben.

Die unendliche Reihe drückt nichts weiter aus als das Entwickelungsgesetz, und ihre Bedeutung ist zunächst nur die syntaktische. Es ist $\cos x+\cos 2x+\ldots.+\cos nx-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}=-\frac{1}{2}$, und wenn der Rest noch weiter entwickelt wird, so kommen Glieder hinzu, die nach demselben Gesetz gebildet sind. Das Bildungsgesetz der Reihe enthält also schon den Rest, daher dieser weggelassen ist. Desshalb kann man aus der Formel (7) durch die Annahme $n=\infty$ nicht auf Eulers Reihe gelangen, ohne zugleich auch den Rest wegzulassen. So aber ist die unendliche, d. h. die unvollendete oder unvollendbare Reihe mit der endlichen verwechselt worden.

Zuletzt wird die Eulersche Reihe durch eine Integration mit den Lagrangeschen oder Fourierschen Reihen in Verbindung ge-

bracht. Der Herr Verfasser hat aber nur mit der beschränkten Summenformel $-\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \ldots$ gerechnet, von welcher wir wissen, dass sie für $x = 0$, welchen Werth das unbestimmte Integral durchlaufen muss, nicht mehr gilt. Daher kann auch die Rechnung, deren Basis die Allgemeingültigkeit der Summenformel ist, nicht richtig sein. Führt man aber statt $\cos x + \cos 2x + \ldots$ die allgemeinere Reihe $v \cos x + v^2 \cos 2x + v^3 \cos 3x + \ldots$ in die Rechnung ein, deren Summe $= \frac{v \cos x - v^2}{1 - 2v \cos x + v^2}$ sein wird, integrirt und setzt dann $v = 1$, so wird man mit anderen, z. B. mit Martin Ohm, das gewünschte Resultat mit völliger Allgemeinheit erhalten.

Also nicht in der Unrichtigkeit der divergirenden Reihe, sondern in der beschränkten Geltung der Summenformel ist der Grund aller Irrungen zu finden. Die Summe der Reihe $\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots$ wird von $x = 0$ bis $x = \pm \pi$ durch $\frac{1}{2}$ richtig dargestellt, daher man auch mit ihr richtige Resultate erhält, wenn man ihre Anwendung nicht über die gedachten Grenzen ausdehnt. Multiplicirt man z. B. mit dx und integrirt von 0 an, so erhält man $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots$, welche Reihe bis zu $\pm \pi$ als richtig anerkannt wird, aber für $x = \pm \pi$ nicht mehr gilt, eben weil die Urreihe $\cos x - \cos 2x + \ldots$ für diesen Werth nicht mehr gilt.

Keine unserer Functionsformen $f(x)$ kann unmittelbar die Eigenschaft haben, dass sie constant $= -\frac{1}{2}$ für jeden Werth von x wäre, aber für $x = 0$, $x = 2n\pi$ unendlich würde. Daher liess sich auch die Summe der Reihe $\cos x + \cos 2x + \ldots$ nicht allgemein ausdrücken. Wir müssen daher den fraglichen Ausdruck einem allgemeineren unterordnen, in welchem er als specieller Fall für einen gewissen Werth einer gewissen Constante enthalten ist. Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit; so können wir eine Form von den gedachten Eigenschaften nur mit Hülfe einer Constante $v = 1$ etwa in dem Ausdrucke $\frac{v \cos x - v^2}{1 - 2v \cos x + v^2}$ darstellen.

4.

Nach diesen Betrachtungen kann die Bemerkung, dass die Methode der unbestimmten Coefficienten den Rest der Reihe nicht brachte, nur noch wenig Bedeutung haben; sie ist aber auch durchaus grundlos. — Es ist sonderbar, dass während in der allgemeinen Arithmetik überall nach Allgemeinheit der Formen gestrebt worden ist, dieselbe bei den Reihen gegenwärtig so entschieden zurückgewiesen wird. Die Grundoperationen aller Grössenlehre sind Zusammenfügen und Trennen, und die daher entspringenden des Vervielfachens und Theilens. So lange wir es unmittelbar nur mit diesen zu thun haben, sind wir im Gebiete der gemeinen Arithmetik, aber schon im Beginn der Wissenschaft macht sich die Nothwendigkeit grösserer Allgemeinheit der Formen geltend. Dieselbe wird nun durch die grosse Maxime erhalten, dass für jedwede zwei direct entgegengesetzte Operationen eine einzige Form gesucht wird, in welcher beide enthalten sind. Diess geschieht zuerst bei der Multiplication, welche ur-

sprünglich ein Vervielfachen ist, aber mit Hülfe gebrochener Multiplicatoren auch die Operation des Theilens in sich aufnimmt. Diese allgemeine Multiplication ist bloss eine syntaktische, die nur desshalb sich so eng an die arithmetischen Grundoperationen anschliesst, weil sie sich so bestimmt mit der Bildung der Zahlen aus der Eins vergleichen lässt. Hier liesse sich aber der Unterschied zwischen vervielfältigenden und theilenden Factoren auf ähnliche Weise durchführen, wie der Unterschied positiver und negativer Summenglieder in der Addition. Die Theorie der letzteren bringt man gewöhnlich erst später, füglicher würde man sie aber gleich nach den festgestellten Begriffen des arithmetischen Addirens und Subtrahirens als das Mittel hinstellen, den Unterschied in der Operation des Zu- und Abzählens aufzuheben und denselben durch Unterscheidung positiver und negativer Summenglieder wieder zu gewinnen. Die Potenzenlehre schafft alsdann mit Zuziehung gebrochener Exponenten einen allgemeinen Ausdruck für die eigentliche Potenzirung und das eigentliche Wurzelausziehen, und durch Einführung negativer Exponenten einerlei Rechnungsgesetze für die Multiplication und Division mit Potenzen. Weiter aber ist das obige Princip mit Gewinn noch nicht durchgeführt worden.

Hieraus ersehen wir nun, dass in der allgemeinen Arithmetik jede Operation eine höhere syntaktische Bedeutung hat, der die arithmetische untergeordnet ist. Diese höhere syntaktische Bedeutung ist der Grund aller Schwierigkeiten, aber zugleich auch die Quelle aller Gleichförmigkeit und Einheit und der meisten höheren Entdeckungen gewesen. Wegen ihrer syntaktischen Allgemeinheit haben daher auch unsere Formeln oft nur syntaktische Bedeutung und verlieren die arithmetische Brauchbarkeit; sie sind blosse Figuren der combinatorischen Analysis. (Vergl. Fries mathem. Naturphilosophie).

Warum nun die Reihen in ihrer allgemeinen syntaktischen Bedeutung bei Seite schieben wollen, ist nicht abzusehen. Ist denn nicht $x + x^2 + x^3 + \ldots$ die Entwickelung von $\frac{x}{1-x}$ und nur von diesem, auch wenn nicht hinzugefügt wird, x müsse kleiner als 1 sein? Die Reihe hat vom Standpunkte der allgemeinen Arithmetik aus zunächst nur eine syntaktische Bedeutung durch ihr Entwickelungsgesetz, und die Frage nach ihrer Summe wird hier nicht durch die Summe aller Glieder, sondern durch die erzeugende Function beantwortet. Ihre arithmetische Bedeutung gewinnt sie erst dann, wenn sie convergirt aber unabhängig von dieser Eigenschaft ist in ihr Alles durch ihr Entwickelungsgesetz und folglich auch ihr Rest bestimmt.

Indem nun die Reihe entwickelt wird, kommt es lediglich darauf an, das Gesetz ihrer Entwickelung zu finden, und hierzu kann der Rest nichts beitragen. Die Bestimmung der Convergenz ist eine untergeordnete und kommt erst dann in Frage, wenn die Reihe arithmetische Brauchbarkeit gewinnen soll. Hier kann ich wiederum nicht absehen, wozu die Beachtung des Restes nützen soll. Die erzeugende Function ist jedesfalls die wahre Summe, aber ich kann sie aus der Reihe nur dann näherungsweise erhalten, wenn diese convergirt, d. h. nicht wenn der Rest verschwindet, sondern wenn er gegen den Werth der erzeugenden Function verschwindet. In den Fällen also, wie der Werth der erzeugenden Function

unendlich gross wird, braucht der Rest nicht unendlich klein, sondern nur endlich zu werden. Hiernach bestimmt sich der Begriff der Convergenz allgemeiner. Die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$. divergirt nicht, sondern convergirt, weil der Rest gegen ihre Summe verschwindet. Daher hat Poisson ganz Recht, wenn er sagt, dass jede Reihe convergire, deren Glieder verschwindend klein werden; und hiernach ist die Bestimmung der Convergenz, die man nicht mit dem Zusammenzählen unendlich vieler Glieder verwechseln muss, wenigstens nicht schwerer als mit Beachtung des Restes.

5.

Die Abhandlung XXXII. wird uns recht klar zeigen, wie nöthig es sei, auf die syntaktische Bedeutung unserer Formen zu achten. An die Spitze stellt Herr Dr. Schlömilch den nachher bewiesenen Satz

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}}$$

und findet dann für $m=1$ und $n=2$ den Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

„allein wenn man für $\frac{1}{1-x^2}$ die Reihe $1+x^2+x^4+\ldots$

„setzen wollte, so würde man $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \infty + \frac{1}{3}\infty^3 + \ldots$

„und also $=\infty$ erhalten, ein ganz falsches Resultat."

Zuerst bemerke ich, dass der Herr Verfasser bei der Entwickelung des Ausdrucks $J=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ in dem Schlusse, dass der Rest allgemein verschwinde, sich geirrt hat, denn es wird allerdings die Function $\frac{1-x^{1-2a}}{1-x}$ unendlich, nämlich für $x=0$ wenn $a>\frac{1}{2}$. Für $a=\frac{1}{2}$ bekommt man das unbestimmte Resultat 0^0, allein wenn $a<\frac{1}{2}$, so hat obiger Ausdruck allerdings nur endliche Werthe zwischen $x=0$ und $x=1$. Ich will daher zuerst mit Berücksichtigung des Restes das Resultat genauer begründen und zugleich die eigentliche Basis der ganzen Rechnung bestimmter hervorheben.

Man hat

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}.$$

Hier erlaube ich mir nun im zweiten Gliede $-\frac{1}{x-1}$ *statt* $\frac{1}{1-x}$ *zu setzen* und erhalte

$$J=\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x} - \int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x-1}.$$

Nun habe ich identisch

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\frac{1}{x-1}=x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\ldots+x^{-n}+\frac{x^{-n}}{x-1}$$

also

$$J=\int_0^1 dx(x^{a-1}+x^a+x^{a+1}+x^{a+2}+\ldots+x^{a+n-1})$$
$$-\int_1^\infty dx(x^{a-2}+x^{a-3}+x^{a-4}+\ldots+x^{a-n-1})$$
$$+\int_0^1\frac{x^{a+n}dx}{1-x}-\int_1^\infty\frac{x^{a-n-1}dx}{x-1}.$$

Man hat aber zwischen diesen Grenzen die erste Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\ldots+\frac{1}{a+n}$$

die andere aber

$$-\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-3}\ldots-\frac{1}{a-n}$$

also den Unterschied beider =

$$\frac{1}{a}-2a\left(\frac{1}{1^2-a^2}+\frac{1}{2^2-a^2}+\frac{1}{3^2-a^2}+\ldots+\frac{1}{n^2-a^2}\right)=R,$$

daher

$$J=R+\int_0^1\frac{x^{a+n}dx}{1-x}-\int_1^\infty\frac{x^{a-n-1}dx}{x-1}.$$

Um nun für die beiden Integrale gleiche Grenzen zu erhalten, setze ich mit Herrn Dr. Schlömilch im zweiten $\frac{1}{z}$ statt x und erhalte es dadurch

$$=-\int_1^0\frac{dz}{z^{a-n}(1-z)}=-\int_1^0\frac{z^{n-a}dz}{1-z}=\int_0^1\frac{z^{n-a}dz}{1-z}.$$

Daher erhalte ich für den Rest der Reihe den Ausdruck

$$\int_0^1\frac{x^{n+a}dx}{1-x}-\int_0^1\frac{x^{n-a}dx}{1-x}=\int_0^1\frac{x^{2a}-1}{1-x}x^{n-a}dx,$$

welches nun, da in Folge des positiven a die Function $\frac{x^{2a}-1}{1-x}$ zwischen $x=0$ und $x=1$ immer nur endliche Werthe hat, für wachsende n verschwindet. Und da nun die ins Unendliche fortgesetzte Reihe R den Werth $\frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi}$ hat, so ist

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1-x}=\frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi},\ +1>a>0.$$

Doch diese Rechnung kann uns hier nicht zur Klarheit führen, wir müssen ihre Grundlage näher erörtern. Da sehen wir denn, dass ich, wie auch Herr Dr. Schlömilch, den Ausdruck $\frac{1}{1-x}$ in $\frac{-1}{x-1}$ umänderte; was giebt mir aber dazu ein Recht? Wird denn hierdurch nicht die Functionsform ganz wesentlich abgeändert? Es ist gar nicht einerlei, ob ich z. B. $\int\frac{dx}{1-x}$ oder $-\int\frac{dx}{x-1}$ schreibe.

Daher ist der Ausdruck $\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ ein imaginärer; er hat bloss eine syntaktische Bedeutung und ist ein arithmetischer Unsinn. Warum derselbe aber doch ohne weitere Zusätze in die Lehrbücher überging, daran ist lediglich die beschränkte Auffassung des bestimmten Integrales Schuld. Dasselbe ist nicht

$$\int_a^b f(x)dx = \delta(fa + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots)$$

für $\delta = \frac{b-a}{\infty}$, das ist es nur, wenn das allgemeine Integral $\int f(x)dx$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ eine reelle Function von x ist. **Das bestimmte Integral ist nichts anderes, als die Differenz zweier besonderen Werthe eines allgemeinen**, und diess ist seine syntaktische Bedeutung, der jene arithmetische untergeordnet ist.

Betrachten wir nun den Ausdruck $\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$, so lässt er sich, weil $m < n$ und beide ganze Zahlen sind, in

$$\frac{Adx}{1-x} + \frac{B\,\psi(x)\,dx}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$$

zerlegen, wo $\psi(x)$ eine ganze rationale Function von x sein wird. Hier ist nun der zweite Theil immer das Differential einer reellen Function von $x=0$ bis $x=\infty$, nicht so aber der erste; denn es ist $\frac{dx}{1-x} = -d\log(1-x)$ und also nur von 0 bis 1 reell. Wollte ich aber $\frac{-dx}{x-1}$ setzen, so wäre dieses $=-d\log(x-1)$ und also nur von 1 bis ∞ reell.

Ich will zur besseren Anschaulichkeit das Beispiel $\int\frac{dx}{1-x^3}$ wählen, welches von $x=0$ bis $x=\infty$ nach dem Lehrsatze $\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}}$ so viel als $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ werden würde. Aber ich finde

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}(2+x)dx}{1+x+x^2},$$

also wenn ich integrire

$$\int\frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{6}.\log(1+x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ arctg }\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Hier giebt nun $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arctg $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ von $x=0$ bis $x=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, also dasselbe wie oben; aber was wird denn aus $\int_0^\infty\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{6}\log(1+\infty+\infty^2)$?

Also die Form muss vor Allem gesichert sein! wenn anders unsere Rechnungen nicht sinnlos sein sollen. Die wahre Bedeutung von $\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n\,.\,\text{tg}\,\frac{m}{n}\pi}$ ist die, dass es die Differenz zweier ganz verschiedener bestimmten Integrale bedeutet, die sich auf die Formen $\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ und $\int_1^\infty\frac{x^{a-1}dx}{x-1}$ bringen lassen. Weil nun hier eigentlich eine Aenderung der Functionsform während des Integrirens eintritt, so sollte man so etwas nicht durch $\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ ausdrücken.

Hier ist nun klar, worin der Fehler des Herrn Dr. Schlömilch bei der Integration von $\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}$ zu suchen sei. Indem die Integration mittels der Reihe $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\ldots$ geschah, wurde die Functionsform von $x=0$ bis $x=\infty$ beibehalten und dadurch $\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}=\infty+\frac{1}{3}\infty^3+\frac{1}{5}\infty^5+\ldots$ gefunden. Hier darf ich nun nicht darnach fragen, was alle Glieder dieser Reihe zusammengenommen ausmachen, sondern ich muss ihre syntaktische Bedeutung nachweisen. Darnach ist sie die Entwickelung von $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ für $x=\infty$, und folglich ist

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\infty}{1-\infty}\right)=\frac{1}{2}\log(-1).$$

Wenn ich aber $\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}$ in $\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}+\int_1^\infty\frac{dx}{1-x^2}$ trenne und nachher $-\int_1^\infty\frac{dx}{x^2-1}$ aus $\int_1^\infty\frac{dx}{1-x^2}$ mache, so verändere ich die Functionsform und habe zwei ganz verschiedene Integrale. Dass ihr Unterschied $=0$ sei, findet man durch Substitution der Reihen

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+\ldots.$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots..$$

nun sehr leicht, denn wir erhalten

$$(1-1)+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{5})+\ldots..=0.$$

Dass aber die Integrale $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ und $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2-1}$ wesentlich verschiedenen Formen angehören, kann man leicht sehen, wenn man die allgemeinen Integrale sucht; ersteres ist $\frac{1}{2}\log \frac{1+x}{1-x}$, das andere $\frac{1}{2}\log \frac{x-1}{x+1}$.

Anmerkung. Meine eignen Ansichten über die Methode der unbestimmten Coefficienten darf ich als hinreichend bekannt voraussetzen; immer aber werde ich auch entgegengesetzten Ansichten, wenn sie nur mit Würde und Ruhe vorgetragen werden, gern verstatten, sich in dem Archive geltend zu machen. G.

XXVI.

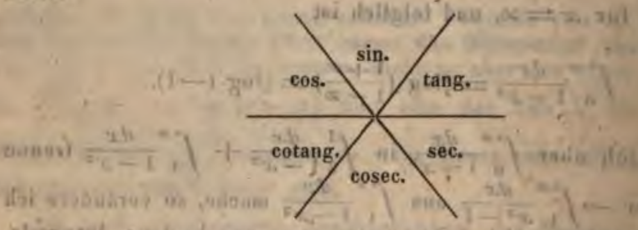
Goniometrischer Zirkel.

Von dem

Herrn Oberlehrer Dr. Brehmer

am Pädagogium zu Putbus.

Werden die goniometrischen Functionen eines und desselben Winkels x in einem Zirkel folgendermassen neben einander gestellt:



so lassen sich die einfachen Relationen zwischen ihnen durch folgende Gesetze ausdrücken:

1) Das Product zweier in Scheitelwinkeln stehender Functionen ist gleich 1.

$$\sin x \,.\, \text{cosec}\, x = 1, \text{ u. s. w.}$$

2) Das Product zweier über oder unter derselben Linie stehender Functionen ist gleich der eingeschlossenen Function.

$$\sin x \,.\, \sec x = \text{tang}\, x, \text{ u. s. w.}$$

3) Der Quotient zweier anliegender Functionen ist gleich der dem Dividendus auf der anderen Seite anliegenden Function,

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x, \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Wir verweisen bei dieser Gelegenheit auf das Programm: Ein Schema zur Erleichterung des Elementarunterrichtes in der Trigonometrie von Dr. E. W. Grebe. Cassel. 1840. Das in diesem Programm mitgetheilte Schema erstreckt sich auch auf die Formeln zur Auflösung der ebenen rechtwinkligen Dreiecke.

G.

XXVII.

Ueber Theilung und Verwandlung einiger ebenen Figuren.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Wenn man H. Gerwien's sinnreichen Beweis der Gleichheit zweier Dreiecke von derselben Grundlinie und Höhe vermittelst blosser Congruenz weiter verfolgt, so gelangt man zu nicht minder merkwürdigen Theilungen und Verwandlungen. Die erwähnte Construction besteht im Folgenden. Man lege die beiden Dreiecke ABC und ABC' mit ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie AB so an einander, dass die Spitzen C und C' auf verschiedene Seiten derselben fallen. Die Verbindungslinie CC' wird dann durch ihren Durchschnittspunkt D mit der Grundlinie AB gehälftet. Von D ziehe man nach den Mitten der vier übrigen Seiten der beiden gegebenen Dreiecke gerade Verbindungslinien. Durch dieselben wird jedes dieser Dreiecke in ein Viereck und zwei Dreiecke getheilt, die einander beziehlich congruent sind; so dass man also aus den Theilen des einen Dreiecks mittelst geeigneter Drehung und Verschiebung das andere Dreieck zusammensetzen kann.

Eine solche Theilung und Verwandlung lässt sich auch bei zwei beliebigen Dreiecken ausführen, die weder dieselbe Grundlinie noch dieselbe Höhe haben, sondern einander schlechthin gleich

sind. Heissen ABC und $A'B'C'$ diese beiden Dreiecke, so kann man offenbar immer ein Mittelglied (Dreieck) auffinden, welches mit jedem der beiden gegebenen Dreiecke gemeinschaftliche Grundlinie und Höhe (freilich mit jedem eine andere) hat. Man darf nur von jedem Dreiecke eine geeignete Seite z. B. AB und $A'B'$ (Taf. IV. Fig. 1.) auswählen und aus ihnen unter geeignetem Winkel ein Dreieck ABB' bilden, welches mit ABC die Grundlinie AB und mit $A'B'C'$ die Grundlinie $A'B'$ gemeinschaftlich hat. Führt man nun, der obigen Methode zufolge, die theilenden Geraden für die beiden Dreiecke ABC und ABB' aus, so werden dieselben hiedurch in die nöthigen Theile zerlegt, um das eine in das andere verwandeln zu können. Die Theile des Dreiecks ABB' werden durch eine nochmalige Anwendung derselben Construction in Bezug auf die Dreiecke ABB' und $A'B'C'$ wiederum in Theile zerlegt. Wenn man nun die letztere Theilung auf die schon vorhandenen Theile des Dreiecks ABC überträgt und wenn man umgekehrt die erste Theilung von ABC und ABB' auf das Dreieck $A'B'C'$ ausdehnt, welche Construction in der Figur zu erblicken ist, so sind offenbar die entstandenen Theilungen hinlänglich, nicht nur um aus den Theilen von ABC der Reihe nach die Dreiecke ABB' und $A'B'C'$ zu bilden, sondern auch um das Dreieck ABC unmittelbar in das Dreieck $A'B'C'$ zu verwandeln. In der Figur sind die congruenten Theile durch dieselben Buchstaben α, β, ... bezeichnet.

Es ist nun klar, dass man auch die Gleichheit zweier Parallelogramme durch Congruenz nachweisen kann. Man braucht zu dem Ende nur jedes derselben durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zu theilen, und auf jedes dieser Dreiecke die beschriebene Theilung anzuwenden. Wenn man aber in Taf. IV. Fig. 1. die Parallelogramme über AB und AB' vollendet und in jedem der hinzutretenden Dreiecke dieselbe Theilung anbringt, so wird man gewahr, dass sich die Sache viel einfacher gestalten lässt. In den beiden Parallelogrammen BD und $B'D'$ haben nämlich einerseits die Theile δ, α, ζ und andererseits die Theile γ, β, ε dieselbe Lage in Beziehung auf einander. Man kann sie daher beziehlich zusammenfassen und braucht sie, um das Parallelogramm BD in das Parallelogramm $B'D'$ zu verwandeln, nicht erst in ihre Theile α, δ, ζ oder γ, β, ε zu zerlegen. Es ergiebt sich daher die folgende Construction (Taf. IV. Fig. 2.).

„Um das Parallelogramm BD in das Parallelogramm $B'D'$ zu „verwandeln, ziehe man durch die Mitte von BD eine Gerade „dergestalt, dass das auf ihr von einem Seitenpaare (z. B. AB „und CD) abgeschnittene Stück, einer Seite (z. B. AB') des Pa„rallelogramms $B'D'$ gleich wird. Von den Mitten des anderen „Seitenpaares (also AD, BC) fälle man auf diese Gerade zwei „andere Gerade unter dem Parallelogramm-Winkel von $B'D'$. „Durch diese drei Gerade wird das Parallelogramm BD in solche „Stücke getheilt werden, dass sich aus ihnen das Parallelogramm „$B'D'$ zusammensetzen lässt."

Vermittelst dieser Construction kann man offenbar auch den pythagoräischen Lehrsatz durch Congruenz beweisen, wenn man auf Euklidische Weise das Quadrat der Hypotenuse mit der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks in zwei Rechtecke zerlegt, welche den

Quadraten der beiden Katheten beziehlich gleich sind. In diesem Falle lässt sich die Construction einfach so angeben:

„Durch die Mitte des Quadrats *BD* (Taf. IV. Fig. 3.) ziehe „man eine Parallele mit der Hypotenuse, und auf diese Pa- „rallele fälle man von den Mitten der Seiten *BC* und *DE* „zwei Perpendikel; so wird man aus den entstandenen „Stücken durch Drehung und Verschiebung das Rechteck „*CF* zusammensetzen können."

Dasselbe gilt natürlich auch von dem Quadrate der kleineren Kathete, nur dass man hier auch subtractive Stücke in Betracht zu ziehen hat.

Eine andere Verwandlung des Quadrats der Hypotenuse in die beiden Quadrate der Katheten, wobei nur eine parallele Verschiebung nöthig ist, lehren Fig. 4. und Fig. 5. auf Taf. IV. Sie sind ohne weitere Erläuterung verständlich.

Den Beweis für alles Vorstehende wird man mir erlassen.

XXVIII.

Ueber die Berechnung des Elasticitäts-Modulus aus directen Dehnungsversuchen.

Von dem

Herrn Fabriken-Commissionsrath A. F. W. Brix

zu Berlin.

Bei der Berechnung der Elasticität prismatischer Körper, die durch gegebene Kräfte nach der Richtung ihrer Länge gespannt werden, geht man bekanntlich von dem durch die Erfahrung bestätigten Gesetze aus, dass unter übrigens gleichen Umständen die beobachteten Längendehnungen, sofern sie die sogenannte Elasticitätsgrenze nicht überschreiten, den spannenden Kräften und den Längen der Prismen direct, den Querschnitten derselben aber umgekehrt proportional sind. Bezeichnet also λ die Länge, a den Querschnitt eines Prismas, und ist λ die Ausdehnung, welche dasselbe erleidet, sobald es einer Längenspannung $= P$ unterworfen wird, so ist λ der Grösse $\frac{Pl}{a}$ proportional, und es findet daher die Gleichung Statt:

$$1)\quad m\lambda = \frac{Pl}{a},$$

worin m einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, der nur von der physischen Beschaffenheit des Körpers abhängig, für Körper einerlei Art also constant ist. Man nennt ihn bekanntlich den Elasticitäts-Modulus, und um seinen numerischen Werth für irgend eine gegebene Substanz durch directe Dehnungsversuche zu ermitteln, dient die Formel

$$2)\quad m = \frac{Pl}{a\lambda},$$

in welcher P, l und a bekannte, dem Versuche zum Grunde gelegte Grössen bedeuten, während λ die beobachtete Dehnung ist, die jedoch wieder verschwinden muss, sobald die Spannung P aufgehoben wird.

Bei den auf Veranlassung Eines Hohen Finanzministerii unter meiner Leitung im Königlichen Gewerbe-Institut angestellten Versuchen über die Festigkeit verschiedener Baumaterialien kamen unter Andern auch schmiedeeiserne Rundstangen bis zu einer Stärke von etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll mittleren Durchmesser zur Anwendung, um sie in Bezug auf ihr elastisches Verhalten bei einer gewissen Längenspannung zu prüfen. Da aber viele von diesen Stangen nicht an allen Stellen denselben Durchmesser hatten, so kam es darauf an, eine Methode zu ermitteln, durch welche der Elasticitäts-Modulus genauer gefunden werden konnte, als nach dem gewöhnlichen Verfahren, bei welchem die Stange als ein Cylinder vorausgesetzt wird, dessen Durchmesser dem mittleren Durchmesser der geprüften Stange gleich ist. Das Ungenügende dieses Verfahrens hat schon Lagerhjelm erkannt, weshalb er bei seinen Versuchen*) diejenigen Stangen, welche nicht überall denselben Durchmesser zeigten, als eine Aneinanderfügung mehrerer Cylinder von verschiedenen Durchmessern betrachtete, und darauf die Berechnung ihrer Längendehnung basirte.

Das zu gleichem Zwecke von mir in Anwendung gebrachte Verfahren, welches den Gegenstand dieser Mittheilung bildet, besteht im Folgenden:

Man denke sich die Stange in n gleiche Theile getheilt, und in den Theilpunkten die Querschnitte bestimmt, welche sämmtlich als verschieden vorausgesetzt werden. Betrachtet man demnächst jeden dieser Theile als einen abgekürzten Kegel, und berechnet unter dieser Voraussetzung die Dehnungen aller einzelner Theile, so muss deren Summe gleich der beobachteten Dehnung der ganzen Stange sein. Auf diesem Wege gelangt man zu einer Gleichung, aus welcher sodann der Elasticitäts-Modulus leicht gefunden werden kann.

Um dies Verfahren in Ausübung zu bringen, könnte es zuvör-

*) Peter Lagerhjelm's Versuche zur Bestimmung der Dichtheit, Gleichartigkeit, Elasticität u. s. w. des gewalzten und geschmiedeten Stabeisens. Aus dem Schwedischen übersetzt von Dr. J. W. Pfaff. Nürnberg. 1829. Seite 134.

derst darauf an, die Dehnung eines abgekürzten Kegels zu berechnen, welche sich folgendermassen gestaltet:

Der grösseren Allgemeinheit wegen setzen wir eine abgekürzte Pyramide voraus, deren parallele Endflächen mit a und a' bezeichnet werden sollen. Es sei l die Länge dieses Körpers und λ die Dehnung, welche durch eine, nach der Richtung seiner Schwerpunktsachse wirkende Kraft P hervorgebracht worden ist. Man denke sich von a aus ein unbestimmtes Stück $=x$ auf der Achse abgeschnitten, und bezeichne den Querschnitt der Pyramide im Endpunkte von x mit y. Zur Bestimmung dieses Querschnittes hat man dann die Gleichung

$$l\sqrt{y}=(l-x)\sqrt{a}+x\sqrt{a'}$$
$$=l\sqrt{a}-x(\sqrt{a}-\sqrt{a'});$$

aus welcher sich demnächst ergiebt:

$$y=\frac{1}{l^2}\,(l\sqrt{a}-x(\sqrt{a}-\sqrt{a'}))^2.$$

Bezeichnet nun λ_x die Dehnung des in Rede befindlichen Körpers auf die Länge x, dann ist $d\lambda_x$ die dem Increment dx zukommende Dehnung, und dafür kann nun nach (1) die Gleichung aufgestellt werden:

$$m\,.\,d\lambda_x=\frac{P\,.\,dx}{y}.$$

Aus ihr ergiebt sich, nach Einsetzung des obigen Ausdruckes von y,

$$d\lambda_x=\frac{Pl^2}{m}\cdot\frac{dx}{(l\sqrt{a}-x(\sqrt{a}-\sqrt{a'}))^2};$$

also

$$\lambda=\frac{Pl^2}{m}\int_0^l\frac{dx}{(l\sqrt{a}-x(\sqrt{a}-\sqrt{a'}))^2}.$$

Vollführt man die hier angedeutete Integration zwischen den bezeichneten Grenzen, was keine Schwierigkeiten hat, so findet man

$$3)\quad \lambda=\frac{Pl^2}{m}\cdot\frac{1}{l\sqrt{aa'}}=\frac{Pl}{m\sqrt{aa'}}.$$

Die Dehnung der abgekürzten Pyramide ist demnach der eines Prismas gleich, dessen Querschnitt das geometrische Mittel zwischen den Endflächen des ersten Körpers ist.

Ist die Rede von einem abgekürzten Kegel, und man bezeichnet die den Endflächen a und a' zugehörigen Durchmesser bezüglich mit d und d', so verwandelt sich die vorige Formel in folgende

$$4)\quad \lambda=\frac{4Pl}{\pi m d d'}.$$

Zur Anwendung der letzten Formel auf den mir bei den Ver-

suchen vorgelegenen besondern Fall seien nun $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n, d_{n+1}$ die verschiedenen, in den $n+1$ Theilpunkten gemessenen Durchmesser, und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ seien die Dehnungen in den einzelnen Abtheilungen der Stange. Alle diese Theile haben dieselbe Länge $=\frac{l}{n}$, wenn l die Länge der Stange in ihrem natürlichen Zustande bezeichnet. In Gemässheit der obigen Formel hat man dann nach einander:

$$\lambda_1 = \frac{4Pl}{\pi mn} \cdot \frac{1}{d_1 d_2};$$

$$\lambda_2 = \frac{4Pl}{\pi mn} \cdot \frac{1}{d_2 d_3};$$

$$\lambda_3 = \frac{4Pl}{\pi mn} \cdot \frac{1}{d_3 d_4};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_n = \frac{4Pl}{\pi mn} \cdot \frac{1}{d_n d_{n+1}}.$$

Summirt man diese Gleichungen, und setzt die ganze Dehnung der Stange, nemlich $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots \lambda_n = \lambda$, so kömmt

$$\lambda = \frac{4Pl}{\pi mn} \cdot \left(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \frac{1}{d_3 d_4} + \ldots + \frac{1}{d_n d_{n+1}}\right);$$

oder, wenn der Kürze wegen die Summe der Reihe in der Klammer gleich $\Sigma(\frac{1}{d_1 d_2})$ gesetzt wird,

$$5)\ \lambda = \frac{4Pl}{\pi mn} \cdot \Sigma\left(\frac{1}{d_1 d_2}\right).$$

Diese Gleichung liefert nun für den Elasticitäts-Modulus die Formel

$$6)\quad m = \frac{4Pl}{\pi n \lambda} \cdot \Sigma\left(\frac{1}{d_1 d_2}\right),$$

nach welcher die Eingangs erwähnten Versuche berechnet worden sind.

Die dadurch gewonnenen Resultate werden später der Oeffentlichkeit übergeben werden, weshalb ich mich für den Zweck dieser Mittheilung darauf beschränke, hier nur einen der vielen Versuche anzuführen, den ich nach der obigen Formel und nach dem gewöhnlichen Verfahren berechnen will, um den Unterschied in den numerischen Werthen von m für beide Methoden ersehen zu lassen. Dieser Versuch betrifft eine Stange englisches Rundeisen von der Sorte, wie es gewöhnlich zu den Ankerketten verwendet wird. Es wurde auf derselben eine Länge von 5 Fuss abgetheilt, und von Fuss zu Fuss wurden die Durchmesser ermittelt, für welche sich folgende, in Linien ausgedrückte Zahlenwerthe ergaben:

$$d_1 = 12{,}29;\ d_2 = 11{,}68;\ d_3 = 11{,}71;$$
$$d_4 = 11{,}68;\ d_5 = 11{,}66;\ d_6 = 11{,}89.$$

Das arithmetische Mittel derselben ist $d = 11{,}818$ Linien. Die bei dem Versuche beobachtete Dehnung der Stange betrug im Mittel von zwölf verschiedenen Beobachtungen 0,3072 Linien auf 5 Fuss Länge, wenn eine Längenspannung $P = 9021$ Pfd. angewendet wurde.

Um nun hierauf die Formel (6) anwenden zu können, muss man l in demselben Maasse wie λ, also beide in Linien ausdrücken, dann wird sich der Elasticitäts-Modulus in Pfunden für die Quadratlinie als Einheit des Querschnittes ergeben.

Demnach ist $l = 720'''$ und $\lambda = 0{,}3072'''$. Nach den obigen Werthen der Durchmesser findet man zuerst

$$\Sigma\left(\frac{1}{d_1 d_2}\right) = \frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \frac{1}{d_3 d_4} + \frac{1}{d_4 d_5} + \frac{1}{d_5 d_6} = 0{,}0362.$$

Setzt man diese Zahlenwerthe in Formel (5) ein und berücksichtigt zugleich, dass $n = 5$ ist, so findet man

$$m = 194933 \text{ Pfd. pro } \square \text{Linie.}$$

Um die Grösse m nach dem mittleren Durchmesser $d = 11{,}818$ Linien zu berechnen, dient die Formel

$$m = \frac{4Pl}{\pi \lambda d^2},$$

welche nach Substitution der entsprechenden Zahlenwerthe

$$m = 192772 \text{ Pfd.}$$

giebt, ebenfalls für die Quadratlinie des Querschnittes.

XXIX.

Auflösung einer algebraischen Aufgabe, und Hinstellung einer anderen.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Aus den Gleichungen

$$1)\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1; & a'a''+b'b''+c'c''=0 \\ a'^2+b'^2+c'^2=1; & a''a+b''b+c''c=0 \\ a''^2+b''^2+c''^2=1; & aa'+bb'+cc'=0 \end{cases}$$

die Gleichungen

$$2)\begin{cases} a^2+a'^2+a''^2=1; & bc+b'c'+b''c''=0 \\ b^2+b'^2+b''^2=1; & ca+c'a'+c''a''=0 \\ c^2+c'^2+c''^2=1; & ab+a'b'+a''b''=0 \end{cases}$$

herzuleiten. (S. Litter. Bericht. Nr. XII. S. 191).

Diese bei der Verwandlung der Coordinaten vorkommenden Gleichungen pflegt man gewöhnlich aus ihrer geometrischen Bedeutung abzuleiten. Hat man nämlich zwei rechtwinklige Axensysteme OX, OY, OZ und OX', OY', OZ' und sind

a, b, c die Cosinus der Winkel $X'OX$, $X'OY$, $X'OZ$
a', b', c' - - - - $Y'OX$, $Y'OY$, $Y'OZ$
a'', b'', c'' - - - - $Z'OX$, $Z'OY$, $Z'OZ$

so finden die Gleichungen 1) statt; und namentlich gelten die drei letzten derselben, weil $a'a''+b'b''+c'c''$ gleich dem Cosinus des Winkels $Y'OZ'$ ist, dieser aber als ein rechter Winkel vorausgesetzt wurde; u. s. w. Unter diesen Voraussetzungen sind aber auch

a, a', a'' die Cosinus der Winkel XOX', XOY', XOZ'
b, b', b'' - - - - YOX', YOY', YOZ'
c, c', c'' - - - - ZOX', ZOY', ZOZ';

und da das Axensystem OX', OY', OZ' rechtwinklig vorausgesetzt wurde, so folgen aus ähnlichen Gründen die Gleichungen 2). Rein algebraisch dürften dieselben am leichtesten folgendermassen hergeleitet werden. Schreibt man die erste, fünfte und sechste der Gleichungen 1) so:

$$3)\begin{cases} a\,.\,a+b\,.\,b+c\,.\,c=1 \\ a'\,.\,a+b'\,.\,b+c'\,.\,c=0 \\ a''\,.\,a+b''\,.\,b+c''\,.\,c=0, \end{cases}$$

so folgt aus ihnen durch eine einfache Elimination, wenn zur Abkürzung:

$$4)\quad \varepsilon=a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)$$

gesetzt wird:

$$5)\quad \varepsilon\,.\,a=b'c''-b''c',\ \varepsilon\,.\,b=c'a''-c''a',\ \varepsilon\,.\,c=a'b''-a''b'.$$

Auf dieselbe Art ergeben sich aus der 2ten, 4ten, 6ten; und aus der 3ten, 4ten, 5ten der Gleichungen 1) die folgenden:

$$6)\quad \varepsilon\,.\,a'=b''c-bc'',\ \varepsilon\,.\,b'=c''a-ca'',\ \varepsilon\,.\,c'=a''b-ab''$$

$$7)\quad \varepsilon\,.\,a''=bc'-b'c,\ \varepsilon\,.\,b''=ca'-c'a,\ \varepsilon\,.\,c''=ab'-a'b$$

Multiplicirt man nun von den Gleichungen 5), 6), 7) beziehlich die ersten mit a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', und addirt, so ergiebt sich nach Division mit ε:

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\ ab+a'b'+a''b''=0,\ ac+a'c'+a''c''=0.$$

Auf ähnliche Art erhält man aus denselben Gleichungen die übrigen Gleichungen 2). Die Division mit ε setzt voraus, dass ε nicht Null ist; sein Werth findet sich sehr leicht gleich ± 1. Denn quadrit man die Gleichungen 5) (oder auch 6) oder 7)), und addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}8)\quad \varepsilon^2(a^2+b^2+c^2)&=(b'c''-b''c')^2+(c'a''-c''a')^2+(a'b''-a''b')^2\\ &=(a'^2+b'^2+c'^2)\,(a''^2+b''^2+c''^2)\\ &\qquad -(a'a''+b'b''+c'c'')^2\end{aligned}$$

also wegen 1)

$$9)\quad \varepsilon^2=1.$$

Das Zeichen von ε ist seiner Natur nach unbestimmt; in der geometrischen Bedeutung hängt es bekanntlich davon ab, ob die Axen OX', OY', OZ' in derselben Drehrichtung um einander liegen, wie die Axen OX, OY, OZ oder in entgegengesetzter. Im ersten Falle ist $\varepsilon=+1$, im zweiten $\varepsilon=-1$.

Ich stelle nun die *Aufgabe*:

Man soll aus den Gleichungen:

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dbc + 2Eca + 2Fab + 2Ga + 2Hb + 2Ic = p$$

$$Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2 + 2Db'c' + 2Ec'a' + 2Fa'b' + 2Ga' + 2Hb' + 2Ic' = p$$

$$Aa''^2 + Bb''^2 + Cc''^2 + 2Db''c'' + 2Ec''a'' + 2Fa''b'' + 2Ga'' + 2Hb'' + 2Ic'' = p$$

$$Aa'a'' + Bb'b'' + Cc'c'' + D(b'c'' + b''c') + E(c'a'' + c''a') + F(a'b'' + a''b') + G(a' + a'') + H(b' + b'') + I(c' + c'') = p$$

$$Aa''a + Bb''b + Cc''c + D(b''c + bc'') + E(c''a + ca'') + F(a''b + ab'') + G(a'' + a) + H(b'' + b) + I(c'' + c) = q$$

$$Aaa' + Bbb' + Ccc' + D(bc' + b'c) + E(ca' + c'a) + F(ab' + a'b) + G(a + a') + H(b + b') + I(c + c') = r$$

ähnliche Systeme von Gleichungen herleiten und die geometrische Bedeutung derselben darthun.

XXX.

Theorie der involutorischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Gegenwärtige Abhandlung soll das Wesen der sogenannten Involutionen im Verhältniss zu projektivischen Eigenschaften überhaupt darstellen und die bereits von Steiner S. 167. seines Werkes angekündigte Wichtigkeit dieser Lehre an der Theorie der zugeordneten Durchmesser, denen hier die zugeordneten Achsenpunkte und Achsenpunktwinkel mit ganz analogen Eigenschaften sich zur Seite stellen, an der Theorie der Brennpunkte und, wenn der Raum es gestattet, der gemeinschaftlichen Sekanten- und Tangentendurchschnitte nachweisen. Denn durch diese Lehre erhält die Geometrie nicht bloss einen Ersatz für das, was die Ana-

lysis durch den Gebrauch des Imaginären vermag, sondern sogar einen Vortheil über die letztere, indem sie ihrem intuitiven Charakter getreu, statt ein nicht-seiendes Objekt kraft der Form eines reellen sich einzubilden, vielmehr von einem Objekte der Anschauung zu einem anderen reellen Objekte von derselben Grösse, aber verschiedener Bedeutung übergeht und somit zugleich an Wahrheit und Mannigfaltigkeit der Begriffe gewinnt.

Des Zusammenhanges wegen und dem Hauptzwecke des Archivs gemäss geht eine kurze Uebersicht desjenigen aus der „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" voraus, worauf im Folgenden Bezug genommen werden wird, und für eine solche dürfte wohl eine blosse Andeutung der Beweise hinreichen, um so mehr, da sich voraussetzen lässt, dass das genannte Werk sich schon längst in der Hand eines jeden Mathematikers befindet. *)

Die Gerade und der ebene Strahlbüschel.

1. Wird eine Gerade A von den Strahlen a, b, c, d... eines ebenen Strahlbüschels B d. h. von den sämmtlichen durch einen Punkt B (Mittelpunkt) gehenden Geraden einer Ebene, in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... geschnitten, und man denkt sich sofort die beiden Gebilde A, B in irgend einer Lage zu einander, in welcher nur die gegenseitige Neigung der Strahlen von B und die gegenseitigen Abstände der Punkte von A, so wie die Beziehung, dass immer diesem Strahl a dieser Punkt $\mathfrak{a}$ entspricht, festgehalten wird, so heissen die Gebilde A, B in Ansehung der entsprechenden Elementenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... und a, b, c, d... projektivisch, und zwar schief liegend, wenn die Strahlen von B nicht durch ihre entsprechenden Punkte gehen, perspektivisch liegend dagegen oder perspektivisch, wenn dies durchweg der Fall ist. Die Projektivität von A, B erlaube ich mir hier der Kürze wegen durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) = B(a, b, c, d\ldots),$$

und dass sie insbesondere perspektivisch sind, durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) \equiv B(a, b, c, d\ldots)$$

zu bezeichnen.

2. Für perspektivische Gebilde A, B hat man in Bezug auf zwei beliebige Elementenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$; a, c, wenn $B\mathfrak{p}$ senkrecht auf A, die metrische Relation

$$B\mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{ac} = B\mathfrak{a} \,.\, B\mathfrak{c} \,.\, \sin \,.\, ac,$$

und ebenso

*) Der Leser wird gebeten, die Figuren der jedesmaligen Angabe gemäss selbst zu entwerfen.

$$B\mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{bc} = B\mathfrak{b} \,.\, B\mathfrak{c} \,.\, \sin . bc,$$

also

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} = \frac{B\mathfrak{a}}{B\mathfrak{b}} \cdot \frac{\sin ac}{\sin . bc},$$

und ebenso

$$\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{B\mathfrak{a}}{B\mathfrak{b}} \cdot \frac{\sin . ad}{\sin . bd},$$

also

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\sin . ac}{\sin . bc} : \frac{\sin . ad}{\sin . bd}$$

als Fundamental-Gesetz der Projektivität überhaupt; d. h. es gilt von je 4 entsprechenden Elementenpaaren, wenn

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = B(a, b, c, d \ldots),$$

und ist ersteres der Fall und zugleich die Ordnung der Elemente in A und B übereinstimmend, so gilt auch das letztere, wie durch Construktion näher nachgewiesen wird. Hieraus folgt:

a) Das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projektivischen Gebilde A, B ist bestimmt, sobald irgend drei dieser Paare gegeben sind.

b) Bei zwei beliebig liegenden Gebilden A, B kann man ganz nach Willkür drei Paar Elemente $\mathfrak{a}$, a; $\mathfrak{b}$, b; $\mathfrak{c}$, c auswählen und sodann festsetzen, die Gebilde sollen projektivisch und diese Elementenpaare sollen entsprechende Elementenpaare sein.

Besondere Fälle.

3. Hier ist hervorzuheben:
Wenn der Werth eines der Doppelverhältnisse

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}},\ \frac{\sin . ac}{\sin . bc} : \frac{\sin . ad}{\sin . bd} = 1$$

ist, was immer zugleich stattfindet, so heissen die 4 Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ oder die 4 Strahlen a, b, c, d harmonisch, und zwar $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ oder a und b, c und d zugeordnete harmonische Punkte oder Strahlen.

Wird in diesem Falle die Strecke $\mathfrak{ab}$ in $\mathfrak{c}$ gehälftet, so liegt $\mathfrak{d}$ auf A unendlich entfernt, und wird der Winkel ab durch c gehälftet, so ist c rechtwinklig zu d. Geschieht dasselbe aber in einem andern Punkte $\mathfrak{m}$, und durch einen andern Strahl h, so ist

$$\mathfrak{mc} \,.\, \mathfrak{md} = \mathfrak{ma}^2 = \mathfrak{mb}^2;\ \text{tng} . hc \,.\, \text{tng} . hd = \text{tng}^2 . ha = \text{tng}^2 . hb.$$

Bei irgend vier harmonischen Punkten ist das Rechteck unter den Abständen zweier zugeordneter Punkte von dem in der Mitte zwischen den beiden anderen

Bei irgend vier harmonischen Strahlen ist das Produkt der Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete Strahlen mit dem der Mitte zwischen den be-

liegenden Punkte gleich dem Quadrate des halben Abstandes der letzteren von einander. | den anderen liegenden einschliessen, gleich der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels, welchen die letzteren einschliessen.

Zwei und mehrere Gerade oder Strahlbüschel.

4. Ist zu gleicher Zeit

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = B(a, b, c, d \ldots)$$

und

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots) = B(a, b, c, d \ldots),$$

oder ist zu gleicher Zeit

$$B(a, b, c, d \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots)$$

und

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots),$$

so heissen die Geraden A, A_1 selber in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots; \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$, oder die Strahlbüschel B, B_1 selber in Ansehung der entsprechenden Strahlenpaare $a, b, c, d \ldots; a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ projektivisch, und ich schreibe

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots);$$
$$B(a, b, c, d \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots).$$

Liegen insbesondere A und A_1 mit B, oder B und B_1 mit A perspektivisch, so heissen A, A_1 oder B, B_1 perspektivisch u. s. w., wo nicht, schiefliegend. Der Punkt B heisst der Projektionspunkt der perspektivischen Geraden A, A_1, und die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \ldots$ in jedem Falle die Projektionsstrahlen von A, A_1. Endlich wird A der perspektivische Durchschnitt der perspektivischen Strahlbüschel B, B_1 genannt.

Auf jeder von zwei perspektivischen und folglich auch von zwei projektivischen Geraden A, A_1 überhaupt giebt es einen Punkt $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$, dessen entsprechender auf der anderen Geraden A_1, A ihr unendlich-entfernter Punkt $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}$ ist. Diese beiden Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ heissen die Durchschnitte der Parallelstrahlen. Eben so giebt es unter den entsprechenden Strahlenpaaren zweier perspektivischen und folglich auch zweier projektivischen Strahlbüschel B, B_1 überhaupt zwei Paare s, t; s_1, t_1 von der Eigenschaft, dass sowohl s zu t als auch s_1 zu t_1 rechtwinklig ist. Denn ein durch die Mittelpunkte B, B_1 gelegter Kreis, dessen Centrum auf dem perspektivischen Durchschnitte A liegt, schneidet letzteren in zwei Punkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, denen solche Strahlenpaare s, t; s_1, t_1 entsprechen müssen. Sie heissen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel.

5) Bei zwei projektivischen Gebilden A, A_1, so wie B, B_1 finden folgende metrische Relationen statt:

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} : \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1}; \quad \frac{\sin . ac}{\sin . bc} : \frac{\sin . ad}{\sin . bd} = \frac{\sin . a_1c_1}{\sin . b_1c_1} : \frac{\sin . a_1d_1}{\sin . b_1d_1},$$

und demnach ähnliche Lehrsätze als die unter 2) ausgesprochenen.

Hieraus ergiebt sich als **Nerv der ganzen Methode** der Satz:

Ist bei irgend einer Anzahl n Gebilden — Gerade und ebene Strahlbüschel — in irgend einer bestimmten Ordnung genommen der Reihe nach ein jedes Gebilde mit dem darauf folgenden projektivisch, so ist jedes mit jedem, also namentlich auch das erste mit dem letzten projektivisch.

Besondere Fälle.

6. a) Vertauscht man in 5) die Punktenpaare $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ mit den besonderen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$; $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$, und die Strahlenpaare c, d; c_1, d_1 mit den besonderen s, t; s_1 t_1 (4), so sind die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{aq}}{\mathfrak{bq}}$ und $\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{r}_1}$ $= 1$, und $\sin . at = \cos . as$ u. s. w., folglich $\mathfrak{ar} . \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{br} . \mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$; $\text{tng} . as . \text{tng}\, a_1t_1 = \text{tng} . bs . \text{tng} . b_1t_1$.

Bei zwei projektivischen Geraden ist das Rechteck unter den Abständen irgend zweier entsprechender Punkte von den Durchschnitten der Parallelstrahlen von unveränderlichem Inhalt.

Bei zwei projektivischen Strahlbüscheln ist das Produkt der Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, von unveränderlichem Werthe.

b) Vier harmonischen Punkten von A entsprechen vier harmonische Punkte von A_1, und vier harmonischen Strahlen von B entsprechen vier harmonische Strahlen von B_1 (5).

7. c) Haben je zwei entsprechende Abschnitte der Geraden A, A_1 gleiches Verhältniss, d. h. ist

$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1} = \frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} \text{ u. s. w.,}$$

so heissen A, A_1 **projektivisch-ähnlich**, und sind je zwei entsprechende Abschnitte einander gleich: $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{bc} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, u. s. w., so heissen sie **projektivisch-gleich**. In beiden Fällen sind die **unendlich-entfernten Punkte** beider Geraden **entsprechende Punkte**. Eben so heissen zwei Strahlbüschel B, B_1 **projektivisch-gleich**, wenn je zwei entsprechende Winkel einander gleich sind, und dann giebt es **unzählige Paare entsprechender rechter Winkel**.

Gegenseitige Lage der Gebilde.

a) Bedingungen der projektivischen Lage.

8. Da bei zwei projektivischen Geraden, oder Strahlbüscheln, wenn sie perspektivisch liegen, zwei entsprechende Punkte im Durchschnitte der ersteren, oder zwei entsprechende Strahlen mit dem gemeinschaftlichen Strahle der letzteren zusammenfallen, und da das ganze System ihrer entsprechenden Punkten- oder Strahlenpaare bestimmt ist, sobald irgend drei Paare gegeben sind (5), so folgt:

Zwei projektivische Gerade befinden sich allemal und nur dann in perspektivischer Lage, wenn entweder irgend zwei entsprechende Punkte in ihrem Durchschnitte vereinigt sind, oder wenn irgend drei Projektionsstrahlen in einem Punkte zusammentreffen.

Zwei projektivische Strahlbüschel befinden sich allemal und nur dann in perspektivischer Lage, wenn entweder irgend zwei entsprechende Strahlen auf einander fallen, oder wenn irgend drei entsprechende Strahlenpaare sich auf einer Geraden schneiden.

b) Auf einander gelegte Gerade, concentrische Strahlbüschel.

9) Werden zwei projektivische Gerade A, A_1 beliebig auf einander, oder zwei projektivische Strahlbüschel beliebig concentrisch gelegt, so ist wesentlich zu unterscheiden, ob die Elemente beider Gebilde nach derselben oder nach entgegengesetzter Richtung geordnet, d. h. ob sie gleichliegend oder ungleichliegend sind. Es frägt sich, ob bei solchen Gebilden, und wie viele entsprechende Elementenpaare zusammenfallen können?

Sind A, A_1 gleichliegend, so können sich höchstens nur zwischen den beiden Durchschnitten der Parallelstrahlen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ entsprechende Punkte vereinigen, und nie zwischen $\mathfrak{r}, \mathfrak{q}_1$, wenn A, A_1 ungleichliegend sind. Denn liegt ein solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, in dem sich entsprechende $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1$ vereinigen, nicht zwischen $\mathfrak{r}, \mathfrak{q}_1$, so ist die Richtung der Punktenreihe $\mathfrak{e}, \mathfrak{r}, \mathfrak{q}$ der Richtung der entsprechenden Punktenreihe $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{q}_1$ entgegengesetzt, einerlei dagegen mit dieser, wenn $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ zwischen $\mathfrak{r}, \mathfrak{q}_1$ liegt.

Da nach 6) das Rechteck $\mathfrak{a}\mathfrak{r} . \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$ constant ist z. B. $= g^2$, so ist auch für den Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ $\mathfrak{e}\mathfrak{r} . \mathfrak{e}_1\mathfrak{q}_1 = g^2$. Theilt man also die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, wenn A, A_1 gleichliegend, dergestalt in einem Punkte x, dass $x\mathfrak{r} . x\mathfrak{q}_1 = g^2$, so ist x nothwendig ein solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$; und bestimmt man, wenn A, A_1 ungleichliegend, auf der Verlängerung von $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ einen Punkt x so, dass $x\mathfrak{r} . x\mathfrak{q}_1 = g^2$, so ist auch jetzt x nothwendig ein Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$. Denn entspräche dem auf A vorgestellten Punkte x ein Punkt x_1 auf A_1, der nicht mit x zusammenfiele, so wäre doch $x\mathfrak{q}_1 = x_1\mathfrak{q}_1$, und es würden die Punktenreihen $x, \mathfrak{r}, \mathfrak{q}$ und $x_1, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{q}_1$ im ersten Falle nach entgegengesetzter, im zweiten nach einerlei Seite hin gerichtet sein.

Jenachdem der Abschnitt $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ grösser, gleich oder kleiner als $2g$, sind zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ zwei, einer oder kein Punkt x möglich. Dagegen gibt es auf den Verlängerungen von $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ beider-

seits einen Punkt x. In jedem Falle liegen die beiden Punkte x zu den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ symmetrisch.

Haben endlich zwei projektivische Strahlbüschel B, B_1 einerlei Mittelpunkt und werden durch eine beliebige Gerade geschnitten, so sind in dieser zwei projektivische Gerade A, A_1 auf einander gelegt, indem A mit B, A_1 mit B_1 perspektivisch ist. Jenachdem nun B, B_1 gleichliegend oder ungleichliegend sind, sind es auch die Geraden A, A_1, und jedem Punkte (ee_1) der letzteren muss ein Strahl (ee_1) der ersteren entsprechen.

a) Werden zwei projektivische Gerade beliebig aufeinander gelegt, so vereinigen sich, wenn sie gleichliegend sind, entweder zwei, oder nur ein, oder kein Paar entsprechende Punkte; dagegen allemal zwei solche Paare, wenn sie ungleichliegend sind.

a) Werden zwei projektivische Strahlbüschel beliebig concentrisch gelegt, so fallen, wenn sie gleichliegend sind, entweder zwei, oder nur ein, oder kein Paar entsprechende Strahlen auf einander; dagegen allemal zwei solche Paare, wenn sie ungleichliegend sind.

Insbesondere:

b) Werden zwei projektivisch-ähnliche Gerade beliebig auf einander gelegt — gleich- oder ungleichliegend — so vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechende Punkte, wovon eines namentlich die unendlich-entfernten Punkte sind.

c) Werden zwei projektivisch-gleiche Gerade gleichliegend auf einander gelegt, so treffen sich entweder nur ein Paar entsprechende, nämlich die unendlich-entfernten, oder je zwei entsprechende Punkte.

c) Werden zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel gleichliegend concentrisch gelegt, so fallen entweder gar keine, oder es fallen je zwei entsprechende Strahlen auf einander.

Werden zwei projektivisch-gleiche Gerade ungleichliegend auf einander gelegt, so treffen sich allemal zwei Paar entsprechende Punkte, deren eines unendlich-entfernt, das andere in der Mitte zwischen je zwei entsprechenden Punkten liegt.

Werden zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel ungleichliegend concentrisch gelegt, so fallen allemal zwei Paar entsprechende Strahlen auf einander, nämlich die Schenkel zweier entsprechender rechten Winkel.

Von dem ganzen weiteren Inhalte des Werkes hebe ich zu meinem Zwecke nur noch das Folgende hervor:

10. Liegen die Strahlen $a, b, c, d \ldots$; $a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots$ zweier projektivischer ebener Strahlbüschel B, B_1 in den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ zweier Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, d. h. in solchen Ebenen, welche sich alle in einer Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ schneiden, und man legt durch jeden dieser beiden Ebenenbüschel eine

beliebige Ebene, so erzeugen diese in jenen zwei neue ebene Strahlbüschel B', B'_1, welche in Ansehung der Strahlen $a', b', c', d' \ldots$; $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots$, die nämlich denselben Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ als die bezüglichen Strahlen von B, B_1 angehören, projektivisch sind. Denn B, B' sind beide mit einer Geraden A, der Durchnittslinie ihrer Ebenen, und eben so B_1, B'_1 mit einer Geraden A_1 perspektivisch, also der Reihe nach

$$B'(a', b', c', d' \ldots) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) \equiv B(a, b, c, d \ldots)$$
$$\equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) \equiv A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots) \equiv B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots).$$

11. Nachdem die Kegelschnitte durch Projektion des Kreises erzeugt und als unterscheidendes Merkmal ihrer Arten gefunden, dass die Ellipse keinen, die Parabel nur einen und die Hyperbel zwei unendlich-entfernte Punkte, und dass nur die Parabel eine unendlich-entfernte Tangente hat, wird sofort mittels der Sätze, dass der Centriwinkel eines Kreises, dessen Schenkel nach den Durchschnitten zweier festen mit einer beweglichen Tangente gehen, constant ist, und dass somit seine Schenkel zwei projektivisch-gleiche concentrische Strahlbüschel erzeugen, so wie dass Periheriewinkel auf gleichen Bogen gleiche Grösse haben, der folgende Satz zunächst vom Kreise, und sonach mittels 10) von Kegelschnitten überhaupt erwiesen:

Jede zwei Tangenten eines Kegelschnittes sind in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projektivisch, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten ihre wechselseitigen Berührungspunkte;

Jede zwei Punkte eines Kegelschnittes sind die Mittelpunkte zweier projektivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten desselben schneiden, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen die Tangenten in den gegenseitigen Mittelpunkten;

und umgekehrt.

Involutorische Gebilde.

Zwei involutorische Gerade oder ebene Strahlbüschel.

§. 1.

Werden zwei projektivische Gerade A, A_1 dergestalt auf einander gelegt, dass ihre beiden Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen sich in einem Punkte $\mathfrak{m}$ vereinigen, oder werden zwei projektivische ebene Strahlbüschel B, B_1 dergestalt concentrisch gelegt, dass die ungleichnamigen Schenkel s, t_1; t, s_1 ihrer entsprechenden rechten Winkel in einen Strahl m, n zusammenfallen, so erhalten dieselben ganz eigenthümliche Eigenschaften, welche überall da hervortreten, wo es sich um ganz singuläre Punkte und Linien der Figuren handelt, und durch welche

selbst Erscheinungen, deren Betrachtung sonst der Geometrie der Grösse ganz besonders anzugehören schien, als nothwendige Momente des Systemes „der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" aufgezeigt werden.

1. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ irgend zwei entsprechende Punkte der so auf einander gelegten Geraden A, A_1 und denkt man sich einen Augenblick z. B. die Gerade A_1 aus ihrer Lage gebracht und in der ihrer vorigen entgegengesetzten Richtung wieder auf A gelegt, jedoch so, dass nun der Punkt $\mathfrak{a}_1$ sich mit $\mathfrak{a}$ vereinigt, indem sich nämlich die A_1 um den Mittelpunkt des Abschnittes $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ dreht, so treten jetzt im Allgemeinen die Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ wieder aus einander, und bezeichnet man denjenigen Punkt von A, welcher vorher vom Punkte $\mathfrak{a}_1$ gedeckt wurde mit α, und denjenigen Punkt von A_1, welcher den Punkt $\mathfrak{a}$ deckte, mit α_1, so werden sich, so wie $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, zugleich auch die Punkte α und α_1 vereinigen, und überdies die beiden Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und $(\alpha\alpha_1)$ zu den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ symmetrisch zu liegen kommen. Da aber eine solche Lage allemal den beiden Paaren vereinigter Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$ zukommt (9), und da $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ ein solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ ist, in welchem sich zwei entsprechende vereinigen, so sind nothwendig auch die beiden anderen vereinigten α, α_1 entsprechende Punkte. Da nun das Entsprechen der Punkte von der gegenseitigen Lage der Geraden A, A_1 nicht abhängt, und da $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ beliebig gewählt wurden, so folgt, dass, wenn in zwei auf einander gelegten projektivischen Geraden A, A_1 die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen sich in einem Punkte $\mathfrak{m}$ vereinigen, je zwei entsprechende Punkte sich in doppeltem Sinne entsprechen, jenachdem sie wie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ als den Geraden A, A_1, oder wie α_1, α als den Geraden A_1, A zugehörig vorgestellt werden, d. h. die Geraden A, A_1 sind in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ projektivisch, oder $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots)$, indem jeder Punkt zu beiden Geraden gerechnet wird.

Und umgekehrt: entsprechen sich bei zwei auf einander gelegten projektivischen Geraden A, A_1 ein einziges Paar Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ in doppeltem Sinne, so gilt dies auch von jedem Durchschnitte der Parallelstrahlen und dem ihm entsprechenden unendlich-entfernten Punkte, oder diese beiden Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ vereinigen sich in einem Punkte $\mathfrak{m}$, und dann entsprechen sich alle entsprechenden Punktenpaare in doppeltem Sinne. Denn durch Umkehrung der einen Geraden erhält man zwei Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und $(\alpha\alpha_1)$, in deren jedem sich zwei entsprechende $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und α, α_1 vereinigen, folglich liegen beide zu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ symmetrisch, und diese letzteren müssen also, wenn die Geraden in ihre erste Lage zurückgebracht werden, in einen Punkt $\mathfrak{m}$ zusammenfallen.

Ein wesentlicher Unterschied tritt ein, jenachdem die Geraden A, A_1 gleichliegend oder ungleichliegend sind. Im ersten Falle nämlich werden dieselben durch die Umkehrung der einen ungleichliegend, also müssen jetzt die Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und $(\alpha\alpha_1)$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, ursprünglich also die wieder getrennten Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ zu beiden Seiten von $\mathfrak{m}$ liegen, so dass jeder Punkt rechts von $\mathfrak{m}$ einem Punkte links von $\mathfrak{m}$ entspricht. Im zweiten Falle dagegen stellt sich alles umgekehrt, und es kann kein Punkt der einen Seite von $\mathfrak{m}$ einem Punkte der anderen entsprechen. Hieraus ersieht man, dass die Geraden A, A_1, wenn sie gleichliegend sind, weder

wei noch einen Punkt, in welchem sich entsprechende vereinigen, nthalten können; denn auch der Punkt m ist kein solcher, weil n ihm zwei nicht entsprechende Punkte r, q_1 sich vereinigen sollen.)agegen giebt es, dem allgemeinen Gesetze (9) zufolge, bei un-:leichliegenden Geraden A, A_1 allemal zwei solche Punkte, ie in der Folge mit g, h bezeichnet werden sollen, und zwar liegt a in der Mitte zwischen beiden.

Da das Rechteck $ar \, . \, a_1 q_1$ unter den Abständen irgend zweier ntsprechender Punkte a, a_1 von den Durchschnitten der Parallel-trahlen von unveränderlichem Inhalt ist (6), so ist in unserem be-onderen Falle

$$am \, . \, a_1 m = bm \, . \, b_1 m = cm \, . \, c_1 m = gm^2 = hm^2;$$

olglich sind bei ungleichliegenden Geraden A, A_1 je zwei entspre-hende Punkte a, a_1; b, b_1; c, c_1 ... mit den Punkten g, h harmo-isch (3). Und hieraus ersieht man auch, dass alle Punkte, welche er unendlichen Strecke jenseits g (h) angehören, solchen entspre-hen, die auf der begrenzten Strecke gm (hm) liegen.

Endlich leuchtet es ein, dass das ganze System entsprechender 'unktenpaare der in Rede stehenden Geraden A, A_1 bestimmt sei, venn zwei beliebige dieser Paare gegeben sind. Denn nimmt man uf zwei auf einander liegenden Geraden A, A_1 zwei Punktenpaare , a_1; b, b_1 beliebig an, so kann man als drittes diejenigen Punkte , α_1 hinzufügen, welche z. B. mit den Punkten a_1, a der jedesma-gen anderen A_1, A zusammenliegen, und sofort festsetzen (2), eide Geraden sollen projektivisch und diese drei Punktenpaare ent-prechende sein. Dies wäre denn allemal und nur auf einzige Weise nöglich, und zwar müssen, wie gezeigt, die Durchschnitte der Pa-allelstrahlen zusammenfallen. Dasselbe ergibt sich übrigens auch us der in (2) entwickelten metrischen Relation, wenn man in die-er a_1 statt d und a statt d_1 setzt. Sie und die gleichzeitig statt-abenden Relationen verwandeln sich hierdurch nämlich in folgende:

$$1. \ \frac{ac}{bc} : \frac{a_1c_1}{b_1c_1} = \frac{ab_1}{ba_1}; \qquad 4. \ \frac{ab \, . \, ab_1}{ac \, . \, ac_1} = \frac{a_1b \, . \, a_1b_1}{a_1c \, . \, a_1c_1};$$

$$2. \ \frac{ab}{cb} : \frac{a_1b_1}{c_1b_1} = \frac{ac_1}{ca_1}; \qquad 5. \ \frac{ba \, . \, ba_1}{bc \, . \, bc_1} = \frac{b_1a \, . \, b_1a_1}{b_1c \, . \, b_1c_1};$$

$$3. \ \frac{ba}{ca} : \frac{b_1a_1}{c_1a_1} = \frac{bc_1}{cb_1}; \qquad 6. \ \frac{ca \, . \, ca_1}{cb \, . \, cb_1} = \frac{c_1a \, . \, c_1a_1}{c_1b \, . \, c_1b_1}.$$

Vertauscht man hier, was offenbar erlaubt ist, von Neuem zwei ntsprechende Punkte mit einander, so behalten die drei letzten Re-ationen ihre Form, aus der 1sten, 2ten und 3ten dagegen entstehen lurch Vertauschung von c, c_1; b, b_1; a, a_1 die neuen, aber unter ich identischen:

$$7. \ \frac{ac_1}{bc_1} : \frac{a_1c}{b_1c} = \frac{ab_1}{ba_1}; \ \frac{ab_1}{cb_1} : \frac{a_1b}{c_1b} = \frac{ac_1}{ca_1}; \ \frac{ba_1}{ca_1} : \frac{b_1a}{c_1a} = \frac{bc_1}{cb_1}.$$

Jebrigens erhält man diese auch, wenn 1) und 2) durch einander ividirt, und das Resultat mit 3) verbunden wird.

Für den Fall eines Punktes g (oder h) ergeben sich die be-nderen:

$$1.\ \frac{\mathfrak{ag}}{\mathfrak{bg}} : \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{ab}_1}{\mathfrak{ba}_1};\quad 3.\ \frac{\mathfrak{ag}^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{g}^2} = \frac{\mathfrak{ab}\cdot\mathfrak{ab}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1};$$

$$2.\ \frac{\mathfrak{ag}\cdot\mathfrak{bg}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{b}_1\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1};\quad 4.\ \frac{\mathfrak{bg}^2}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{g}^2} = \frac{\mathfrak{ba}\cdot\mathfrak{ba}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1};$$

hieraus für $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$:

$$\mathfrak{ag} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{g} = \mathfrak{ah} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{h}.$$

Vielleicht war es der Umstand, dass man die Auflösung eines Productes von Verhältnissen in ein Aggregat eine Evolution zu nennen pflegt, welcher Désargues, den Lehrer des Pascal, veranlasste, die 4te, 5te und 6te der obigen 7 Relationen mit dem Worte „Involution" zu bezeichnen. Und dieses Wort kommt hier um so gelegener, da es, als französisches betrachtet, die scheinbare Verwirrung bezeichnen würde, welche dadurch entsteht, dass die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ... ursprünglich zu A, hinterdrein aber auch zu A_1 gerechnet werden. Es sollen also zwei auf einander gelegte projektivische Gerade, deren Durchschnitte der Parallelstrahlen sich in einem Punkte vereinigen, **zwei involutorische Gerade**, und das ganze System ihrer entsprechenden Punktenpaare **eine Involution von Punkten** heissen. Ferner sollen je zwei entsprechende Punkte derselben **zugeordnete Punkte**, der Punkt $\mathfrak{m}$ der **Mittelpunkt der Involution** und die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ die **Hauptpunkte der Involution** genannt werden. Drei beliebige Paare zugeordneter Punkte bilden **eine Involution von sechs**, zwei solche Paare mit einem Hauptpunkte **eine Involution von fünf**, und jedes Paar mit den beiden Hauptpunkten **eine Involution von vier Punkten oder vier harmonische Punkte.**

II. Sind andererseits B, B_1 irgend zwei concentrische projektivische ebene Strahlbüschel, deren ungleichnamige Schenkel s, t_1; t, s_1 der entsprechenden rechten Winkel in einen Strahl $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ zusammenfallen, so lassen sich von ihnen ähnliche Eigenschaften, wie von den Geraden A, A_1, und zwar entweder auf dieselbe Art, oder auch kürzer so, wie folgt, nachweisen. Eine beliebige Gerade A werde von den Strahlen a, b, c, d, s, t ... des einen Strahlbüschels B in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ ..., und eine mit A vereinigte Gerade A_1 werde von den entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1 d_1, s_1, t_1 ... des anderen Strahlbüschels B_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ ... geschnitten, so ist der Reihe nach

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \ldots) \equiv B(a, b, c, d, s, t \ldots)$$
$$= B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1 \ldots) \equiv A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{t}_1 \ldots),$$

also auch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{t}_1 \ldots).$$

Nun fallen die Strahlen s und t_1, t und s_1, also auch die Punkte $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}_1$, zusammen, d. h. die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ ($\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$) entsprechen sich in doppeltem Sinne; demnach sind die Geraden A, A_1 involutorisch, und da nun je zwei entsprechende Punkte derselben sich in doppeltem Sinne entsprechen müssen, so gilt das nämliche

uch von je zwei entsprechenden Strahlen von B, B_1, mit denen jene perspektivisch liegen, oder

$$B(a, b, c, d, s, t \ldots a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1 \ldots)$$
$$= B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1 \ldots a, b, c, d, s, t \ldots).$$

Und da hierbei die Eigenthümlichkeit der Stralen s, t; s_1, t_1 nicht in Betracht kommt, und es in zwei projektivischen Strahlbüscheln nur ein einziges Paar entsprechender rechter Winkel giebt, so folgt auch umgekehrt, dass wenn in zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 irgend zwei Strahlen sich in doppeltem Sinne entsprechen, das nämliche von allen entsprechenden Strahlenpaaren gilt, und dass, wenn nun s von σ_1, s_1 von σ t von τ_1, t_1 von τ gedeckt wird, t_1 mit σ_1, und t mit σ einerlei sein muss, weil sonst den beiden rechten Winkeln st und $\sigma\tau$ von B ebenfalls rechte Winkel s_1t_1 und $\sigma_1\tau_1$ entsprechen würden.

Denkt man sich insbesondere die Geraden A, A_1 rechtwinklig zu dem Strahle m oder n, so schneidet er sie in einem Punkte m, dem der unendlich-entfernte Punkt in doppeltem Sinne entspricht. Hieraus in Verbindung mit I. ergibt sich, dass bei gleichliegenden Strahlbüscheln je zwei entsprechende Strahlen auf verschiedenen Seiten von m oder n liegen müssen, bei ungleichliegenden dagegen beide zwischen m und n; ferner, so wie bereits aus dem Vorigen, dass nur bei Strahlbüscheln der letzten Art solche Strahlen g, h stattfinden, in denen sich entsprechende vereinigen, dass dieselben mit je zwei entsprechenden Strahlen harmonisch sind, und die von g und h gebildeten Winkel durch m und n gehälftet werden.

Aus (6) ergibt sich, dass

$$\operatorname{tng} am \,.\, \operatorname{tng} a_1m = \operatorname{tng} bm \,.\, \operatorname{tng} b_1m = \operatorname{tng} an \,.\, \operatorname{tng} a_1n = \operatorname{tng}^2 hm$$
$$= \operatorname{tng}^2 gm = \operatorname{tng}^2 hn$$

u. s. w.

Endlich lässt es sich wie oben zeigen, dass das ganze System entsprechender Strahlenpaare der in Rede stehenden Strahlbüschel durch zwei beliebige dieser Paare bestimmt sei, und dass zwischen je drei derselben, zwischen je zweien und einem Strahle g oder h, endlich zwischen jedem Paare und den beiden Strahlen g, h folgende Relationen statthaben:

$$1.\quad \frac{\sin . ac}{\sin . bc} : \frac{\sin . a_1c_1}{\sin . b_1c_1} = \frac{\sin . ab_1}{\sin . ba_1};$$

$$2.\quad \frac{\sin . ab}{\sin . cb} : \frac{\sin . a_1b_1}{\sin . c_1b_1} = \frac{\sin . ac_1}{\sin . ca_1};$$

$$3.\quad \frac{\sin . ba}{\sin . ca} : \frac{\sin . b_1a_1}{\sin . c_1a_1} = \frac{\sin . bc_1}{\sin . cb_1};$$

$$4.\quad \frac{\sin ab \,.\, \sin ab_1}{\sin . ac \,.\, \sin . ac_1} = \frac{\sin . a_1b \,.\, \sin . a_1b_1}{\sin . a_1c \,.\, \sin . a_1c_1};$$

$$5.\quad \frac{\sin . ba \,.\, \sin . ba_1}{\sin . bc \,.\, \sin . bc_1} = \frac{\sin . b_1a \,.\, \sin . b_1a_1}{\sin . b_1c \,.\, \sin . b_1c_1};$$

$$6.\quad \frac{\sin . ca \,.\, \sin . ca_1}{\sin . cb \,.\, \sin . cb_1} = \frac{\sin . c_1a \,.\, \sin . c_1a_1}{\sin . c_1b \,.\, \sin . c_1b_1};$$

$$7.\quad \frac{\sin . ac_1}{\sin . bc_1} : \frac{\sin . a_1c}{\sin . b_1c} = \frac{\sin . ab_1}{\sin . ba_1}.$$

$$1.\quad \frac{\sin . ag}{\sin . bg} : \frac{\sin . a_1g}{\sin . b_1g} = \frac{\sin . ab_1}{\sin . ba_1};$$

$$2.\quad \frac{\sin . ag . \sin . bg}{\sin . a_1g . \sin . b_1g} = \frac{\sin . ab}{\sin . a_1b_1};$$

$$3.\quad \frac{\sin^2 . ag}{\sin^2 . a_1g} = \frac{\sin . ab . \sin . ab_1}{\sin . a_1b . \sin . a_1b_1};$$

$$4.\quad \frac{\sin^2 . bg}{\sin^2 . b_1g} = \frac{\sin . ba . \sin . ba_1}{\sin . b_1a . \sin . b_1a_1}.$$

$$1.\quad \sin . ag : \sin . a_1g = \sin . ah : \sin . a_1h.$$

Zwei concentrische projektivische ebene Strahlbüschel B, B_1, deren ungleichnamige Schenkel der entsprechenden rechten Winkel sich vereinigen, heissen zwei **involutorische Strahlbüschel**, und das ganze System ihrer entsprechenden Strahlenpaare eine **Involution von Strahlen**, je zwei entsprechende Strahlen **zugeordnete Strahlen**, die beiden mit m, n bezeichneten die **Achsen der Involution**, und die Strahlen g, h die **Hauptstrahlen der Involution**. Drei beliebige Paare zugeordneter Strahlen bilden eine **Involution von sechs**, zwei solche Paare mit einem Hauptstrahle eine **Involution von fünf**, und jedes Paar mit beiden Hauptstrahlen eine **Involution von vier Strahlen** oder **vier harmonische Strahlen**.

Mit Hülfe dieser Benennungen drücken wir nun die beiderseitigen Resultate dergestalt aus:

a) **Bei zwei involutorischen Geraden entsprechen sich je zwei zugeordnete Punkte in doppeltem Sinne, d. h. die Geraden sind in Ansehung der zugeordneten Punktenpaare projektivisch, wie man auch die Punkte eines jeden Paares unter beide Gerade vertheilen mag.**	*a*) **Bei zwei involutorischen Strahlbüscheln entsprechen sich je zwei zugeordnete Strahlen in doppeltem Sinne, d. h. die Strahlbüschel sind in Ansehung der zugeordneten Strahlenpaare projektivisch, wie man auch die Strahlen eines jeden Paares unter beide Strahlbüschel vertheilen mag.**
b) **Entsprechen sich bei zwei auf einander gelegten projektivischen Geraden ein einziges Paar in doppeltem Sinne, so sind die Geraden involutorisch.**	*b*) **Entsprechen sich bei zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln ein einziges Paar Strahlen in doppeltem Sinne, so sind die Strahlbüschel involutorisch.**
c) **Bei zwei gleichliegenden involutorischen Geraden liegen je zwei zugeord-**	*c*) **Bei zwei gleichliegenden involutorischen Strahlbüscheln liegen je zwei zu-**

nete Punkte rechts und links vom Mittelpunkte der Involution, und es wechseln die Punkte jedes Paares mit denen der anderen Paare ab; bei zwei ungleichliegenden dagegen liegen je zwei zugeordnete Punkte auf einerlei Seite vom Mittelpunkte, und schliessen jedes andere Paar entweder ein oder aus.

geordnete Strahlen rechts und links von jeder Achse der Involution, und es wechseln die Strahlen jedes Paares mit denen der anderen Paare ab; bei zwei ungleichliegenden dagegen liegen je zwei zugeordnete Strahlen zwischen beiden Achsen, und schliessen jedes andere Paar entweder ein oder aus.

d) Gleichliegende involutorische Gerade haben keinen Hauptpunkt; ungleichliegende aber haben allemal zwei Hauptpunkte, und zwar liegt der Mittelpunkt der Involution in der Mitte zwischen beiden.

d) Gleichliegende involutorische Strahlbüschel haben keinen Hauptstrahl; ungleichliegende aber haben allemal zwei Hauptstrahlen, und zwar werden die von ihnen eingeschlossenen Winkel und Nebenwinkel durch die Achsen der Involution gehälftet.

e) Eine Involution von Punkten ist durch zwei Paar zugeordnete Punkte, und daher auch durch ein solches Paar und einen Hauptpunkt oder den Mittelpunkt, oder durch beide Hauptpunkte, oder durch einen Hauptpunkt und den Mittelpunkt bestimmt. Und man kann auf einer Geraden zwei Paar Punkte, oder auch ein Paar und einen dritten Punkt, oder zwei Punkte allein beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass sie in dem angedeuteten Sinne zu einer Involution von Punkten gehören sollen.

e) Eine Involution von Strahlen ist durch zwei Paar zugeordnete Strahlen, und daher auch durch ein solches Paar und einen Hauptstrahl oder eine Achse, oder durch beide Hauptstrahlen, oder durch einen Hauptstrahl und eine Achse bestimmt. Und man kann um einen Punkt zwei Paar Strahlen, oder auch ein Paar und einen dritten Strahl, oder zwei Strahlen allein beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass sie in dem angedeuteten Sinne zu einer Involution von Strahlen gehören sollen.

f) Das Rechteck unter den Abständen irgend zweier zugeordneter Punkte vom Mittelpunkte der Involution ist von unveränderlichem Inhalt.

f) Das Product der Tangenten der Winkel, welche irgend zwei zugeordnete Strahlen mit einer Achse der Involution einschliessen, ist von unveränderlichem Werthe.

g) Zwischen den Abschnitten einer Involution von

g) Zwischen den Sinus der Winkel einer Involution

sechs, fünf, vier Punkten finden allemal die obigen sieben, vier eine metrischen Relationen statt.

von sechs, fünf, vier Strahlen finden allemal die obigen sieben, fünf, vier metrischen Relationen statt.

Besondere Fälle.

§. 2.

Sind die auf einander gelegten Geraden A, A_1 projektivisch-ähnlich, so sind beide Durchschnitte der Parallelstrahlen unendlich-entfernt (7); daher muss man in diesem Falle, um sicher zu gehen, die Entscheidung der Frage, ob solche Gerade involutorisch sein können, davon abhängen lassen, ob sie das andere wesentliche Merkmal involutorischer Geraden besitzen, dass nämlich je zwei entsprechende Punkte sich in doppeltem Sinne entsprechen. Fände aber dieses letztere z. B. in Bezug auf die Doppelpunkte $(\mathfrak{a}\alpha_1)$ und $(\mathfrak{a}_1\alpha)$ statt, so wäre das Verhältniss der entsprechenden Abschnitte $\mathfrak{a}\alpha : \mathfrak{a}_1\alpha_1 = 1$, also die Geraden A, A_1 nicht überhaupt projektivisch-ähnlich, sondern projektivisch-gleich. Es können also nur projektivisch-gleiche Gerade involutorisch sein; aber auch diese sind es offenbar nur dann, wenn sie gleichliegend sind und je zwei entsprechende Punkte sich decken, oder wenn sie ungleichliegend sind, in welchem Falle ein Hauptpunkt in der Mitte zwischen je zwei zugeordneten Punkten, der andere sammt dem Mittelpunkte der Involution unendlich entfernt liegt.

Sollen andererseits zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B_1 dergestalt concentrisch gelegt werden, dass die ungleichnamigen Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, deren es in diesem Falle unzählige giebt, sich vereinigen, so kann dies auf doppelte Weise geschehen. Man denke sich beide erst in solcher Lage, dass je zwei entsprechende Strahlen sich decken, so können sie in dieser Lage involutorisch heissen, es ist aber dieses ein durchaus unfruchtbarer Fall und kann daher füglich, so wie auch der ähnliche der Geraden A, A_1, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Denkt man sich aber sofort den einen Strahlbüschel B_1 so lange um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gedreht, bis ein Strahl s_1 zu dem entsprechenden Strahle s rechtwinklig wird, so vereinigt sich s_1 mit einem Strahle t von B, und s mit dem entsprechenden Strahle t_1 von B_1, und so wie s, s_1 oder t, t_1, müssen sich je zwei Strahlen a, a_1 in doppeltem Sinne entsprechen. Die Strahlbüschel sind also involutorisch, und dieser Fall ist schon deshalb, weil ihm kein ähnlicher von Seiten der Geraden A, A_1 entspricht, vor allen anderen ausgezeichnet. Denkt man sich endlich den einen Strahlbüschel B_1, nachdem er die letztere Lage erhalten, um den Strahl (st_1) als Achse herumgewendet, so fallen auch die Strahlen s_1, t wieder auf einander, jedoch kein anderes Paar entsprechender Strahlen bleibt rechtwinklig, und es fällt jetzt der Strahl g_1, welcher den rechten Winkel s_1t_1 hälftete, mit dem entsprechenden Strahle g, und der Strahl h_1, welcher mit g vereinigt den rechten Winkel st hälftete, mit dem entsprechenden h zusammen, so dass also g und h rechtwinklig zu einander sind. Uebrigens versteht es sich, dass zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel, sobald sie ungleichliegend sind, sich allemal in dieser letz-

teren Lage befinden müssen, was auch im ähnlichen Falle von den Geraden A, A_1 gilt.

a) Zwei auf einander gelegte projektivisch-ähnliche Gerade können niemals involutorisch sein.

b) Zwei auf einander gelegte gleichliegende projektivisch-gleiche Gerade können, ohne sich zu dekken, nicht involutorisch sein. Zwei ungleichliegende dagegen sind allemal involutorisch, und zwar liegt ein Hauptpunkt in der Mitte zwischen je zwei zugeordneten Punkten, und der andere sammt dem Mittelpunkte der Involution unendlich entfernt.

b) Zwei concentrische gleichliegende projektivisch-gleiche Strahlbüschel sind involutorisch, wenn je zwei entsprechende Strahlen zu einander rechtwinklig sind; zwei ungleichliegende dagegen sind allemal involutorisch, und zwar stehen die Hauptstrahlen senkrecht auf einander und ein jeder liegt in der Mitte zwischen je zwei zugeordneten Strahlen.

Hiernach sind die Ausdrücke involutorisch-gleiche Gerade, Involution der rechten Winkel, ungleichliegend involutorisch-gleiche Strahlbüschel zu verstehen.

Endlich sieht man leicht ein, dass

c) zwei ungleichliegend involutorische Gerade involutorisch-gleich sein müssen, wenn ein Hauptpunkt unendlich-entfernt ist.

c) zwei involutorische Strahlbüschel eine Involution der rechten Winkel bilden, wenn irgend zwei Paar zugeordnete Strahlen zu einander rechtwinklig sind, und dass sie ungleichliegend involutorisch-gleich sind, wenn die Hauptstrahlen zu einander rechtwinklig sind.

Noch ein Grenzfall zwischen gleichliegenden und ungleichliegenden involutorischen Gebilden überhaupt ist zu erwähnen, welcher dadurch entsteht, dass die beiden Hauptpunkte oder Hauptstrahlen der letzteren mit dem Mittelpunkte oder einer Achse der Involution sich vereinigen. In diesem Falle nämlich ist jeder beliebige Punkt oder Strahl der vierte harmonische zu den beiden Hauptpunkten oder Hauptstrahlen und zu dem mit den letzteren vereinigten Punkte oder Strahle, also alle Punkte oder Strahlen einem einzigen zugeordnet.

Einiges über Involutionssysteme.

§. 3.

An das Vorige schliesst sich zunächst eine Untersuchung an über die zugeordneten Punkte oder Strahlen, welche zwei, einerlei

Geraden oder Punkte angehörigen Involutionen gemeinschaftlich sind. Ich verschiebe sie aber bis dahin, wo sich Mittel darbieten, dieselbe schneller, als es hier geschehen könnte, zu erledigen.

Denkt man sich eine Reihe beliebiger Doppelgebilde A, A_1; A_2, A_3; B, B_1 u. s. w., d. h. welche immer paarweise auf einander liegen oder concentrisch sind, und nimmt an, dass sowohl einerseits A, A_2, B . . . als auch andererseits A_1, A_3, B_1 . . . der Reihe nach projektivisch sind, so ist es klar, dass wenn eines dieser Doppelgebilde, z. B. A, A_1, involutorisch ist, auch alle übrigen es sein müssen. Eine solche Reihe involutorischer Doppelgebilde heisst ein Involutionssystem. Solcher Systeme gibt es verschiedene Arten, je nachdem entweder je zwei Doppelgebilde perspektivisch, oder theils schief theils perspektivisch, oder je zwei schief zu einander liegen. Die Betrachtung der Systeme der ersten Art führt zu Construktionen einer Involution von Punkten oder Strahlen, welche sich ohne Kreis ausführen lassen. Von denen der zweiten Art soll hier der einfachste und fruchtbarste Fall näher betrachtet werden.

Hat man zwei beliebige schief liegende projektivische Strahlbüschel B, B_1, wodurch also (11) ein beliebiger Kegelschnitt gegeben ist, und liegt ein mit B concentrischer Strahlbüschel B_2 mit B_1 perspektivisch, so dass also

$$B(a, b, c \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) \equiv B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots),$$

so ist

$$B(a, b, c, d \ldots) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots);$$

und rechnet man jetzt alle Strahlen von B_2 zu B und bezeichnet die denselben in B_1 entsprechenden durch a_3, b_3, c_3, d_3 . . ., und die den letzteren wieder in B_2 entsprechenden durch a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 . . ., so ist

$$B(a, b, c, d \ldots a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots)$$
$$\equiv B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots),$$

folglich

$$B(a, b, c, d \ldots a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots a'_2, b'_2, c'_2, d_2' \ldots).$$

Denkt man sich nun zunächst nur die vier entsprechenden Strahlen a a_1, a_2, a_3 gezogen und den perspektivischen Durchschnitt von B_1, B_2 durch die beiden Durchschnitte der Strahlenpaare a_1, a_2 und a_3, a gegeben, so fällt der Strahl a'_2 mit a zusammen, so dass sich also a, a_2 in doppeltem Sinne entsprechen. Ein Gleiches gilt also auch von allen übrigen Paaren b, b_2; c, c_2; d, d_2 . . ., und man ist somit zur folgenden Aussage berechtigt, der hier sogleich eine analoge zur Seite gestellt wird:

1) Geht ein Kegelschnitt durch zwei Gegenecken und die Durchschnitte der Gegenseiten eines einfachen	1) Berührt ein Kegelschnitt zwei Gegenseiten und die Diagonalen eines einfachen Vierseits, so gibt es un-

Vierecks, so gibt es unzählige Vierecke, welche dieselben Durchschnitte der Gegenseiten haben, und von deren Gegenecken das eine Paar auf demselben Kegelschnitte, das andere auf derselben Geraden, als die beiden anderen Gegenecken des ersteren Vierecks, liegt.

zählige Vierseite, welche der Richtung nach dieselben Diagonalen haben, und von deren Gegenseiten das eine Paar denselben Kegelschnitt berührt, das andere denselben Durchschnittspunkt, als die beiden anderen Gegenseiten des ersteren Vierseits, hat.

Ist P der perspektivische Durchschnitt von B_1, B_2, und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ u. s. w. die jedesmaligen Gegenecken der (links) gedachten Vierecke, welche auf dem Kegelschnitte liegen, so schneiden die Verbindungslinien $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ u. s. w. der letzteren die Gerade BB_1 allemal in einem Punkte, welcher zu B, B_1 und dem Durchschnitte von BB_1 und P der vierte harmonische ist. Dieser Punkt (p) ist also unveränderlich derselbe, und ist zugleich zu je zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und dem zu P gehörigen Punkte der vierte, dem letzteren zugeordnete harmonische Punkt. (Nach dem bekannten Satze über die Diagonalen des vollständigen Vierseits.) Hieraus folgt links, und auf ähnliche Weise rechts:

2) Gehen durch einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes zwei beliebige Gerade, welche den letzteren in vier Punkten schneiden, und man verbindet diese Punkte durch zwei neue Gerade, so liegt der Durchschnitt dieser letzteren immer auf einer und derselben geraden Linie, deren Durchschnitt mit jeder der ersteren Geraden zu den dem Kegelschnitte angehörigen Punkten und dem anfänglichen Punkte der vierte, dem letzteren zugeordnete Punkt ist.

2) Werden von zwei beliebigen Punkten einer Geraden an einen Kegelschnitt zwei Paar Tangenten gezogen, und zwei Durchschnittspunkte dieser letzteren durch eine Gerade verbunden, so geht dieselbe immer durch einen und denselben Punkt, dessen nach einem der ersteren Punkte gehender Strahl zu den von letzterem ausgehenden Tangenten und zu der anfänglichen Geraden der vierte, der letzteren zugeordnete harmonische Strahl ist.

Dieser Eigenschaft wegen heisst (links und rechts) die Gerade P die harmonische Polare von p, und der Punkt p der harmonische Pol von P, und man sieht sogleich, dass p ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes liegen muss, je nachdem P ihn durchschneidet oder nicht.

Bedenkt man endlich, dass die Strahlbüschel B, B_2 involutorisch und durch zwei Paar zugeordnete Strahlen a, a_2; b, b_2, so wie der Punkt p durch zwei Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, bestimmt sind; dass die beiden Strahlen, welche nach den Durchschnitten von P mit dem Kegelschnitte gehen, Hauptstrahlen von B, B_2 sein müssen und existiren oder nicht, je nachdem P den Kegelschnitt schneidet oder nicht schneidet, so folgt links, und ähnlicher Weise rechts:

3) Die sämmtlichen Punktenpaare, in denen ein Kegelschnitt von einem beliebigen ebenen Strahlbüschel geschnitten wird, bestimmen, indem sie mit einem beliebigen Punkte seines Umfangs durch Gerade verbunden werden, die zugeordneten Strahlenpaare zweier involutorischer Strahlbüschel, welche gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem der Mittelpunkt des ersteren innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liegt, und deren Hauptstrahlen im letzteren Falle nach den Punkten gehen, in denen die harmonische Polare dieses Mittelpunktes den Kegelschnitt durchschneidet.

3) Die sämmtlichen Tangentenpaare, welche von den Punkten einer beliebigen Geraden an einen Kegelschnitt gehen, bestimmen auf einer beliebigen Tangente desselben die zugeordneten Punktenpaare zweier involutorischer Geraden, welche gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem jene beliebige Gerade den Kegelschnitt in keinem oder in zwei Punkten schneidet, und deren Hauptpunkte im letzteren Falle auf den Tangenten liegen, welche von dem harmonischen Pole dieser Geraden gezogen werden.

Und umgekehrt:

4) Bildet man um einen beliebigen Punkt auf dem Umfang eines Kegelschnittes eine Involution von Strahlen, so gehen sämmtliche Sehnen dieses Kegelschnittes, welche durch die zugeordneten Strahlen der Involution bestimmt werden, durch einen und denselben Punkt, welcher innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liegt, je nachdem die Involution aus gleich- oder ungleichliegenden Strahlbüscheln besteht.

4) Bildet man auf einer beliebigen Tangente eines Kegelschnittes eine Involution von Punkten, so liegen die Durchnitte der Tangentenpaare, welche von den zugeordneten Punkten der Involution ausgehen, auf einer und derselben Geraden, welche den Kegelschnitt in keinem oder in zwei Punkten schneidet, je nachdem die Involution aus gleich- oder ungleichliegenden Geraden besteht.

Ich übergehe mehrere interessante Zusätze dieses letzten Satzes, und behandle auch von den hierher gehörigen Aufgaben nur die folgende, welche für die Theorie der gemeinschaftlichen Sekanten- und Tangentendurchschnitte von besonderer Wichtigkeit ist:

5) Wenn von zwei concentrischen Involutionen von Strahlen je zwei Paar zugeordnete Strahlen gegeben sind, mittels des Lineals und eines festen Kreises

5) Wenn von zwei auf einander gelegten Involutionen von Punkten je zwei Paar zugeordnete Punkte gegeben sind, mittels des Lineals und eines festen

dasjenige Paar zugeordnete Strahlen zu finden, welches beiden gemeinschaftlich angehört.

Kreises dasjenige Paar zugeordnete Punkte zu finden, welches beiden gemeinschaftlich angehört.

Vermittelst einer beliebigen Geraden, welche beide Involutionen durchschneidet, wird die Aufgabe links auf die andere rechts zurückgeführt.

Sind auf einer Geraden A für die eine Involution die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$, für die andere die Punkte $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_1; \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'_1$ gegeben, so verbinde man diese Punkte mit einem beliebigen Punkte B auf dem Umfange des Hülfskreises bezüglich durch die Geraden $a, a_1; b, b_1; a', a'_1; b', b'_1$, welche den Kreis zum zweitenmal in den Punkten $\alpha, \alpha_1; \beta, \beta_1; \alpha', \alpha'_1; \beta', \beta'_1$ schneiden; dann ziehe man die Sehnen $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1$, die sich in p, und die Sehnen $\alpha'\alpha'_1, \beta'\beta'_1$, die sich in p' schneiden, sofort wieder die Gerade pp', welche, wo möglich, den Kreis in k, k_1 schneide; endlich die Strahlen Bk, Bk_1, so schneiden diese die Gerade A in den gesuchten zwei Punkten $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1$ oder $\mathfrak{k}', \mathfrak{k}'_1$.

Der Beweis erhellt unmittelbar aus 4) links. Sind die beiden Paare involutorischer Gebilde, um die es sich handelt, **ungleichliegend**, so liegen beide Punkte p, p' ausserhalb des Kreises, also ist es in diesem Falle möglich, dass die Gerade pp' den Kreis nicht schneide, und es folglich keine Punkte $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1$ gebe, und zwar tritt dieses letztere nothwendig ein, wenn die Hauptpunkte oder Hauptstrahlen der einen Involution abwechselnd zu denen der anderen liegen. Ist dagegen eines jener Paare, oder sind beide Paare **gleichliegend**, so liegt einer der Punkte p, p' oder beide zugleich innerhalb des Kreises, und es giebt folglich in diesen beiden Fällen nothwendig ein Paar Punkte $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1$. In der Sprache der Analysis würde dieses Resultat so lauten: **Ein Punkten- oder Strahlenpaar, welches mit jedem von zwei andern solchen Paaren harmonisch ist, ist allemal reell, wenn eines dieser beiden letzteren, oder wenn beide imaginär sind; es kann aber imaginär werden, wenn die letzteren beide reell sind.**

Zugeordnete harmonische Pole und Polaren; zugeordnete Durchmesser und Achsenpunktwinkel; die Brennpunkte.

§. 4.

Bezeichnet man jetzt in der Figur, welche den Betrachtungen des vorigen §. zu Grunde lag, die Punkte, in welchen die Gerade P von den Strahlen $a, b, c, d \ldots; a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ der involutorischen Strahlbüschel B, B_2 geschnitten wird, durch $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots$ $\mathfrak{a}'_2, \mathfrak{b}'_2, \mathfrak{c}'_2, \mathfrak{d}'_2 \ldots$, und die Strahlen, welche den Punkt p mit diesen Punkten verbinden, durch $a', b', c', d' \ldots; a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots$, so sieht man zunächst, dass der Punkt $\mathfrak{a}'$ zu dem Strahle a'_2, $\mathfrak{a}'_2$ zu a', $\mathfrak{b}'$ zu b'_2 u. s. f. in derselben Beziehung stehe, als p zu P, dass also **die harmonischen Pole aller Geraden, welche durch einen Punkt p gehen, auf der harmonischen Po-**

lare P dieses Punktes liegen, und umgekehrt; ferner ergibt sich mittels B, B_2, dass sowohl die Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$...; $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$, $\mathfrak{d}'_2$... eine Involution von Punkten, als auch die Strahlen a', b', c', d'...; a'_2, b'_2, c'_2, d'_2... eine Involution von Strahlen bilden.

Zwei Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'_2$, wovon jeder auf der harmonischen Polare des anderen in Bezug auf einen Kegelschnitt liegt, heissen **zwei zugeordnete harmonische Pole** in Bezug auf diesen Kegelschnitt, und zwei Gerade a', a'_2, wovon jede durch den harmonischen Pol der anderen in Bezug auf einen Kegelschnitt geht, heissen **zwei zugeordnete harmonische Polaren** in Bezug auf diesen Kegelschnitt. Ferner heissen drei Punkte p, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'_2$, deren jeder der harmonische Pol der Geraden ist, welche die beiden anderen verbindet, **drei zugeordnete harmonische Pole**, und diese Geraden P, a'_2, a' **drei zugeordnete harmonische Polaren**.

1) **Die sämmtlichen Paare zugeordneter harmonischer Polaren, in Bezug auf einen Kegelschnitt, welche einem beliebigen Punkte seiner Ebene angehören, bilden eine Involution von Strahlen, deren Gebilde gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem dieser Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liegt, und deren Hauptstrahlen im letzteren Falle die beiden Tangenten sind, welche von diesem Punkte ausgehen.** Und... (wie rechts)

1) **Die sämmtlichen Paare zugeordneter harmonischer Pole, in Bezug auf einen Kegelschnitt, welche einer beliebigen Geraden seiner Ebene angehören, bilden eine Involution von Punkten, deren Gebilde gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem diese Gerade den Kegelschnitt in keinem oder in zwei Punkten schneidet, und deren Hauptpunkte im letzteren Falle die Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kegelschnittes sind.** Und... (wie links)

2) **Zwei Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks schneiden eine jede Gerade, deren harmonischer Pol auf der dritten Seite liegt, in zwei zugeordneten harmonischen Polen.**

2) **Zwei Ecken eines einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks haben mit einem jeden Punkte, dessen harmonische Polare durch die dritte Ecke geht, zwei zugeordnete harmonische Polaren gemein.**

Nach §. 1. f ist das Rechteck $\mathfrak{am}\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}$ unter den Abständen zweier zugeordneter harmonischer Pole $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ vom Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ der Involution, so wie das Product $\text{tng}\, am\,.\,\text{tng}\,.\,a_1m$ der Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete harmonische Polaren a, a_1 mit einer Achse m bilden, constant, und zwar jenes, wenn die betreffende Gerade den Kegelschnitt schneidet, dem Quadrate der halben auf ihr enthaltenen Sehne, dieses, wenn der betreffende Punkt ausserhalb des Kegelschnittes liegt, der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels gleich, welche die von ihm ausgehenden

Tangenten einschliessen. Findet diese Lage aber nicht statt, so kann offenbar statt der Sehne der eben so grosse Abstand derjenigen zwei zugeordneten harmonischen Pole, welche gleich weit vom Mittelpunkte m entfernt sind, und statt des Tangentenwinkels der eben so grosse Winkel eintreten, welchen die beiden gegen die Achse *m* gleichgeneigten zugeordneten harmonischen Polaren einschliessen. Jener Abstand soll daher eine ideale Sehne, und dieser Winkel ein idealer Tangentenwinkel des Kegelschnittes heissen.

3) Das Product der Tangenten der Winkel, welche zwei beliebige zugeordnete harmonische Polaren, für einen bestimmten Punkt, mit einer Achse der Involution einschliessen, ist von unveränderlichem Werthe, und zwar der zweiten Potenz der Tangente des halben reellen oder idealen Tangentenwinkels gleich, welcher zu jenem Punkte gehört.

3) Das Rechteck unter den Abständen zweier beliebiger zugeordneter harmonischer Pole, für eine bestimmte Gerade, vom Mittelpunkte der Involution ist von unveränderlichem Inhalt, und zwar dem Quadrate der halben reellen oder idealen Sehne gleich, welche zu dieser Geraden gehört.

Endlich überzeugt man sich leicht, dass:

4) die spitzen Winkel, welche die einzelnen Paare einer Involution zugeordneter harmonischer Polaren einschliessen, von 0° bis 90° oder von der Grösse des idealen Tangentenwinkels bis 90° wachsen, je nachdem der betreffende Punkt ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes liegt.

4) die Abstände der einzelnen Paare einer Involution zugeordneter harmonischer Pole von einander von Null bis ins Unendliche oder von der Grösse der idealen Sehne bis ins Unendliche wachsen, je nachdem die betreffende Gerade den Kegelschnitt schneidet oder nicht.

Ganz ungesucht bieten sich nunmehr folgende Fragen dar:

1) Gibt es in der Ebene eines beliebigen Kegelschnittes zwei oder mehrere Involutionen zugeordneter harmonischer Pole oder Polaren, welche bezüglich den Mittelpunkt oder eine Achse gemein haben?

2) Welche Eigenschaften haben die einzelnen Paare derjenigen Involution zugeordneter harmonischer Polaren oder Pole gemein, welche einem solchen Mittelpunkte oder einer solchen Achse angehören?

3) Gibt es in der Ebene eines beliebigen Kegelschnittes ungleichliegend involutorisch-gleiche Strahlbüschel, und involutorisch-gleiche Gerade, welche von zugeordneten harmonischen Polaren oder Polen gebildet werden?

4) Gibt es in derselben Involutionen der rechten Winkel, deren Schenkel zugeordnete harmonische Polaren sind?

1) Denkt man sich in der Ebene eines Kegelschnittes eine Gerade in beliebiger Richtung ins Unendliche hinausgerückt, so sind alle Gerade, welche durch ihren harmonischen Pol gehen, die harmonischen Polaren von Punkten, welche in den verschiedenen Richtungen der Ebene unendlich-entfernt liegen, also muss eine jede derselben sämmtliche nach dem entsprechenden unendlich-entfernten Punkte gerichteten parallelen Geraden in den Mittelpunkten der ihnen angehörigen Involutionen zugeordneter harmonischer Pole und insbesondere zwei parallele Tangenten in den Berührungspunkten treffen. Demnach ist der harmonische Pol dieser unendlich-entfernten Geraden Mittelpunkt sämmtlicher Involutionen zugeordneter harmonischer Pole, welche den unzähligen durch ihn gehenden Geraden angehören, und somit auch der Mittelpunkt sämmtlicher reellen oder idealen Sehnen des Kegelschnittes, welche auf diesen Geraden liegen. Er wird deshalb der Mittelpunkt des Kegelschnittes genannt, und zwar besitzt jeder Kegelschnitt nur einen solchen Punkt, weil eine Involution von Punkten nicht zwei Mittelpunkte enthalten kann, und daher gibt es in seiner Ebene auch nur eine unendlich-entfernte Gerade.

Da die letztere mit der Hyperbel zwei, mit der Ellipse keinen und mit der Parabel nur einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt, gemein hat, so liegt der Mittelpunkt der ersten ausserhalb, der zweiten innerhalb, der dritten unendlich-entfernt auf dem Umfange der Curve.

Jede reelle oder ideale Sehne eines Kegelschnittes, die durch seinen Mittelpunkt geht, heisst sowohl der Richtung als der Grösse nach ein Durchmesser desselben. Die Hyperbel hat also reelle und ideale, die Ellipse und die Parabel nur reelle, und zwar die letztere lauter parallele Durchmesser. Je zwei zugeordnete harmonische Polaren, welche durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen, heissen zwei zugeordnete Durchmesser, die Achsen der Involution dieser letzteren heissen die Achsen des Kegelschnittes, und die Hauptstrahlen derselben die Asymptoten der Hyperbel. — Bei dieser ist jedem idealen Durchmesser ein reeller zugeordnet, und umgekehrt. Bei der Ellipse kann man den Winkel, welchen die gegen jede Achse gleichgeneigten zugeordneten Durchmesser bilden, und welcher der kleinste unter allen ist, den idealen Asymptotenwinkel nennen.

Betrachtet man irgend einen Punkt einer Achse des Kegelschnittes als Mittelpunkt einer Involution zugeordneter harmonischer Polaren, so läuft der der Achse zugeordnete Strahl mit der anderen Achse des Kegelschnittes parallel, steht also auf der ersteren senkrecht. Jede dieser beiden Achsen ist also die gemeinschaftliche Achse aller dieser Involutionen, und hat analoge Eigenschaften als der Mittelpunkt des Kegelschnittes. Je zwei zugeordnete harmonische Pole, welche auf einer Achse des Kegelschnittes liegen, sollen zwei zugeordnete Achsenpunkte, und die reellen oder idealen Tangentenwinkel, deren Scheitel sie sind, zwei zugeordnete Achsenpunktwinkel heissen. Von diesen Punkten und Winkeln ist, meines Wissens, noch nirgends wo gehandelt worden. Endlich heissen die

Hauptpunkte der von den zugeordneten Achsenpunkten gebildeten Involution oder, in ihrer Ermangelung, die beiden vom Mittelpunkte des Kegelschnittes gleich weit entfernten zugeordneten Achsenpunkte die Scheitel des Kegelschnittes. Die Hyperbel hat zwei reelle und zwei ideale, die Ellipse zwei Paar reelle, die Parabel zwei reelle aber einen unendlich-entfernten Scheitel.

2) Ich übergehe mehrere längst bekannte Sätze, welche fast nur Wiederholungen der allgemeineren 1), 3) und 4) sein würden, um sofort einige metrische Relationen zu entwickeln, deren Interesse besonders darin besteht, dass in ihnen das Princip der Dualität sich erhält.

Es sei M der Mittelpunkt einer Ellipse oder Hyperbel, $\mathfrak{m}$ ein reeller Scheitel derselben und A die Tangente in $\mathfrak{m}$, welche mit der anderen Achse parallel und daher auf $M\mathfrak{m}$ senkrecht sein muss. Es seien a, a_1 zwei beliebige zugeordnete Durchmesser, welche die A in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und zwei mit a_1, a parallele Linien, die durch $\mathfrak{m}$ gehen, in α, α_1 schneiden. Dies vorausgesetzt, so sind sowohl $\mathfrak{a}$, α als $\mathfrak{a}_1$, α_1 zwei zugeordnete harmonische Pole, indem z. B. die harmonische Polare von $\mathfrak{a}$ sowohl durch $\mathfrak{m}$ als den harmonischen Pol von a gehen, also mit a_1 parallel sein muss; folglich sind die Rechtecke $M\mathfrak{a} . M\alpha$, $M\mathfrak{a}_1 . M\alpha_1$ den Quadraten der halben Durchmesserlängen a, a_1 gleich. Nun ist aber

$$M\mathfrak{a} : M\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1$$

und

$$M\mathfrak{a}_1 : M\alpha_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{m}\mathfrak{a},$$

also

$$M\mathfrak{a} . M\alpha = M\mathfrak{a}^2 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}; \; M\mathfrak{a}_1 . M\alpha_1 = M\mathfrak{a}_1{}^2 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1},$$

und nach dem pythagorischen Satze ist

$$M\mathfrak{a}^2 = M\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^2; \; M\mathfrak{a}_1{}^2 = M\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1{}^2;$$

also

$$M\mathfrak{a} . M\alpha \pm M\mathfrak{a}_1 . M\alpha_1 = (M\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^2)\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} \pm (M\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1{}^2)\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}$$

$$= M\mathfrak{m}^2 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1 \pm \mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} \pm \mathfrak{m}\mathfrak{a} . \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1 \pm \mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = M\mathfrak{m}^2 \pm \mathfrak{m}\mathfrak{a} . \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1,$$

wo die oberen Zeichen für die Ellipse, die unteren für die Hyperbel gelten, weil dort die Involution der zugeordneten Durchmesser gleichliegende, hier ungleichliegende Gebilde enthält, also dort die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ auf verschiedenen, hier auf einerlei Seite von $\mathfrak{m}$ liegen müssen, und zwar gehört hier dem idealen Durchmesser der grössere $\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1$ von beiden Abschnitten $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1$ an.

Aber $\mathfrak{m}$ ist der Mittelpunkt einer Involution von Punkten, welche auf A durch den zugeordneten Durchmesser bestimmt werden; also ist das Rechteck $\mathfrak{m}\mathfrak{a} . \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1$, folglich auch die Summe oder Differenz $M\mathfrak{a} . M\alpha \pm M\mathfrak{a}_1 . M\alpha_1$ constant.

Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende Weise: Es seien O, O_1 die Endpunkte eines beliebigen reellen Durch-

messers, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ die Endpunkte einer reellen Achse, durch O sei eine Tangente gelegt, welche diese Achse in $\mathfrak{a}_1$ schneide, und von O eine Senkrechte $O\mathfrak{a}$ auf die Achse gefällt, deren Fusspunkt $\mathfrak{a}$ sei; ausserdem seien die Geraden $O\mathfrak{m}$, $O\mathfrak{m}_1$, $O_1\mathfrak{m}$ und durch M eine Parallele mit $O\mathfrak{a}_1$, d. h. der dem OO_1 zugeordnete Durchmesser gezogen, welcher von $O\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{c}$, von $O_1\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{c}_1$, von $O\mathfrak{m}_1$ in $\mathfrak{d}$ geschnitten werde. Endlich werde die andere Achse von $O\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{b}$, von $O\mathfrak{m}_1$ in $\mathfrak{b}_1$ geschnitten.

Da die Seite OO_1 des Dreiecks $OO_1\mathfrak{m}$ durch den harmonischen Pol der Geraden $M\mathfrak{c}$, und die Seite $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ des Dreiecks $O\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ durch den harmonischen Pol der Geraden $M\mathfrak{b}$ geht, so sind (nach 2) links) sowohl $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ als $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ zug. harm. Pole, also das Rechteck $M\mathfrak{c}\,.\,M\mathfrak{c}_1$ dem Quadrate des halben Durchmessers, der dem OO_1 zugeordnet ist, und das Rechteck $M\mathfrak{b}\,.\,M\mathfrak{b}_1$ dem Quadrate der halben anderen Achse gleich. Es sei diese halbe Achse $= B$, so wie $M\mathfrak{m} = M\mathfrak{m}_1 = A$; ferner $MO = A_1$, $M\mathfrak{c}\,.\,M\mathfrak{c}_1 = B_1{}^2$.

Der Punkt $\mathfrak{a}_1$ ist der harmonische Pol der Senkrechten $O\mathfrak{a}$, also $M\mathfrak{a}\,.\,M\mathfrak{a}_1 = M\mathfrak{m}^2 = A^2$; und aus den Proportionen

$$M\mathfrak{d} : O\mathfrak{a}_1 = M\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1; \qquad O\mathfrak{a} : M\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 : M\mathfrak{m}_1;$$
$$M\mathfrak{c} : O\mathfrak{a}_1 = M\mathfrak{m} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{m}; \qquad O\mathfrak{a} : M\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{m} : M\mathfrak{m}$$

ergibt sich

$$M\mathfrak{d}\,.\,M\mathfrak{c} \text{ oder } M\mathfrak{c}\,.\,M\mathfrak{c}_1 = B_1{}^2 = \frac{O\mathfrak{a}_1{}^2\,.\,A^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1}. \qquad O\mathfrak{a}^2 = \frac{M\mathfrak{b}\,.\,M\mathfrak{b}_1\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1}{A^2} = \frac{B^2}{A^2}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1.$$

Aber

$$O\mathfrak{a}_1{}^2 = O\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2 \text{ und } MO^2 = A_1{}^2 = O\mathfrak{a}^2 + M\mathfrak{a}^2;$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 = (A - M\mathfrak{a})(A + M\mathfrak{a}) = A^2 - M\mathfrak{a}^2 = M\mathfrak{a}\,.\,M\mathfrak{a}_1 - M\mathfrak{a}^2 = M\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1.$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1 = (M\mathfrak{a}_1 - A)(M\mathfrak{a}_1 + A) = M\mathfrak{a}_1{}^2 - A^2 = M\mathfrak{a}_1{}^2 - M\mathfrak{a}\,.\,M\mathfrak{a}_1 = M\mathfrak{a}_1\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1.$$

Demnach ist

$$A_1{}^2 = \frac{B^2}{A^2}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 + M\mathfrak{a}^2 = B^2\,.\,\frac{M\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{M\mathfrak{a}\,.\,M\mathfrak{a}_1} + M\mathfrak{a}^2$$
$$= \frac{B^2\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 + M\mathfrak{a}^2\,.\,M\mathfrak{a}_1}{M\mathfrak{a}_1} = \frac{B^2\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 + A^2\,.\,M\mathfrak{a}}{M\mathfrak{a}_1};$$

$$B_1{}^2 = \frac{A^2\,.\,O\mathfrak{a}^2 + A^2\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1} = \frac{B^2\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 + A^2\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1}$$
$$= \frac{B^2\,.\,M\mathfrak{a} + A^2\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{M\mathfrak{a}_1};$$

also

$$A_1{}^2 \pm B_1{}^2 = \frac{A^2(M\mathfrak{a} \pm \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1) \pm B^2(M\mathfrak{a} \pm \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)}{M\mathfrak{a}_1} = A^2 \pm B^2,$$

indem bei der Ellipse, wo $\mathfrak{a}$ zwischen M und $\mathfrak{a}_1$ fällt, die oberen, bei der Hyperbel, wo $\mathfrak{a}_1$ zwischen M und $\mathfrak{a}$ fällt, die unteren Zeichen zu nehmen sind.

Gehen wir jetzt zur Figur des ersten Beweises zurück, so ist

$$A_1{}^2 . B_1{}^2 = M\mathfrak{a}^2 . M\mathfrak{a}_1{}^2 \frac{\mathfrak{ma} . \mathfrak{ma}_1}{\mathfrak{aa}_1{}^2} = M\mathfrak{a}^2 . M\mathfrak{a}_1{}^2 . \frac{B^2}{\mathfrak{aa}_1{}^2},$$

weil dort

$$M\mathfrak{a} . M\alpha \pm M\mathfrak{a}_1 . M\alpha_1 = A_1{}^2 \pm B_1{}^2 = A^2 \pm \mathfrak{ma} . \mathfrak{ma}_1$$

war; also ist

$$A_1 . B_1 = M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1 . \frac{B}{\mathfrak{aa}_1}, \text{ oder } A_1 . B_1 : M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1 = B : \mathfrak{aa}_1.$$

Ist aber P der Inhalt des Parallelogramms, welches durch die Endpunkte zweier reellen oder idealen zugeordneten Durchmesser bestimmt wird, so verhält sich:

$$P : 4M\mathfrak{aa}_1 = A_1 . B_1 : M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1, \text{ also, da } M\mathfrak{aa}_1 = \tfrac{1}{2}M\mathfrak{m} . \mathfrak{aa}_1 \text{ ist,}$$
$$P : 2A . \mathfrak{aa}_1 = B : \mathfrak{aa}_1, \text{ folglich } P = 2A . B.$$

Nennen wir α den von A_1, B_1 eingeschlossenen Winkel, so ist $P = 2A_1 . B_1 . \sin\alpha = 2A . B$, also $(A_1 + B_1)^2 = A^2 + B^2 + \frac{2A . B}{\sin\alpha}$, d. h. für die Ellipse ist $A_1 + B_1$, und für die Ellipse und Hyperbel ist $A_1 . B_1$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem α ein Minimum oder Maximum ist; und da für erstere

$$(A_1 + B_1)^2 + (A_1 - B_1)^2 = 2(A^2 + B^2),$$

für die letztere

$$(A_1 + B_1)(A_1 - B_1) = A^2 - B^2,$$

so ist für beide $A_1 - B_1$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $A_1 + B_1$ ein Minimum oder Maximum ist.

Seien andererseits $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ zwei beliebige zugeordn. Achsenpunkte, welche *a*) entweder einer von zwei reellen, oder *b*) einer idealen Achse angehören; durch $\mathfrak{a}_1$, den äusseren Punkt in beiden Fällen, seien zwei Tangenten gezogen, und ausserdem die beiden Tangenten in den Scheiteln $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ der anderen Achse, deren eine von jenen beiden in $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}$, die andere in $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{q}_1$ geschnitten werde. Die Tangente $\mathfrak{nn}_1$ berühre den Kegelschnitt in $\mathfrak{r}$ und schneide die andere Achse in $\mathfrak{f}$. Man ziehe noch die Geraden $\mathfrak{nq}_1$, $\mathfrak{n}_1\mathfrak{q}_1$; $\mathfrak{ra}$, welche auf $\mathfrak{aa}_1$ senkrecht stehen und dieselbe in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}$ schneiden.

Da die harmonische Polare des Punktes $\mathfrak{a}$ durch die Ecke $\mathfrak{a}_1$ des dem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks $\mathfrak{a}_1\mathfrak{nq}$ geht, so sind (nach 2) rechts) die Geraden $\mathfrak{an}$, $\mathfrak{aq}$ zwei zugeordnete harmonische Polaren. Ist also Winkel $\mathfrak{na}_1\mathfrak{b} = \alpha$, und $\text{tng} . \mathfrak{nab} . \text{tng} . \mathfrak{qab}_1 = \text{tng}^2 . \alpha$, so sind α, α_1 die Hälften zweier zugeordneten Achsenpunktwinkel.

Da die Punkte $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}_1$ harmonisch sind, so sind es auch

die Punkte M (der Mittelpunkt des Kegelschnitts), b, a, b_1; aber $a_1 b = a_1 b_1$, also auch $a_1 M . a_1 a = a_1 b^2 = a_1 b_1{}^2$. Demnach ist

$$\operatorname{tng}^2 \alpha_1 = \frac{nb^2}{a_1 b^2} = \frac{Mm^2}{a_1 M . aa_1} = \frac{A^2}{a_1 M . aa_1},$$

$$\operatorname{tng}^2 \alpha = \frac{nb}{ab} . \frac{a_1 b_1}{ab_1} = \frac{A^2}{ab . ab_1};$$

aber

$$ab . ab_1 = (a_1 b - aa_1)(a_1 b_1 + aa_1) = a_1 b^2 - aa_1{}^2 = a_1 M . aa_1 - aa_1{}^2$$
$$= aa_1 . aM;$$

also

$$\operatorname{tng}^2 \alpha = \frac{A^2}{aM . aa_1} \text{ und } \operatorname{tng}^2 \alpha \pm \operatorname{tng}^2 \alpha_1 = \frac{A^2}{aa_1} . \frac{a_1 M \pm aM}{a_1 M . aM}.$$

Im Fall einer idealen Achse ist $a_1 M + aM = aa_1$, und im Fall zweier reellen ist $a_1 M - aM = aa_1$; und da $Ma . Ma_1 =$ dem Quadrate dieser halben Achse $= B^2$, so ist $\operatorname{tng}^2 \alpha \pm \operatorname{tng}^2 \alpha_1 = \frac{A^2}{B^2}$.

Ferner ist

$$\operatorname{tng}^2 \alpha . \operatorname{tng}^2 \alpha_1 = \frac{A^2}{aM . aa_1} . \frac{A^2}{a_1 M . aa_1} = \frac{A^2 . A^2}{B^2 . aa_1{}^2},$$

also

$$\operatorname{tng} \alpha . \operatorname{tng} \alpha_1 = \frac{A^2}{B . aa_1}.$$

Endlich im Falle b), wenn a, a_1 auf der reellen Achse einer **Hyperbel** liegen, seien m, m_1 die Scheitel dieser Achse, A, A_1 die Tangenten in m, m_1, und von dem äusseren Punkte a seien zwei Tangenten gezogen, welche den Kegelschnitt in r, s berühren und die A, A_1 in n, q; n_1, q_1 schneiden. Zieht man jetzt die Geraden $a_1 n$, $a_1 q$, so müssen dieselben (nach 2) rechts) zug. harmonische Polaren sein, und eben deshalb muss $a_1 n$ durch q_1 und $a_1 q$ durch n_1 gehen. Die Winkel $naq = 2\alpha$ und $na_1 q = 2\alpha_1$ sind zugeordnete Achsenpunktwinkel und man hat

$$\operatorname{tng}^2 \alpha = \frac{nm}{am} . \frac{n_1 m_1}{am_1}, \quad \operatorname{tng}^2 \alpha_1 = \frac{nm}{a_1 m} . \frac{n_1 m_1}{a_1 m_1}.$$

Aber

$$am . am_1 = (Mm - ma)(Mm + Ma) = A^2 - Ma^2$$
$$= Ma . Ma_1 - Ma^2 = Ma . aa_1,$$
$$a_1 m . a_1 m_1 = (Ma_1 - Mm)(Ma_1 + Mm) = Ma_1{}^2 - A^2$$
$$= Ma_1{}^2 - Ma . Ma_1 = Ma_1 . aa_1.$$

Also ist

$$\operatorname{tng}^2 \alpha - \operatorname{tng}^2 \alpha_1 = \frac{nm . n_1 m_1}{Ma_1 . Ma} . \frac{Ma_1 - Ma}{aa_1} = \frac{nm . n_1 m_1}{A^2}.$$

Die Tangenten A, A_1 werden von allen übrigen projektivisch ge-

schnitten, und ihr Durchschnitt, dem die wechselseitigen Berührungspunkte entsprechen, ist hier unendlich entfernt; also sind m, m_1 ihre Durchschnitte der Parallelstrahlen, und es ist folglich das Rechteck $nm . n_1m_1$ constant (Einleit. 11, *b*). Das nämliche gilt also auch von der Differenz $tng^2\alpha - tng^2\alpha_1$, und da, wenn a mit *M* zusammenfällt und zur idealen Achse gerechnet wird, die Tangente des Complementes von $\alpha = \frac{A}{B}$, also $tng\,\alpha = \frac{B}{A}$, weil $\alpha_1 = 0$, so ist $nm . n_1m_1$ oder das Quadrat des halben Segmentes, das die Asymptoten auf jeder Scheiteltangente abschneiden, $= B^2$, und $tng^2\alpha - tng^2\alpha_1 = \frac{B^2}{A^2}$.

Im Falle der Parabel ist $am = a_1m$, also $tng\,\alpha = tng\,\alpha_1$.

5. In jeder Ellipse ist die Summe der Quadrate zweier beliebigen zugeordneten Durchmesser der Summe der Quadrate beider Achsen, und in jeder Hyperbel ist der Unterschied der Quadrate eines beliebigen reellen und des ihm zugeordneten idealen Durchmessers dem Unterschiede der Quadrate der reellen und der idealen Achse gleich.

5. In jedem Kegelschnitte ist die Summe oder Differenz der zweiten Potenzen der Tangenten zweier zugeordneten halben Achsenpunktwinkel der zweiten Potenz der Tangente des entsprechenden reellen oder Asymptotenwinkels gleich, und zwar die Summe, wenn die Achsenpunkte einer idealen Achse, die Differenz, wenn sie einer reellen Achse angehören, und es ist in diesem letzteren Falle bei der Ellipse der ideale, bei der Hyperbel der reelle Achsenpunktwinkel der grössere von beiden.

6. In jeder Ellipse oder Hyperbel verhalten sich die Rechtecke unter je zwei zugeordneten Durchmessern umgekehrt wie die Sinus der von ihnen eingeschlossenen Winkel.

6. In jedem Kegelschnitte verhalten sich die Producte der Tangenten je zweier zugeordneten halben Achsenpunktwinkel umgekehrt wie die Abstände ihrer Scheitel von einander.

7. In jeder Ellipse oder Hyperbel sind alle durch die Endpunkte oder Richtungen der zugeordneten Durchmesser bestimmten eingeschriebenen oder umschriebenen Parallelogramme einander und den durch die Achsen bestimmten Parallelogrammen gleich.

8. In jeder Ellipse ist die Summe zweier zugeordneter Durchmesser um so grösser, und ihr Unterschied um so kleiner, je kleiner der Winkel ist, den sie ein-

8. Die Summe zweier zugeordneten Achsenpunktwinkel, deren Scheitel auf der idealen Achse einer Hyperbel liegen, ist um so grösser, und ihr Unter-

schliessen; daher bilden die idealen Asymptoten die grösste Summe und sind einander gleich, und die beiden Achsen bilden die kleinste Summe, und die eine ist der grösste, die andere der kleinste aller Durchmesser.

schied um so kleiner, je kleiner der Abstand ihrer Scheitel von einander ist; daher bilden diejenigen, deren Scheitel die idealen Scheitel des Kegelschnittes sind, die grösste Summe und sind einander gleich, und der entsprechende Asymptotenwinkel, welcher der grösste unter allen ist, bildet mit dem ihm zugeordneten Achsenpunktwinkel, welcher gleich Null ist, die kleinste Summe.

3) Gehen wir noch einmal zur Figur des ersten Beweises der vorigen Sätze (links) zurück; doch sei jetzt $M\mathfrak{m}$ ein Durchmesser, dessen zugeordneter den Nebenwinkel von aa_1 hälftet, so ist $M\mathfrak{a} = M\mathfrak{a}_1$ und $M\alpha_1 = \mathfrak{m}\alpha = \mathfrak{a}\alpha$, also

$$M\mathfrak{a} \, . \, M\alpha \pm M\mathfrak{a}_1 \, . \, M\alpha_1 = M\mathfrak{a} \, . \, M\alpha \pm M\mathfrak{a} \, . \, \mathfrak{a}\alpha = M\mathfrak{a}(M\alpha \pm \mathfrak{a}\alpha)$$
$$= M\mathfrak{a}^2 = A^2 \pm B^2.$$

Wiederholt man diese Betrachtung in Ansehung der übrigen drei, von a, a_1 gebildeten Winkel, so erhält man ein dem Kegelschnitte umschriebenes Rechteck, dessen Diagonalen die constante Grösse $2M\mathfrak{a}$ haben; also darf man schliessen:

9. Die Scheitel aller rechten Winkel, welche einer Ellipse oder Hyperbel umschrieben sind, liegen auf dem Umfange eines mit dem Kegelschnitte concentrischen Kreises, und je zwei Sehnen dieses Kreises, welche durch die Schenkel dieser rechten Winkel bestimmt werden, haben die Länge zweier zugeordneten Durchmesser der Ellipse.

Da nun zwei involutorische Strahlbüschel ungleichliegend involutorisch-gleich sind, wenn ihre Hauptstrahlen rechte Winkel bilden, und da zwei involutorische Gerade involutorisch-gleich sind, wenn einer ihrer Hauptpunkte unendlich-entfernt ist, so folgt:

10. In der Ebene einer jeden Ellipse oder Hyperbel liegen die Mittelpunkte aller ungleichliegend involutorisch-gleichen Strahlbüschel, welche von zugeordneten harmonischen Polaren gebildet werden, auf dem Umfange eines mit dem Kegelschnitte concentrischen Kreises, dessen Durchmesser die Diagonale des von den Achsen gebildeten Rechtecks ist.

10. Die Ellipse besitzt in ihrer ganzen Ebene keine Gerade, deren zugeordnete harmonische Pole involutorisch-gleiche Gerade bilden; dagegen hat in der Ebene der Hyperbel jede mit den Asymptoten parallele Gerade, und in der Ebene der Parabel jeder Durchmesser diese Eigenschaft.

Bei der gleichseitigèn Hyperbel, welche rechtwinklige Asymptoten hat, schwindet der Kreis (links) in den Mittelpunkt der Curve zusammen, und bei der Parabel, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, artet er in eine Gerade aus.

4) Wenn es einen Punkt F gibt, dessen Strahlen als zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt, eine Involution der rechten Winkel bilden, so muss derselbe, da eine solche Involution gleichliegende Gebilde enthält, innerhalb des Kegelschnittes liegen; und er muss zu einer Achse gehören, weil sonst eine mit der Achse parallele Gerade auf der ihr zugeordneten harmonischen Polare nicht senkrecht stehen könnte.

a) Man denke sich von dem fraglichen Punkte F nach den Berührungspunkten zweier beliebigen Tangenten die Stralen p, q, nach dem Durchschnitte beider Tangenten den Strahl a und ausserdem die dem a zugeordnete, auf ihm senkrechte harmonische Polare a_1 gezogen, so geht die Berührungssehne dieser Tangenten, als harmonische Polare eines auf a liegenden Punktes, durch den auf a_1 liegenden harmonischen Pol von a, schneidet also die vier Strahlen a, p, a_1, q in vier harmonischen Punkten, und da nun diese Strahlen selber harmonisch sind und a zu a_1 rechtwinklig ist, so hälften die Strahlen a, a_1 die von p, q eingeschlossenen Winkel und Nebenwinkel.

b) Es seien sofort A, A_1 zwei feste, und A_2 eine beliebige dritte Tangente, aus F seien nach ihren Berührungspunkten die Strahlen p, q, r, und nach den Durchschnitten von A_2 mit A, A_1 die Strahlen a, a_1 gezogen, so ist

$$\mathfrak{W}.\ ap = \mathfrak{W}.\ ar$$

$$\mathfrak{W}.\ a_1q = \mathfrak{W}.\ a_1r;\ \text{also}$$

$$\mathfrak{W}.\ ap \pm \mathfrak{W}.\ a_1q = \mathfrak{W}.\ ar \pm \mathfrak{W}.\ a_1r = \mathfrak{W}.\ aa_1,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem r zwischen oder ausserhalb p. q liegt. Es ist aber $\mathfrak{W}.\ pq = \mathfrak{W}.\ aa_1 + \mathfrak{W}.\ ap \pm \mathfrak{W}.\ a_1q = 2\ \mathfrak{W}.\ aa_1$; also ist $\mathfrak{W}.\ aa_1$ von unveränderlicher Grösse.

c) Insbesondere seien jetzt A, A_1 die Tangenten in den Scheiteln einer reellen Achse, welche den Punkt F enthalten würde — denn auf einer idealen, deren sämmtliche Punkte ausserhalb des Kegelschnittes liegen, kann F nicht sein — so ist jetzt der so eben mit pq bezeichnete Winkel $= 2R$, also der Winkel aa_1 für eine beliebige dritte Tangente $A_2 = R$. Beschreibt man also über dem von A, A_1 interceptirten Segmente der A_2, als Durchmesser, einen Kreis, so schneidet er, wo möglich, die Achse in zwei Punkten, deren jeder ein solcher Punkt F ist.

In der That, da die harmonische Polare des Punktes F nach dem unendlich entfernten Durchschnitte von A, A_1 gehen muss, welche mit A_2 ein dem Kegelschnitte umschriebenes Dreieck bilden, so sind die rechtwinkligen Strahlen a, a_1, welche F mit den beiden anderen Ecken dieses Dreiecks verbinden, zugeordnete harmonische Polaren; und da bereits die Achse und der in F auf ihr senkrechte Strahl ein anderes Paar dieser Art bilden, so müssen (nach §. 2, *c*.) alle Paare zugeordneter harmonischer Polaren,

welche durch diesen so bestimmten Punkt F gehen, zu einander rechtwinklig sein.

Sind m, m_1 die Berührungspunkte von A, A_1 und a, a_1 ihre Durchschnitte mit A_2, so sind die Dreiecke Fma und Fm_1a_1 ähnlich, also $Fm : ma = m_1a_1 : Fm_1$ und $Fm . Fm_1 = ma . ma_1$, aber $ma . ma_1$ ist constant und dem Quadrate der halben anderen Achse gleich, also findet man auch die beiden Punkte F, F_1, wenn man bei der Ellipse die eine Achse selber, bei der Hyperbel deren Verlängerungen so theilt, dass jene Bedingung erfüllt wird. Zugleich folgt hieraus, dass nur die grosse Achse der Ellipse solche Punkte F, F_1 enthält.

Für die Parabel findet man den Punkt F, indem man, wenn A die vorhandene Scheiteltangente ist, in a auf A_2 eine Senkrechte errichtet, welche die Achse in F schneidet. Denn die dieser Senkrechten zugeordnete harmonische Polare für F ist mit A_2 parallel u. s. w.

d) Noch einfacher und direkt überzeugt man sich von der Existenz des Punktes F mittels des ihm zugeordneten Achsenpunktes. Denn setzt man in der Relation $\text{tng}^2\alpha - \text{tng}^2\alpha_1 = \frac{B^2}{A^2}$ den Winkel α für die Ellipse und α_1 für die Hyperbel $= \frac{1}{2}R$, so ist bezüglich $\text{tang}^2\alpha_1 = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$ und $\text{tng}^2\alpha = \frac{A^2 + B^2}{A^2}$, und für die Parabel $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}R$. Also ist der Punkt F allemal auf einer reellen Achse vorhanden, welche grösser als die andere ist; und man erhält hiermit zugleich eine neue Construction von F, welche darauf hinausläuft, an den Kegelschnitt eine Tangente von gegebener Richtung zu legen.

Jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes, dessen sämmtliche Paare zugeordneter harmonischer Polaren zu einander rechtwinklig sind, heisst ein Brennpunkt des Kegelschnittes, jeder Strahl desselben eine **Zuglinie** und jeder Winkel, dessen Scheitel er ist und dessen Schenkel nach den Durchschnitten zweier Tangenten A, A_1 mit einer beliebigen dritten gehen, der zu A, A_1 gehörige **Zugwinkel** dieses Brennpunktes.

11. **Ein jeder Kegelschnitt hat zwei Brennpunkte, welche bei der Ellipse auf der grossen Achse, und bei der Hyperbel auf den Verlängerungen der reellen Achse liegen und dieselbe in je zwei Segmente theilen, deren Rechteck dem Quadrate der halben kleinen oder idealen Achse gleich ist.**

12. **Gehen von einem Brennpunkte nach den Berührungspunkten irgend zweier Tangenten zwei Strahlen, so wird der von ihnen eingeschlossene Winkel durch den nach dem Durchschnitte der Tangenten gehenden Strahl gehälftet.**

13. **Der zu zwei festen Tangenten gehörige Zugwinkel ist von unveränderlicher Grösse und zwar dem halben Winkel gleich, welchen die nach den Berührungspunkten gehenden Zuglinien einschliessen.**

14. **Der zu zwei Tangenten gehörige Zugwinkel, deren Berührungssehne eine Zuglinie ist oder deren**

Durchschnitt auf der harmonischen Polare des Brennpunktes liegt, ist ein rechter.

Geht im Falle der Parabel die veränderliche Tangente A_2 in die unendlich entfernte Tangente über, so werden die Zuglinien $F\mathfrak{a}$, $F\mathfrak{a}_1$ den Tangenten A, A_1 parallel, so dass $\mathfrak{W}.\ \mathfrak{a}F\mathfrak{a}_1$ dem von A, A_1 gebildeten und zwar von der Parabel abgewendeten Winkel gleich wird:

15. **Die Durchschnittspunkte dreier beliebiger Tangenten einer Parabel liegen auf dem Umfange eines Kreises, welcher durch den Brennpunkt geht.**

Ist S der Durchschnitt der Tangenten A, A_1 einer Parabel, so ist kraft des vorigen Satzes auch noch $\mathfrak{W}.\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 F = \mathfrak{W}.\ \mathfrak{a}SF$; variirt man also die Tangenten A und A_2, so folgt:

16. **Die Fusspunkte aller Zuglinien, welche mit den verschiedenen Tangenten einer Parabel einerlei Winkel bilden, liegen auf einer und derselben Tangente, und zwar auf der Tangente im Scheitel, wenn dieser Winkel ein rechter ist.**

Es sei jetzt $\mathfrak{m}$ der Berührungspunkt einer beliebigen Tangente eines Kegelschnittes, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ seien die Durchschnitte derselben mit der grossen oder reellen Achse, welche die beiden Brennpunkte F, F_1 enthält, und mit der Tangente in dem einen ihrer Scheitel; man ziehe die Zuglinien $F\mathfrak{m}$, $F\mathfrak{b}$, $F_1\mathfrak{m}$, $F_1\mathfrak{b}$; so ist (nach 12) sowohl $\mathfrak{W}.\ \mathfrak{m}F\mathfrak{b} = \mathfrak{W}.\ \mathfrak{a}F\mathfrak{b}$, als $\mathfrak{W}.\ \mathfrak{m}F_1\mathfrak{b} = \mathfrak{W}.\ \mathfrak{a}F_1\mathfrak{b}$, also hat man nach einem bekannten Elementarsatze die Proportionen:

$$F\mathfrak{m} : F\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{m} : \mathfrak{b}\mathfrak{a};\quad F_1\mathfrak{m} : F_1\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{m} : \mathfrak{b}\mathfrak{a},$$

folglich ist $F\mathfrak{m} : F\mathfrak{a} = F_1\mathfrak{m} : F_1\mathfrak{a}$, woraus durch Umkehrung des gedachten Satzes sich ergiebt, dass der $\mathfrak{W}.\ F\mathfrak{m}F_1$ bei der Hyperbel, und sein Nebenwinkel bei der Ellipse durch die Tangente in $\mathfrak{m}$ gehälftet wird.

17. **Gehen nach einem Punkte auf dem Umfange eines Kegelschnittes von beiden Brennpunkten desselben zwei Zuglinien, so wird der von ihnen eingeschlossene Winkel oder Nebenwinkel durch die Tangente in jenem Punkte gehälftet.**

Sind $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die Berührungspunkte zweier beliebigen Tangenten eines Kegelschnittes und $\mathfrak{r}$ ihr Durchschnitt, und zieht man die Zuglinien $F\mathfrak{m}$, $F\mathfrak{n}$, $F\mathfrak{r}$, $F_1\mathfrak{m}$, $F_1\mathfrak{n}$, $F_1\mathfrak{r}$, und sind $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ zwei beliebige Punkte auf den Verlängerungen von $\mathfrak{r}\mathfrak{m}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{n}$, so hat man folgende Winkelbeziehungen:

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} = \mathfrak{s}\mathfrak{m}F - \mathfrak{s}\mathfrak{r}F$$
$$\mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = \mathfrak{s}\mathfrak{m}F_1 - \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1\text{; also}$$

a) für die Ellipse:

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} + \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}\mathfrak{m}F + \mathfrak{s}\mathfrak{m}F_1) - (\mathfrak{s}\mathfrak{r}F + \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1)$$

und eben so

$$\mathfrak{n}F\mathfrak{r} + \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F + \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F_1) - (\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F + \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1).$$

Aber nach 17. ist

$$\mathfrak{s}\mathfrak{m}F + \mathfrak{s}\mathfrak{m}F_1 = 2R = \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F + \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F_1,$$

und zugleich ist

$$\mathfrak{s}\mathfrak{r}F + \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 + 2 \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{r}F,$$

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F + \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 + 2 \,.\, \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1 \text{; also hat man}$$

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} + \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = 2R - (F\mathfrak{r}F_1 + 2 \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{r}F),$$

$$\mathfrak{n}F\mathfrak{r} + \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r} = 2R - (F\mathfrak{r}F_1 + 2 \,.\, \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1).$$

b) Für die Hyperbel ist

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} - \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}\mathfrak{m}F - \mathfrak{s}\mathfrak{m}F_1) - (\mathfrak{s}\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1),$$

$$\mathfrak{n}F\mathfrak{r} - \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F - \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F_1) - (\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1);$$

aber

$$\mathfrak{s}\mathfrak{m}F = \mathfrak{s}\mathfrak{m}F_1, \ \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F = \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F_1$$

und

$$\mathfrak{s}\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 - 2 \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{r}F,$$

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 - 2 \,.\, \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1 \text{; also hat man}$$

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} - \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = F\mathfrak{r}F_1 - 2 \,.\, \mathfrak{s}\mathfrak{r}F,$$

$$\mathfrak{n}F\mathfrak{r} - \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r} = F\mathfrak{r}F_1 - 2 \,.\, \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1.$$

c) Endlich ist (nach 12) für die Ellipse

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} = \mathfrak{n}F\mathfrak{r}, \ \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r};$$

und für die Hyperbel

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} = 2R - \mathfrak{n}F\mathfrak{r}, \ \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = 2R - \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r};$$

also zunächst für beide

$$\mathfrak{s}\mathfrak{r}F = \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1$$

und deshalb für die Ellipse

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} + \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F\mathfrak{n} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F_1\mathfrak{n} = 2R - \mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{n},$$

für die Hyperbel

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} - \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F\mathfrak{n} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F_1\mathfrak{n} = \mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{n}.$$

18. **Die Zuglinien, welche den Durchschnitt zweier Tangenten mit den beiden Brennpunkten verbinden, bilden mit diesen Tangenten gleiche Winkel.**

19. **In der Ellipse oder Hyperbel ist bezüglich die Summe oder Differenz der zu zwei festen Tangenten gehörigen Zugwinkel beider Brennpunkte dem einen von diesen Tangenten eingeschlossenen Winkel gleich.**

Ich schliesse diesen §. mit der Entwickelung einiger Eigenschaften der Brennpunkte, von denen die sogenannte Geometrie der Grösse oft die übrigen Eigenschaften der Kegelschnitte überhaupt herleitet, und um derentwillen, wie es scheint, Herr Poncelet zur Theorie der doppelten Berührung seine Zuflucht nimmt.

Eine beliebige Tangente berühre einen Kegelschnitt in $\mathfrak{q}$ und schneide eine Haupt-Scheiteltangente in $\mathfrak{a}$; von $\mathfrak{a}$ sei auf die Zuglinie $F\mathfrak{q}$ oder $F_1\mathfrak{q}$ eine Senkrechte $\mathfrak{am}$, gefällt, deren Fusspunkt

$\mathfrak{m}_1$, und es sei $\mathfrak{m}$ der Scheitel des Kegelschnittes, von dem geredet wird: so ist (nach 12)

$$\mathfrak{W}.\,\mathfrak{m}F\mathfrak{q} = \mathfrak{W}.\,\mathfrak{m}_1 F\mathfrak{a},\ \mathfrak{W}.\,\mathfrak{a}\mathfrak{m}F = \mathfrak{W}.\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1 F,\ \mathfrak{a}F = \mathfrak{a}_1 F,$$

also

$$F\mathfrak{m} = F\mathfrak{m}_1.$$

20. **Zieht man von einem beliebigen Punkte der Tangente im Scheitel der grossen oder reellen Achse eines Kegelschnittes die zweite Tangente an denselben, und fällt auf die Zuglinie, welche den Berührungspunkt der letzteren mit einem Brennpunkte verbindet, von jenem Punkte eine Senkrechte, so liegen die Fusspunkte aller dieser Senkrechten auf dem Umfange eines Kreises, der jenen Brennpunkt zum Mittelpunkt und die Entfernung desselben von jenem Scheitel zum Halbmesser hat, und zwar gibt es vier solche, paarweise concentrische Kreise.**

Aehnliche Sätze gelten unter Modificationen von den beiden anderen Scheiteltangenten, ja von vier beliebigen festen Tangenten.

Es werde in der vorigen Figur die Tangente $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ von der harmonischen Polare des Brennpunktes F in Z geschnitten; von $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}$ seien auf dieselbe Polare die Senkrechten $\mathfrak{q}q$, $\mathfrak{a}a$ gefällt, deren Fusspunkte q, a sind, und Z mit F verbunden, so verhält sich

$$\mathfrak{q}q : \mathfrak{a}a = Z\mathfrak{q} : Z\mathfrak{a} = F\mathfrak{q} : F\mathfrak{m}_1,$$

indem $F\mathfrak{q}$ und FZ zugeordnete harmonische Polaren, also rechtwinklig zu einander sind; und da nun $\mathfrak{q}q : F\mathfrak{q} = \mathfrak{a}a : F\mathfrak{m}_1$, aber $\mathfrak{a}a$ und $F\mathfrak{m}_1$ constant sind, so ist auch das Verhältniss $\mathfrak{q}q : F\mathfrak{q}$ für alle Punkte $\mathfrak{q}$ constant. Bei der Parabel ist $\mathfrak{a}a = F\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{q}q = F\mathfrak{q}$. und im allgemeinen Falle, wenn $\mathfrak{n}$ der Gegenscheitel von $\mathfrak{m}$, und wenn $\mathfrak{f}$ der zugeordnete Achsenpunkt von F ist, hat man:

$$\mathfrak{a}a : F\mathfrak{m} = \mathfrak{f}\mathfrak{m} : F\mathfrak{m} = \mathfrak{f}\mathfrak{n} : F\mathfrak{n} = \mathfrak{f}\mathfrak{n} - \mathfrak{f}\mathfrak{m} : F\mathfrak{n} - F\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathfrak{n} : FF_1,$$

d. h. dem Verhältniss der grossen oder reellen Achse zur **Excentricität** gleich.

21. **Das Verhältniss der Abstände eines beliebigen Punktes auf dem Umfange eines Kegelschnittes von einem seiner Brennpunkte und von der harmonischen Polare des letzteren ist constant, und zwar im Falle der Ellipse und Hyperbel dem der Excentricität zur grossen oder reellen Achse, und im Falle der Parabel dem der Einheit gleich.**

Verlängert man die mit $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ Parallele $\mathfrak{q}q$ über $\mathfrak{q}$ hinaus, bis sie die harmonische Polare des zweiten Brennpunktes F_1 in q_1 schneidet, und ist $\mathfrak{f}_1$ der zugeordnete Achsenpunkt von F_1, M der Mittelpunkt des Kegelschnittes, so ist für die Ellipse

$$\mathfrak{q}q + \mathfrak{q}q_1 = qq_1 = \mathfrak{f}\mathfrak{f}_1 = 2M\mathfrak{f},$$

und für die Hyperbel

$$\mathfrak{q}q - \mathfrak{q}q_1 = qq_1 = \mathfrak{f}\mathfrak{f}_1 = 2M\mathfrak{f},$$

und für beide

$$\mathfrak{F}\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{q} = F_1\mathfrak{q} : q_1\mathfrak{q} = FF_1 : \mathfrak{mn},$$

also auch für die erstere

$$F\mathfrak{q} + F_1\mathfrak{q} : q\mathfrak{q} + q_1\mathfrak{q} = F\mathfrak{q} + F_1\mathfrak{q} : 2M\mathfrak{f} = FF_1 : \mathfrak{mn},$$

und für die letztere

$$F\mathfrak{q} - F_1\mathfrak{q} : q\mathfrak{q} - q_1\mathfrak{q} = F\mathfrak{q} - F_1\mathfrak{q} : 2M\mathfrak{f} = FF_1 : \mathfrak{mn}.$$

Aber es ist $M\mathfrak{m}^2 = MF . M\mathfrak{f}$, also $M\mathfrak{m} : M\mathfrak{f} = MF : M\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{mn} : 2M\mathfrak{f} = FF_1 : \mathfrak{mn}$. Folglich ist bezüglich $F\mathfrak{q} \pm F_1\mathfrak{q} = \mathfrak{mn}$.

22. **In jeder Ellipse ist die Summe und in jeder Hyperbel ist der Unterschied der Abstände der beiden Brennpunkte von einem beliebigen Punkte des Umfanges bezüglich der grossen oder der reellen Achse gleich**

Dieser Satz ergiebt sich übrigens sehr leicht auch aus dem 17ten Satze.

Verlängert man $F_1\mathfrak{q}$ über $\mathfrak{q}$ hinaus und fällt von F auf die Tangente in $\mathfrak{q}$ eine Senkrechte, welche sie in $\mathfrak{a}$ und die $F_1\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{f}$ schneidet, so ist $\mathfrak{W}.\ F\mathfrak{q}\mathfrak{a} = \mathfrak{W}.\ \mathfrak{f}\mathfrak{q}\mathfrak{a}$ (17), also $F\mathfrak{a} = \mathfrak{f}\mathfrak{a}$, und da auch $MF = MF_1$, so ist die Gerade $M\mathfrak{a}$ parallel $F_1\mathfrak{f}$, also $FF_1 : FM = F_1\mathfrak{f} : M\mathfrak{a} = 2 : 1$, und da $F_1\mathfrak{f} = F_1\mathfrak{q} \pm F\mathfrak{q} = \mathfrak{mn}$, so ist $M\mathfrak{a} = M\mathfrak{m}$.

23. **Die Fusspunkte aller Senkrechten, welche aus den Brennpunkten auf die Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel gefällt werden, liegen auf dem Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser die grosse oder reelle Achse des Kegelschnittes ist.**

(Wird fortgesetzt.)

XXXI.

Ueber die Transformation der Figuren in andere derselben Gattung.

Von

Herrn Professor C. T. Anger

zu Danzig.

Die allgemeinste Lösung des Problems: Figuren in andere derselben Gattung zu transformiren, wird, wie es scheint, durch die Perspective, und zwar, wo es sich um die Transformation körperlicher Gebilde handelt, durch die Basrelief-Perspective geboten, ja wir werden uns sogar überzeugen, dass diese, auf gewisse Weise specialisirt, auch geeignet ist, für ebene Figuren eine allgemeine Transformation darzubieten. Wir beginnen mit einer hierher gehörigen Aufgabe, welche Newton im ersten Buche der Principia, Lemma XXII, vorträgt, von der sich zeigen lässt, dass sie ein besonderer Fall der Perspective ist. Da eine genaue Einsicht in das Wesen der Newtonschen Methode wünschenswerth ist, so mag eine Uebersetzung jener Auflösung der folgenden Betrachtung hier vorangehen.

Figuren in andere Figuren derselben Gattung umzuwandeln.

Es sei (Taf. V. Fig. 1.) irgend eine Figur HGI umzuwandeln. Man ziehe beliebig die beiden parallelen Geraden AO, BL, welche irgend eine dritte, ihrer Lage nach gegebene AB in A und B schneiden, und von irgend einem Punkte G der Figur nach der Geraden AB eine Gerade GD parallel mit OA. Ferner ziehe man von einem beliebigen in der Linie OA gegebenen Punkte O nach dem Punkte D die Gerade OD, welche die BL in d trifft, und vom Durchschnittspunkte die Gerade dg, welche einen beliebigen gegebenen Winkel mit der Geraden BL bildet, und zu Od dasselbe Verhältniss hat, wie DG zu OD; dann wird g in der neuen Figur bgi ein Punkt sein, welcher dem Punkte G entspricht. Auf dieselbe Weise werden die einzelnen Punkte der ersten Figur eben so viele Punkte der neuen Figur geben. Nimmt man daher an, dass der Punkt G mit stetiger Bewegung alle Punkte der ersten Figur durchlaufe, so wird der Punkt g mit ebenfalls stetiger Bewegung alle Punkte der neuen Figur durchlaufen, und dieselbe beschreiben. Der Unterscheidung wegen heisse DG die erste und dg die neue Ordinate; AD die erste und ad die neue Abscisse;

O der Pol, *OD* der Schneidestrahl (radius abscindens), *OA* der erste Ordinatenstrahl und *Oa* (durch welche das Parallelogramm *OABa* vollendet wird) der neue Ordinatenstrahl.

Ich behaupte nun, dass wenn den Punkt *G* eine ihrer Lage nach gegebene Gerade trifft, auch der Punkt *g* durch eine ihrer Lage nach gegebene Gerade getroffen wird. Wenn der Punkt *G* durch einen Kegelschnitt getroffen wird, so findet dasselbe auch im Punkte *g* Statt. Der Kreis wird hier den Kegelschnitten zugezählt. Wenn ferner den Punkt *G* eine Linie der dritten Ordnung trifft, so ist dasselbe auch im Punkte *g* der Fall, und eben so bei den Linien der höhern Ordnungen. Die beiden Linien, welche die Punkte *G* und *g* treffen, werden immer von einer und derselben Ordnung sein. Wie sich nämlich *ad* zu *OA* verhält, so verhält sich *Od* zu *OD*, *dg* zu *DG* und *AB* zu *AD*; demnach ist *AD* gleich $\frac{OA \times AB}{ad}$ und *DG* gleich $\frac{OA \times dg}{ad}$. Wenn nun den Punkt *G* eine Gerade trifft, und daher in irgend einer Gleichung, welche die Relation zwischen der Abscisse *AD* und der Ordinate *DG* ausdrückt, jene Unbestimmten *AD* und *DG* nur bis zu einer Dimension aufsteigen, so wird, indem man in dieser Gleichung $\frac{OA \times AB}{ad}$ für *AD* und $\frac{OA \times dg}{ad}$ für *DG* schreibt, eine neue Gleichung entstehen, in welcher die neue Abscisse *ad* und die neue Ordinate *dg* nur eine Dimension erreichen, also eine Gleichung, welche eine gerade Linie ausdrückt. Wenn aber *AD* und *DG* (oder eine von beiden) in der ersten Gleichung auf die zweite Dimension steigen, so werden auch *ad* und *dg* in der neuen Gleichung dieselbe Dimension erreichen. Dasselbe gilt von drei und mehrern Dimensionen. Die Unbestimmten *ad* und *dg* in der zweiten Gleichung, und *AD* und *DG* in der ersten, erreichen immer dieselbe Anzahl von Dimensionen, weshalb auch die Linien, welche durch die Punkte *G* und *g* gehen, von einer und derselben Ordnung sind.

Ich behaupte ferner, dass wenn irgend eine Gerade die krumme Linie in der ersten Figur berührt, diese Gerade, auf dieselbe Weise mit der krummen Linie in die neue Figur übertragen, jene krumme Linie in der neuen Figur berühren wird, und umgekehrt. Wenn nämlich zwei Punkte einer krummen Linie sich gegenseitig nähern, und in der ersten Figur mit einander zusammenfallen, so werden auch dieselben Punkte, wenn sie übertragen sind, sich einander nähern, und in der neuen Figur zusammenfallen, weshalb denn auch die Geraden, welche diese Punkte verbinden, zugleich Tangenten der krummen Linien in beiden Figuren sein werden. Es liessen sich für diese Behauptungen auch Beweise mehr nach geometrischer Art geben, ich will mich aber kurz ausdrücken.

Wenn also eine geradlinige Figur in eine andere umzuwandeln ist, so reicht es hin, die Durchschnittspunkte der Geraden, durch welche sie gebildet wird, zu übertragen, und dieselbe in der neuen Figur durch Gerade zu verbinden. Wenn aber eine krummlinige Figur umgewandelt werden soll, so sind die Punkte, Tangenten und andere gerade Linien, durch welche die krumme Linie bestimmt wird, zu übertragen. Dieses Lemma dient zur Auflösung sehr schwieriger Aufgaben, indem man dadurch gegebene Figuren in einfachere umwandelt. Denn irgend welche zusammentreffende

Gerade werden in parallele Gerade umgewandelt, indem man für den ersten Ordinatenstrahl eine beliebige, durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden gehende Gerade annimmt: und zwar deshalb, weil jenes Zusammentreffen unter dieser Annahme ins Unendliche fällt, Linien aber, welche nach einem unendlich entfernten Punkte ihre Richtung haben, mit einander parallel sind. Die Aufgabe wird alsdann in der neuen Figur gelöst, wenn man durch die umgekehrten Operationen diese Figur in die erste umwandelt.

Dieses Lemma ist auch nützlich bei der Auflösung körperlicher Aufgaben. So oft nämlich zwei Kegelschnitte vorkommen, durch deren Durchschnitt die Aufgabe gelöst werden kann, so lässt sich eine von ihnen, sie sei nun Hyperbel oder Parabel, in eine Ellipse, und darauf diese Ellipse leicht in einen Kreis umwandeln. Eben so lassen sich eine Gerade und ein Kegelschnitt, bei Aufgaben der ebenen Geometrie, in eine Gerade und einen Kreis umwandeln.

Diese Methode Newton's für die Umwandelung von Figuren in andere derselben Gattung ist eine Anwendung der gewöhnlichen Perspective. Denkt man sich nämlich die ebene Figur HGI um AI als Achse gedreht, so dass ihre Ebene mit der des Papiers einen gewissen Winkel bildet, so kommt auch BH aus der Ebene des Papiers heraus und tritt in den Raum ein. Nimmt man nun die Ebene, in welcher AI und BH alsdann liegen, als Bildfläche (Projectionsebene), den Punkt O aber als das Auge an, so ist klar, dass, da die Geraden BI und Ba mit dem Punkte O in einer Ebene liegen, die perspectivischen Projectionen aller Punkte der Geraden BI in die Linie Ba fallen müssen, also z. B. d die perspectivische Projection von D ist. Es sind aber alle Geraden wie GD, welche mit Ba parallel in der Ebene des Papiers liegen, nach erfolgter Drehung, noch parallel mit der als Bildfläche angenommenen Ebene, und müssen daher in der perspectivischen Projection ebenfalls als parallele Gerade erscheinen, auch muss wegen Aehnlichkeit der Dreiecke sich DG zu ihrer perspectivischen Projection wie DO zu dO verhalten. Der Winkel, welchen die perspectivische Projection von GD mit da bildet, ist endlich offenbar gleich dem constanten Winkel, um welchen GD gedreht wurde, nämlich gleich dem Winkel, welchen das GD in der Ebene des Papiers und das GD im Raume mit einander bilden. Denkt man sich nun die Bildfläche um Ba gedreht, bis sie in die Ebene des Papiers fällt, so erhält man die Newton'sche Figur, mittelst welcher die im Raume anzustellenden Operationen in der Ebene ausgeführt werden. — Was die Eigenschaften eines perspectivischen Bildes in Beziehung auf die projicirte Figur betrifft, so lassen sich diese im Allgemeinen am einfachsten erkennen, wenn man die geometrische Operation analytisch auffasst. Bezeichnet man nämlich die rechtwinkligen Coordinaten eines zu projicirenden Punktes durch x, y und z, die des Auges durch X, Y, Z, und nimmt man, der Einfachheit wegen, die Bildfläche der Coordinaten-Ebene der xz parallel an, so dass ihre Gleichung $y = \alpha$ wird, durch welche Annahme die mathematische Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, so erhält man, wenn x', y', z' die Coordinaten des perspectivischen Bildes bedeuten:

$$x' = \frac{(\alpha - Y)x + Xy - \alpha X}{y - Y},$$

$$y' = \alpha,$$

$$z' = \frac{(\alpha - Y)z + Zy - \alpha Z}{y - Y},$$

welche Ausdrücke in Beziehung auf x, y und z nur von der ersten Dimension sind. Daraus geht aber hervor, dass die Projection einer Curve von keinem höheren Grade als diese selbst sein kann, auch ergiebt sich aus diesen Ausdrücken, dass, wenn irgend eine Gerade die zu projicirende Curve berührt, auch in der Projection eine Berührung Statt findet u. s. w.

Chasles sagt von der obigen Methode Newton's in seiner Geschichte der Geometrie unter dem Artikel Newton: *) „Dieser ausgezeichnete Geometer gab eine sehr einfache geometrische Construction und einen eben so einfachen analytischen Ausdruck für die transformirten Figuren, ohne jedoch den Weg erkennen zu lassen, auf welchem er zu dieser Transformationsart der Figuren gekommen war, und in diesem Umstande liegt vielleicht auch der Grund, weshalb sie seit jener Zeit wenig bearbeitet ist; denn der Geist hat immer einige Bedenklichkeit und einigen Widerwillen gegen das, was zwar die augenscheinliche Gewissheit für sich hat, wobei man aber Nichts findet, wodurch das eigentliche Verhältniss der Sache erklärt und dargethan wird. Wir haben uns sorgfältig bemüht, diese Methode mit der des De La Hire zu vergleichen, um die Unterschiede aufzusuchen, welche sie characterisiren und vielleicht der einen vor der andern einen Vorzug geben könnten, indem wir dadurch den Faden aufzufinden hofften, an welchem Newton geleitet wurde; und wir haben dabei erkannt, dass seine Figuren keine andern als die des De La Hire waren, nur in einer andern gegenseitigen Lage, und dass man sie auch durch die Perspective erlangen kann, wenn man sie hernach in eine und dieselbe Ebene legt, nur in anderer Weise, als es De La Hire gethan hat. Diese Art ist es wahrscheinlich, auf welche Newton seine Methode erdacht hat.“ Chasles deutet darauf in Note XIX. die Ableitung an. Wenn der berühmte Geometer in dem Umstande, dass Newton für seine Transformation der Figuren keinen Beweis gegeben hat, den Grund zu finden glaubt, weshalb sie wenig bearbeitet worden sei, so erregt dies Befremden. Wie viele mathematische Wahrheiten sind und werden nicht noch heute bloss als Sätze hingestellt, deren Beweis dem Leser überlassen bleibt! — Nicht Widerwille gegen solche Sätze stellt sich ein, sondern diese Form der Mittheilung ist für den Leser gerade anregend, indem er genöthigt wird, in das Wesen der Sache selbstständig einzudringen. Ungleich wahrscheinlicher ist wohl der Grund einer Nichtbeachtung der Newton'schen Transformation der, dass diejenigen Mathematiker, welche sich mit solchen geometrischen Betrachtungen beschäftigten, in jenem, der mathematischen Physik gewidmeten Werke des unsterblichen Newton dergleichen nicht suchten.

Was die Methode des De La Hire für die Transformation der Figuren betrifft, so werde ich zeigen, dass sie als ein ganz spe-

*) Sohncke's Uebersetzung S. 132.

cieller Fall der Basrelief-Perspective zu betrachten ist, welche letztere in der That die allgemeinste Quelle verschiedener in der neuern Geometrie gebräuchlichen Methoden zu sein scheint. Da die gewöhnliche Perspective, welche in diesem Theile der Geometrie mit so glücklichem Erfolge angewandt wird, nur ein besonderer Theil oder vielmehr ein specieller Fall der Basrelief-Perspective ist, so geht schon daraus die grosse Allgemeinheit dieser hervor. Ich habe im Jahre 1834 eine kleine Schrift unter dem Titel: „Analytische Darstellung der Basrelief-Perspective" herausgegeben, in welcher ich die von Breysig in seinem „Versuch einer Erläuterung der Reliefsperspective, Magdeburg bei Keil 1798" zur Construction der Basreliefs gegebenen Regeln in die analytische Sprache übertragen und darauf fernere Untersuchungen gegründet habe. Dieses Werk von Breysig war mir längst bekannt, als ich Herrn Poncelet's „Traité des proprietés projectives des figures, Paris 1822" kennen lernte. Ich überzeugte mich bald, dass die Methode zur Construction der Basreliefs, welche der berühmte Verfasser in dem Supplément jenes classischen Werkes mittheilt, mit den von Breysig gegebenen Vorschriften, wenn gleich nur im Wesentlichen, vollkommen übereinstimmt, während die Darstellung, wie sich erwarten lässt, verschieden ist. Ich nahm darauf Gelegenheit, Herrn Professor C. G. J. Jacobi die Mittheilung zu machen, dass die Methode des Herrn Poncelet schon früher von Breysig erfunden sei, und derselbe hatte die grosse Güte, bei seiner ersten Anwesenheit in Paris, 1829, Herrn Poncelet davon mündlich in Kenntniss zu setzen, welcher letztere denn auch im Jahre 1832 die Priorität der Erfindung Breysig's öffentlich anerkannte, indem er in seiner Abhandlung: „Analyse des transversales", welche im Crelleschen Journal, Band VIII, enthalten ist, S. 397 sich wörtlich wie folgt darüber ausspricht: „Je profiterai en même tems de cette occasion, pour prévenir qu'en rédigeant la matière des No. 584 et suivans du supplément du même ouvrage, concernant la perspective des bas-reliefs, j'ignorait complétement qu'il existât en Allemagne, sur cet objet, un écrit très bien fait ayant pour titre: Essai d'une théorie de la perspective des reliefs, disposée de manière à servir en même tems aux peintres, par J. A. Breysig, professeur des beaux arts à l'école royale et provinciale de Magdeburg, imprimé dans cette même ville, chez Georg Christian Keil (année 1798)."

„Ce petit ouvrage qui mériterait d'être traduit dans notre langue, forme un vol. in 8vo de 134 pages, accompagné de 11 planches, et qui contient, sur le tracé des bas-reliefs, des préceptes qui, pour le fond, se trouvent d'accord avec ceux que j'ai moi même établis à l'endroit cité. Je dois la connaissance de ce livre à l'amitié du célèbre Docteur Jacobi de Koenigsberg, qui, lors de son voyage en France dans l'année 1829, m'en toucha quelques mots, et daigna m'en adresser un exemplaire au commencement de l'année suivante, ce dont je le prie de vouloir bien agréer ici l'expression de ma vive et sincère reconnoissance."

Mit dieser Erklärung steht eine, ungefähr 11 Jahre spätere Erklärung des berühmten französischen Geometers, welche sich im Compte rendu des seances de l'academie des sciences, vom 8. Mai 1843, S. 952 befindet, im Widerspruche; sie lautet wörtlich so: „Voyez les endroits déjà cités du Supplément du Traité des

propriétés projectives, notamment ceux qui concernent la perspective ou projection centrale des reliefs, que nous avons généralement nommée homologie des figures. Je saisirai cette occasion pour présenter, au sujet de la théorie de la perspective des reliefs donnée dans ce même endroit, une remarque concernant la prétendue conformité qui existerait entre cette théorie et les méthodes pratiques exposées dans la Perspective des reliefs publiée à Magdebourg, en 1798, par J. A. Breysig, conformité que je me suis trop empressé de reconnaître dans une Note insérée à la page 397 du Tome VIII du Journal mathématique de M. Crelle (1832). Une traduction exacte de cet ouvrage diffus, entreprise à ma recommandation, par M. Polke, sous la direction de M. Bardin, ancien professeur aux Écoles d'artillerie, a convaincu cet estimable professeur que l'analogie des méthodes n'existe absolument que dans le titre. J'ai d'autant plus de regret d'avoir commis à mon préjudice cette erreur, qu'elle a été depuis reproduit dans l'Aperçu historique sur l'origine des méthodes en Géométrie, publié par M. Chasles, lequel, je dois le reconnaître, se trouvait, moins que moi, à même d'en constater l'existence."

Wir können nur bedauern, dass die Herren Polke und Bardin nicht tief genug in die beiden Methoden von Breysig und Poncelet eingedrungen sind, um sich zu überzeugen, dass dieselben in der That identisch sind. Die analytische Auffassung der Breysigschen Construction lässt dies leicht genug erkennen. Herr Poncelet hat sich nicht im Irrthume befunden, als er im Jahre 1832 die Uebereinstimmung beider Methoden anerkannte. — Da meine im Jahre 1834 erschienene analytische Darstellung nur in einer kleinen Auflage vorhanden war, und wahrscheinlich kein grosses Publicum gefunden hat, so erlaube ich mir eine Stelle daraus hier mitzutheilen.

Der Raum, in welchem das Bild (das Basrelief) dargestellt werden soll, ist zwar nach drei Dimensionen ausgedehnt, jedoch nach einer hin beschränkt; wir wollen ihn daher ansehen, als zwischen zwei parallelen unbegrenzten Ebenen enthalten. Ferner wird angenommen, dass man das Relief für einen bestimmten Gesichtspunkt, dessen rechtwinklige Coordinaten X, Y, Z sein mögen, construiren will. Diejenige von jenen beiden parallelen Ebenen, welche dem Auge am nächsten liegt, wollen wir die Bildfläche, die andere, aus einem sich später ergebenden Grunde, die Verschwindungsfläche nennen; der Kürze wegen seien diese Ebenen einer Coordinaten-Ebene parallel.

Alle in der Bildfläche befindliche abzubildende Punkte erleiden durch die Projection keine Ortsveränderung, indem hier Gegenstand und Bild zusammenfallen.

Der Raum in welchem das Basrelief dargestellt werden soll, ist durch die Bildfläche und die Verschwindungsfläche begrenzt, demnach werden alle in unendlicher Entfernung von der Bildfläche befindliche Punkte in der Verschwindungsfläche abzubilden sein; die Bilder aller endlich entfernten Punkte fallen in den zwischen jenen beiden Ebenen enthaltenen Raum.

Das basrelief-perspectivische Bild liegt in der geraden Linie, welche das Auge mit dem abzubildenden Punkte verbindet.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des zu projicirenden Punktes durch x, y, z, seiner basrelief-perspectivischen

Projection durch x', y', z', und nimmt man die Bildfläche und die Verschwindungsfläche der Coordinaten-Ebene der xz parallel an, so hat man, wenn $y=\alpha$, $y=\beta$ respective die Gleichungen jener Flächen sind, für die Coordinaten des gesuchten Basreliefs folgeude Ausdrücke:

$$x' = \frac{(\beta - Y)x + Xy - \alpha X}{\beta - \alpha - Y + y},$$

$$y' = \frac{\beta y - \alpha Y}{\beta - \alpha - Y + y},$$

$$z' = \frac{(\beta - Y)z + Zy - \alpha Z}{\beta - \alpha - Y + y};$$

und umgekehrt:

$$x = \frac{(\beta - \alpha)x' - Xy' + \alpha X}{\beta - y'},$$

$$y = \frac{(\beta - \alpha - X)y' + \alpha Y}{\beta - y'},$$

$$z = \frac{(\beta - \alpha)z' - Zy' + \alpha Z}{\beta - y'}.$$

Setzt man α unendlich gross, so ergiebt sich:

$$x' = x,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z;$$

d. h. das basrelief-perspectivische Bild hört in diesem Falle auf, ein solches zu sein, und wird mit dem abzubildenden Gegenstande identisch.

Aus jenen Gleichungen habe ich in der angeführten Schrift unter andern folgende Sätze abgeleitet:

„Die basrelief-perspectivischen Bilder aller parallelen Linien treffen in der Verschwindungsfläche in einem Punkte zusammen, und zwar da, wo eine aus dem Auge mit jener Linie parallel gezogene die Verschwindungsfläche trifft."

„Ein jedes System von geraden Linien im Raume, welche einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, kann als die basrelief-perspectivische Projection eben so vieler unter einander *paralleler* Linien betrachtet werden."

„Die Form der Gleichung lässt ohne Weiteres erkennen: dass die basrelief-perspectivische Projection einer Ebene wieder eine Ebene ist, und überhaupt, dass die basrelief-perspectivische Projection einer Oberfläche der $n$ten Ordnung eine Oberfläche derselben Ordnung ist, und dass, wenn zwei Linien oder Oberflächen einander berühren, auch ihre basrelief-perspectivische Projectionen einander berühren müssen."

„Die Projectionen aller parallelen Ebenen haben in

der Verschwindungsfläche eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.“

„Ein jedes System von Ebenen, welche eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, kann als die basrelief-perspectivische Projection eben so vieler unter einander parallelen Ebenen betrachtet werden.“

„Die Kugel ist für das Basrelief dasselbe, was der Kreis für das gewöhnliche perspectivische Bild auf einer Ebene ist. So wie nämlich die perspectivische Projection eines *Kreises* im Allgemeinen eine *Linie* der zweiten Ordnung ist, so ist die basrelief-perspectivische Projection einer *Kugel* eine *Oberfläche* der zweiten Ordnung u. s. w.

Von diesem letzten Satze habe ich sowohl in der angeführten, als in einer spätern, im Jahre 1836 erschienenen Schrift, welche den Titel: „Beiträge zur analytischen Basrelief-Perspective“ führt, auf die Oberflächen der zweiten Ordnung verschiedene Anwendungen gemacht.

Was die geometrische Construction des Basreliefs betrifft, aus welcher jene analytischen Ausdrücke abgeleitet sind, so ist sie in der Form vorgetragen, dass der Künstler, welcher ein solches Werk auszuführen beabsichtigen sollte, dazu vollständige Anleitung erhält, nämlich nach der in der beschreibenden Geometrie (mittelst des sogenannten Grund- und Aufrisses) üblichen Methode. Sie wird aus dem Folgenden deutlich hervorgehen:

Es sei (Taf. V. Fig. 2.) im Grundrisse A der zu projicirende Punkt, O das Auge, im Aufrisse A' und O'; TQ der Grundriss der Bildfläche, TP deren Aufriss und US und UR seien dasselbe für die Verschwindungsfläche.

Um den Grundriss des gesuchten basrelief-perspectivischen Bildes zu finden, ziehe man OA, in welcher er liegen muss, alsdann AB beliebig, OC mit ihr parallel, und BC, so ist der Punkt a, in welchem AO und BC einander schneiden, der gesuchte Grundriss. Für den Aufriss könnte man den Punkt a', wie die Figur zeigt, auf dieselbe Weise bestimmen, es ist aber einfacher, ihn aus dem Grundrisse auf die in der beschreibenden Geometrie gewöhnliche Weise zu übertragen, da man weiss, dass er in der Linie $A'O'$ vorkommen muss. Für die Praxis ist es einfacher AB senkrecht auf TQ zu ziehen.

Nach dieser Abschweifung kommen wir auf die Methode für die Erzeugung der Kegelschnitte in der Ebene durch den Kreis zurück, welche De La Hire in seiner Schrift: „Nouvelles methode en Géométrie, pour les sections des superficies coniques et cylindriques, 1673,“ und zwar im zweiten Theile, welcher den Titel führt: „Planiconiques“, angegeben hat. Es ist mir nicht gelungen, dieses Werk hier am Orte aufzutreiben, obgleich das grössere desselben Verfassers, die Sectiones conicae, 1685, in zwei Exemplaren hier vorhanden ist; ich beziehe mich daher auf die betreffenden Mittheilungen von Chasles in seiner Geschichte der neuern Geometrie.

Man denke sich in einer Ebene (Taf. V. Fig. 3.) zwei parallele Gerade RS, PQ und einen Punkt O. Durch einen beliebigen

Punkt a einer gegebenen zu transformirenden Curve ziehe man die Gerade Oa und eine beliebige Gerade BC, welche die PQ in B und die RS in C schneidet. Darauf ziehe man CO und durch B mit dieser eine Parallele, welche die Oa in A schneidet, so ist A der Punkt, welcher durch den Punkt a gebildet wird, d. h. der, dem Punkte a in der ersten Curve entsprechende der neuen. Die Curven selbst in der Figur zu ziehen, schien überflüssig. De La Hire nennt die Gerade RS die Directrix und PQ die Formatrix.

Um die Uebereinstimmung dieser Construction mit einem ganz speciellen Falle der Basrelief-Perspective einzusehen, überlege man, dass wenn ein Kreis basrelief-perspectivisch gezeichnet werden soll, dessen Ebene durch das Auge geht, die basrelief-perspectivische Projection desselben auch in diesem Falle ein Kegelschnitt werden müsse. Die Geraden, in welchen jene verlängerte Ebene des Kreises die beiden Ebenen, welche wir Bildfläche und Verschwindungsfläche nennen, schneidet, sind keine andern, als die Directrix RS und die Formatrix PQ, während bei De La Hire das Basrelief a als gegeben, und der zu projicirende Punkt A als der zu suchende Punkt erscheint, wodurch im Wesentlichen nichts geändert wird.

Die analytischen Ausdrücke, welche ich in meiner Schrift: „Beiträge zur analytischen Basreliefperspective. 1836“ für die Aufgabe: diejenige Kugel zu finden, von welcher eine gegebene Oberfläche der zweiten Ordnung die basrelief-perspectivische Projection ist, führen unmittelbar zur Auflösung der Aufgabe: denjenigen Kreis zu finden, von welchem eine gegebene Linie der zweiten Ordnung die basrelief-perspectivische Projection ist, indem man nur dort eine Coordinate, das z, gleich Null zu setzen hat. Setzt man nämlich das Auge in den Anfangspunkt der Coordinaten, und zieht mit der Axe der x zwei parallele Gerade, von denen die eine um a von jener Axe entfernt ist, und welche von einander um b abstehen, und ist die Gleichung des gesuchten Kreises

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

so handelt es sich nur um eine solche Bestimmung der Grössen a, b, α, β und r, dass die gegebene Linie der zweiten Ordnung als basrelief-perspectivische Projection jenes Kreises erscheine.

Wenn nun erstens eine Ellipse durch die Gleichung:

$$k^2x^2+g^2y^2=g^2k^2$$

gegeben ist, wo g die halbe grosse und k die halbe kleine Axe bedeuten, so findet sich (Taf. V. Fig. 4.) $b=k=UT$; $a=\frac{kg}{\sqrt{g^2-k^2}}=OT$; $\alpha=0$; $\beta=\frac{(g+k)(g-k)}{k}=OM$; $r=\frac{g}{k}\sqrt{g^2-k^2}=MN$.

Ist zweitens eine Hyperbel durch die Gleichung:

$$k^2x^2-g^2y^2=-g^2k^2$$

gegeben, so findet sich (Taf. V. Fig. 5.) $b=k=UT$; $a=\frac{kg}{\sqrt{g^2+k^2}}$

$= OT$; $\alpha = 0$; $\beta = -\frac{k^2 + g^2}{k} = OM$; $r = \frac{g\sqrt{g^2 + k^2}}{k} = MN$, wo das negative Zeichen von β leicht seine Erklärung findet.

Ist endlich **drittens** die gegebene Linie eine **Parabel**, deren Gleichung

$$x^2 = py,$$

so kann (Taf. V. Fig. 6.) $b = UT$ willkührlich angenommen werden, und man erhält $a = -p = OT$; $\alpha = 0$; $\beta = -\frac{b}{2} = OM$; $r = \frac{b}{2} = MN$.

Man sieht demnach, wie die Erzeugung der Kegelschnitte in der Ebene, mittelst eines Kreises, als eine specielle Aufgabe der Basrelief-Perspective hervorgeht.

Bei dem grossen Reichthum der neuern Geometrie scheint es nicht überflüssig, verwandte Methoden unter einen Gesichtspunkt zu bringen, welcher einen möglichst grossen Ueberblick gewährt. Möchte dieser Aufsatz als ein, wenn auch nur kleiner, Beitrag zu jener Aufgabe betrachtet werden dürfen!

XXXII.

In integrationem aequationis Derivatarum partialium superficiei, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario.

Auct.

Dr. E. G. Björling,

ad Acad. Upsaliens. Docens matheseos.

Prooemium.

Ineunte vix anno 1842 praecedente opusculum quoddam „Calculi Variationum Integralium duplicium exercitationes“ intitulatum typis Upsaliensibus exscribendum curaveram, in quo propositum (inter alia) mihi fuerat aequationem (formae finitae) su-

:rficiei minimae tali quâdam viâ consequi, ut arbitrarias quas cum fert functiones determinari unquam liceret. Scilicet, ut conat, Integrale aequationis derivatarum partialium superficiei illius — Cel. Monge primo (et quidem duobus modis) *) nec non a Cel. egendre **) inventum — arbitrarias continet duas functiones sinularum quantitatum (si vis) indeterminatarum, quas determinatis lum fieri potest) formis functionum eliminari ex systemate trium tegralis aequationum oportebit, quo optata proveniat relatio coornatarum x, y et z. At in eo ipso cardo rei vertitur, ut inveniar modus quidam determinandi functiones arbitrarias. Quem quiem antea non fuisse inventum, in caussâ (ut mihi videtur) ipsae int methodi Integralis deducendi adhibitae. — Contigit mihi ex ntentia rem gerere, ita ut posthaec liceat arbitrarias illas functioes in casu admodum generali determinari.

At praeterquam quod rem in genere, quae circa inveniendum)tiori quâdam viâ integrale hocce versatur, tractare conatus fueim, singularia aliquot genera „superficierum minimarum" examiare adgressus responsum tuli quaestioni, quaenam sint in numero uperficierum revolutionis earumque, quae rectâ ad plaum quoddam parallele motâ generantur, eae quibus continat idioma superficiei minimae; quam quidem rem comparatâ aequaone illâ derivatarum partialium superficiei minimae successive cum equationibus superficierum modo commemoratarum perduxi.

Nuper admodum ex ephemeride illâ „l'Institut", eâdem fere e re in Societate illa Parisiensi „Société Philomatique" (et uidem non solum priori sed hoc etiam ipso anno) agi coeptum tisse, cognovi. Scilicet, ut ex verbis infra citatis ***) apparet, l. Catalan et M. Wantzel suâ uterque viâ (alter priori alter oc ipso anno) responsum quaestioni, quaenam sit superficierum n genere rectâ generatarum ea cui contingat idioma superciei minimae, dederunt.

Quae cum ita sint, tempori me ut par est cedere duxi, si ex pere in primis lineis hujus prooemii citato ea, quae problema illud

---

*) Monge, Appl. de l'Anal. à la Géom. (Paris, 1809), pag. 192; Lacroix, Traité du Calc. Diff. et du Calc. Int. 2. édit. T. II. pag. 627.

**) Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences (Paris, 1789), pag. 313.

***) L'Institut, No. 448 (an. 1842). — Verba formalia haec sunt: „M. Catalan communique le résultat d'une recherche qu'il vient de faire „sur les surfaces minimum."…. „Le résultat de son travail peut „s'énoncer ainsi: De toutes les surfaces reglées l'héliçoïde „à plan directeur est la seule qui soit une surface minimum."

L'Institut, No. 479 (an. 1843). — „Il est donné communication „d'une note de Mr. Wantzel sur la surface dont l'aire est un mini„mum pour certains cas particuliers. Mr. Catalan a cherché la sur„face dont l'aire est un minimum pour le cas où cette surface devrait „être reglée."…. „Dans le cas traité par Catalan on combine „cette équation différentielle" (scil. aequationum derivatarum partialium superficiei minimae) „avec les équations de la droite variable que „la surface doit renfermer. On retrouve ainsi presque immédiatement „la surface heliçoïdale qu'il (Mr. Catalan) a obtenue par un calcul „assez long."…. „Pour les surfaces de revolution on combine l'équ. „aux diff. partielles de ces surfaces avec celle de la surface en question, „et le calcul s'achève sans difficulté."

superficiei minimae spectant, excerpta eademque retractata paullulum atque aucta prodire jam in celebritatem hominum Matheseos studiis eruditorum curarem.

Eorum, quae in sequentibus ex calculo Variationum (et quidem non nisi in notulis) citavi, demonstrationem — si placet — ex opere supra allato „Calculi Variationum Integralium etc.“ *) recognoscere licet.

Upsaliae, mense Jul. 1843.

---

1. Uti omnibus constat — p et q denotantibus partiales ipsius z derivatas 1^i ordinis resp. ad x et y (coordinatas independentes) atque r, s et t derivatas 2^i ordinis — aequatio, de quâ quaeritur, est:

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0 \;\ldots\; (1)$$

Nec minus constat **) simplicissimam, quam integrali illius (a Cel. Monge primum invento) reddi liceat, formam esse

$$(2)\;\ldots\;\begin{cases} x = a + b, \\ y = \varphi(a) + \chi(b), \\ z = \int da\sqrt{-1}\sqrt{1+\varphi'^2} + \int db\sqrt{-1}\sqrt{1+\chi'^2}, \end{cases}$$

quo ex systemate, determinatis demum φ et χ, eliminando indeterminatas a et b habebitur relatio ipsarum z, x et y. ***)

Attamen non tanti refert formam utique simplicissimam integralis expetere, quanti eandem — si fieri possit — tali quâdam viâ consequi, qua arbitrarias illas functiones determinari umquam liceat. Forsitan ea, quae sequuntur, ad hunc finem apta quodammodo dijudicabuntur.

2. Loco variabilium x et y aliae duae u et v independentes inferantur, nimirum

$$(3)\;\ldots\;\begin{cases} u = x + y\sqrt{-1}, \\ v = x - y\sqrt{-1}. \end{cases}$$

---

*) Paucorum, quae medio anno priori bibliopolae cuidam Lipsiae tradenda curabam, exemplarium fortasse aliquot usque supersunt.

**) Lacroix, Traité du Calc. Diff. et du Calc. Int. 2. édit. Paris. 1814. T. II. pag. 630.

***) In opere „Appl. de l'Anal. à la Géom.“ (Paris, 1809), p. 192, hâc formulâ idem exhibuit integrale:

$$\begin{cases} x = -\varphi'(a) + \psi'(b), \\ y = -\varphi + a\varphi' + \psi - b\psi', \\ z = \int \varphi''.\,da\sqrt{-1-a^2} + \int \psi''.\,db\sqrt{-1-b^2}, \end{cases}$$

quam utique eandem aliâ suâ viâ Cel. Legendre in Mém. sur l'intégr. de quelques équ. aux diff. partielles (Hist. de l'Acad. Roy. des sciences. An. 1787, Paris. 1789. p. 313.) invenit.

Solitis ex formulis *) partiales functionis z derivatas resp. ad x et y transformandi in derivatas resp. ad u et v heic erunt:

$$p = \frac{dz}{du} + \frac{dz}{dv},$$
$$-q\sqrt{-1} = \frac{dz}{du} - \frac{dz}{dv},$$

*) Quas tamen, ut in promtu sint, breviter heic attulisse juvabit. Scilicet positis

$$du = u' dx + u_1 dy,$$
$$dv = v' dx + v_1 dy,$$

erit

$$dz \left(= \frac{dz}{du} du + \frac{dz}{dv} dv\right) = \left[\frac{dz}{du} u' + \frac{dz}{dv} v'\right] dx + \left[\frac{dz}{du} u_1 + \frac{dz}{dv} v_1\right] dy,$$

ideoque

$$(a) \ldots \begin{cases} p = \dfrac{dz}{du} u' + \dfrac{dz}{dv} v', \\ q = \dfrac{dz}{du} u_1 + \dfrac{dz}{dv} v_1. \end{cases}$$

Tunc positis

$$du' = u'' dx + u'_1 dy,$$
$$du_1 = u'_1 dx + u_{,,} dy,$$
$$dv' = v'' dx + v'_1 dy,$$
$$dv_1 = v'_1 dx + v'' dy;$$

erit differentiatione prioris (a)

$$r = \frac{d\left(\frac{dz}{du}\right)}{dx} u' + \frac{d\left(\frac{dz}{dv}\right)}{dx} v' + \frac{dz}{du} u'' + \frac{dz}{dv} v'',$$

i. e. — quoniam aquationi huic (a) convenienter

$$\frac{d\left(\frac{dz}{du}\right)}{dx} = \frac{d^2z}{du^2} u' + \frac{d^2z}{dudv} v', \quad \frac{d\left(\frac{dz}{dv}\right)}{dx} = \frac{d^2z}{dudv} u' + \frac{d^2z}{dv^2} v',$$

$$r = \frac{d^2z}{du^2} u'^2 + 2\frac{d^2z}{dudv} u'v' + \frac{d^2z}{dv^2} v'^2 + \frac{dz}{du} u'' + \frac{dz}{dv} v''; \ldots (b)$$

consimilique ratione

$$s = \frac{d^2z}{du^2} u'u_1 + \frac{d^2z}{dudv}(u'v_1 + u_1v') + \frac{d^2z}{dv^2} v'v_1 + \frac{dz}{du} u'_1 + \frac{dz}{dv} v'_1, \ldots (c)$$

$$t = \frac{d^2z}{du^2} u_1^2 + 2\frac{d^2z}{dudv} u_1v_1 + \frac{d^2z}{dv^2} v_1^2 + \frac{dz}{du} U_{,,} + \frac{dz}{dv} V_{,,} \ldots \ldots (d)$$

$$r = \frac{d^2z}{du^2} + 2\frac{d^2z}{dudv} + \frac{d^2z}{dv^2},$$
$$-t = \frac{d^2z}{du^2} - 2\frac{d^2z}{dudv} + \frac{d^2z}{dv^2}.$$
$$-s\sqrt{-1} = \frac{d^2z}{du^2} - \frac{d^2z}{dv^2}.$$

Quibus impositis aequatio illa (1) abit in

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{du^2} - \left(1 + 2\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}\right)\frac{d^2z}{dudv} + \left(\frac{dz}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2} = 0,$$

seu breviter

$$q_1{}^2r_1 - (1 + 2p_1q_1)s_1 + p_1{}^2t_1 = 0. \ldots. (4)$$

Si heic p_1 et q_1 ipsae essent variabiles independentes, — quoniam tunc ista aequatio formae esset cognitae linearis $Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = M$, denotantibus $R, S, \ldots. M$ functiones solarum variabilium independentium —; transformari eam liceret in aliam formae illius

$$\frac{d^2z}{d\alpha d\beta} + \mathfrak{A}\frac{dz}{d\alpha} + \mathfrak{B}\frac{dz}{d\beta} + \mathfrak{C}z = \mathfrak{D} \ldots. (5)$$

($\mathfrak{A} \ldots. \mathfrak{D}$ denot. functiones solarum α et β), cujus in integrali formae finitae (siquidem inveniri tale liceat) functionum arbitrariarum altera α solam altera β solam, earumque autem modo alterutram sub signo $\int$, contineret. *) Et quidem tunc viâ, quam in dissertatione infra citatâ munivit Laplace, functiones istas arbitrarias determinari in casu admodum generali liceret.

---

*) Sufficit heic verba attulisse Illustr. Laplace sub finem (pag. 395) dissertationis Recherches sur le Calc. Int. aux Diff. partielles (Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences, An. 1773. Paris, 1777) sequentia: „..... on doit en conclure généralement, que toutes les fois que l'in„tégrale complète de l'équ.“ $Rr + Ss +$ etc. (vid. supra) „est possible „en termes finis, elle est nécessairement débarrassée du signe $\int$ par „rapport à l'une ou à l'autre des fonctions arbitr. $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$, et „dans ce cas on peut toujours obtenir cette intégrale par la méthode „de l'art. VII.“ — transformatione aequationis in formam $\frac{d^2z}{d\alpha d\beta} + \mathfrak{A}\frac{dz}{d\alpha} +$ etc. tum integratione hujus secundum methodum in art. illo VII praeced. expositam —; „on voit ainsi que cette méthode donne géné„ralement les intégrales complètes des équations linéaires aux diff. par„tielles, lorsqu'elles sont possibles en termes finis; ayant une fois ces „intégrales, il ne peut rester de difficulté que dans la détermination „des fonctions arbitraires; or la méthode de l'art. VII a encore l'avan„tage de donner un moyen très simple pour cet objet, dans un cas „très-général, et qui paraît être celui de presque tous les problèmes „physico-mathématiques.“

3. Quae cum ita sint, primo transformetur aequ. (4), ex methodo Cel. Legendre*), in aliam cujus variabiles independentes ipsae sint p_1 et q_1. Scilicet est

$$z = p_1 u + q_1 v - \int (u dp_1 + v dq_1)$$
$$= p_1 u + q_1 v - w, \ldots . (6)$$

positâ

$$dw = u dp_1 + v dq_1,$$

seu

$$u = \frac{dw}{dp_1},\ v = \frac{dw}{dq_1}, \ldots . (7)$$

(ideoque cognita erit z, si modo w innotuerit.)
Secundum locum cit. habebitur transformata haecce:

$$q_1{}^2 \frac{d^2w}{dq_1{}^2} + (1 + 2p_1 q_1) \frac{d^2w}{dp_1 dq_1} + p_1{}^2 \frac{d^2w}{dp_1{}^2} = 0 \ldots . \quad (8)$$

Quo facto jam istam, ut modo monuimus, transformari decet in aliam formae (5) et quidem formulis sub No. 2 allatis (b), (c), (d). Ponendo in iis

w, p_1 et q_1 loco z, x et y,
α et β loco u et v,
α', α_1, α'', α'_1, $\alpha_{,,}$ loco u', u_1, u'', u'_1, $u_{,,}$,
β', β_1, β'', β'_1, $\beta_{,,}$ loco v', v_1, v'', v'_1, $v_{,,}$,

[scil. α', α_1, α'', α'_1, $\alpha_{,,}$ denot. $\frac{d\alpha}{dp_1}$, $\frac{d\alpha}{dq_1}$, $\frac{d^2\alpha}{dp_1{}^2}$, $\frac{d^2\alpha}{dp_1 dq_1}$, $\frac{d^2\alpha}{dq_1{}^2}$,
atque β', β_1 etc. denot. $\frac{d\beta}{dp_1}$, $\frac{d\beta}{dq_1}$ etc.]

aequatio (8) primo abit in

$$[p_1{}^2\alpha'^2 + (1 + 2p_1 q_1)\alpha'\alpha_1 + q_1{}^2\alpha_1{}^2] \frac{d^2w}{d\alpha^2} +$$
$$+ [2p_1{}^2\alpha'\beta' + (1 + 2p_1 q_1)(\alpha'\beta_1 + \alpha_1\beta') + 2q_1{}^2\alpha_1\beta_1] \frac{d^2w}{d\alpha d\beta} +$$
$$+ [p_1{}^2\beta'^2 + (1 + 2p_1 q_1)\beta'\beta_1 + q_1{}^2\beta_1{}^2] \frac{d^2w}{d\beta^2} +$$
$$+ [p_1{}^2\alpha'' + (1 + 2p_1 q_1)\alpha'_1 + q_1{}^2\alpha_{,,}] \frac{dw}{d\alpha} +$$
$$+ [p_1{}^2\beta'' + (1 + 2p_1 q_1)\beta'_1 + q_1{}^2\beta_{,,}] \frac{dw}{d\beta} = 0 \ldots . \quad (9)$$

*) Vid. Lacroix, in opere cit. T. II. p. 622; conf. Legendre, Mém. sur l'intégr. de quelques équations aux diff. partielles, sub No. 1. cit.

Jamque α et β sumtis talibus ut satisfiat qualitercumque conditionibus

$$\left.\begin{array}{l} p_1{}^2\alpha'^2 + (1 + 2p_1q_1)\alpha'\alpha_1 + q_1{}^2\alpha_1{}^2 = 0 \\ p_1{}^2\beta'^2 + (1 + 2p_1q_1)\beta'\beta_1 + q_1{}^2\beta_1{}^2 = 0 \end{array}\right\} \dots. \; (10)$$

aequationi transformatae optata continget forma: id quod fiet ponendo

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{p_1}{1 + \sqrt{1 + 4p_1q_1}}, \\ \beta = \dfrac{p_1}{1 - \sqrt{1 + 4p_1q_1}}. \text{*)} \end{array}\right\} \dots. \; (11)$$

Quibus in aequ. (9) adhibitis ista comparatur loco aequationis (8) transformata **):

$$\frac{1}{4q_1{}^2} \cdot \frac{d^2w}{d\alpha d\beta} - \frac{2p_1}{\sqrt{1 + 4p_1q_1}(1 + \sqrt{1 + 4p_1q_1})} \cdot \frac{dw}{d\alpha}$$
$$+ \frac{2p_1}{\sqrt{1 + 4p_1q_1}(1 - \sqrt{1 + 4p_1q_1})} \cdot \frac{dw}{d\beta} = 0.$$

*) Scil. positis $\left.\begin{array}{l} \alpha' = m\alpha_1 \\ \beta' = m\beta_1 \end{array}\right\}$ satisfiet aequationibus (10) satisfaciendo huic

$$p_1{}^2m^2 + (1 + 2p_1q_1)m + q_1{}^2 = 0,$$

unde

$$m = -\frac{1 + 2p_1q_1 \pm \sqrt{1 + 4p_1q_1}}{2p_1{}^2} = -\frac{(1 \pm \sqrt{1 + 4p_1q_1})^2}{4p_1{}^2}.$$

Ideoque aequationibus (10) fiet satis sumendo α et β tales ut fiat satis qualitercumque hisce:

$$\alpha' + \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4p_1q_1}}{2p_1}\right)^2 . \alpha_1 = 0,$$

$$\beta' + \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4p_1q_1}}{2p_1}\right)^2 . \beta_1 = 0;$$

quod (ut jam facile est probatu) fit positione illâ (11).

**) Scilicet habentur ex (11):

$$e \dots \left\{\begin{array}{l} \alpha' = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + 4p_1q_1}} = -\beta'; \\ \alpha_1 = \dfrac{-2p_1{}^2}{\sqrt{1 + 4p_1q_1}(1 + \sqrt{1 + 4p_1q_1})^2}; \beta_1 = \dfrac{2p_1{}^2}{\sqrt{1 + 4p_1q_1}.(1 - \sqrt{1 + 4p_1q_1})^2} \end{array}\right.$$

$$\alpha'' = \frac{-q_1}{(1 + 4p_1q_1)^{\frac{3}{2}}} = -\beta''; \; \alpha'_1 = \frac{-p_1}{(1 + 4p_1q_1)^{\frac{3}{2}}} = -\beta'_1;$$

$$\alpha_{//} = \frac{4p_1{}^3(1 + 3\sqrt{1 + 4p_1q_1})}{(1 + 4p_1q_1)^{\frac{3}{2}}.[1 + \sqrt{1 + 4p_1q_1}]^2}; \beta_{//} = \frac{-4p_1{}^3(1 - 3\sqrt{1 + 4p_1q_1})}{(1 + 4p_1q_1)^3.[1 - \sqrt{1 + 4p_1q_1}]^2}.$$

seu

$$\frac{d^2w}{d\alpha d\beta}\sqrt{1+4p_1q_1}+2q_1(1-\sqrt{1+4p_1q_1})\frac{dw}{d\alpha}$$

$$-2q_1(1+\sqrt{1+4p_1q_1})\frac{dw}{d\beta}=0;$$

i. e. — quoniam secund. (11)

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta},\\ q_1&=\frac{-1}{2(\alpha+\beta)},\\ \sqrt{1+4p_1q_1}&=-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta},\end{aligned}\right\}\ldots\text{(12)}$$

$$\text{(13)}\ \ldots\ \frac{d^2w}{d\alpha d\beta}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw}{d\alpha}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw}{d\beta}=0$$

4. **Et quidem formae finitae integrale hujus aequationis secundum methodum Ill. Laplace invenire licet,** ut jam erit probandum:

Etenim positâ

$$\frac{dw}{d\beta}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}w=w_1,\ \ldots\ \text{(14)}$$

(13) redigitur in

$$\frac{2w}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}w_1-\frac{dw_1}{d\alpha};\ \ldots\ \text{(15)}$$

quae ipsam w dabit cognitâ modo w_1. — At sumtis ex novissima valoribus τῶν w et $\frac{dw}{d\beta}$ tum substitutis in (14), ista abit in novam hanc:

$$\frac{d^2w_1}{d\alpha d\beta}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw_1}{d\alpha}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw_1}{d\beta}+\frac{4\beta w_1}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^3}=0.\ \ldots\ \text{(16)}$$

Jamque positâ

$$\frac{dw_1}{d\beta}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}w_1=w_{\prime\prime};\ \ldots\ \text{(17)}$$

$w_{\prime\prime}$ tandem quaeri licebit ex hac 1[i] ordinis aequatione lineari:

$$\frac{dw_{\prime\prime}}{d\alpha}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}w_{\prime\prime}=0.\ \ldots\ \text{(18)}$$

Ex hac concluditur (ψ''' denot. functionem arbitr.)

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}w_{\prime\prime}=\psi'''(\beta);\ \ldots\ \text{(19)}$$

tum secundum (17)

$$(20) \ldots\ldots (\alpha^2 - \beta^2) w_1 = \varphi(\alpha) + \int (\alpha - \beta)^2 \psi'''(\beta) d\beta,$$

[const. arbitr. in $\varphi(\alpha)$ inclusâ], atque secundum (15) tandem

$$(21) \ldots\ldots (\alpha + \beta) w = \varphi(\alpha) + \int (\alpha - \beta)^2 \psi'''(\beta) d\beta$$
$$- \frac{\alpha - \beta}{2} \Big(\varphi'(\alpha) + 2 \int (\alpha - \beta \psi'''(\beta) d\beta \Big);$$

quod igitur quaesitum est integrale aequationis (8) datis α et β ex (11).

Huic, si placet, simpliciorem reddi licet formam integrando p. p. terminos signo $\int$ affectos. Scilicet positis

$$(22) \ldots\ldots \begin{cases} \int \psi'''(\beta) d\beta = \psi''(\beta), \\ \int \psi'' d\beta = \psi', \\ \int \psi' d\beta = \psi, \end{cases}$$

habebitur

$$(23) \ldots\ldots (\alpha + \beta) w = \varphi(\alpha) + 2\psi(\beta) - \frac{\alpha - \beta}{2} [\varphi'(\alpha) - 2\psi'(\beta)].$$

5. Determinatis in singulari quodam problemate functionibus φ et ψ, ex aequatione (21) aut (23) ope aequationum (6) et (7) exprimi licebit ipsas u, v et z functionibus ipsarum p_1 et q_1 (vel etiam, si ita conveniet, ipsarum α et β). Tum p_1 et q_1 (vel etiam α et β) eliminatis ex hisce — dum fieri potest — relatio proveniet ipsarum u, v et z; ac denique z exprimetur functione ipsarum x et y ope aequationum (3) seu

$$(24) \ldots\ldots \begin{cases} 2x = u + v, \\ 2y = (v - u)\sqrt{-1} \end{cases}$$

6. Antequam viam, quâ in genere ad determinationem functionum arbitrariarum perveniri liceat, indicamus; juvabit — quo accuratius de hac re quodammodo sit disputatum — systema illud finale integralis (u, v, z) seu (x, y, z) deduxisse et quidem ex formulis (23), (6), (7) et (24).

Est quidem

$$u = \frac{dw}{dp_1} = \frac{dw}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp_1} + \frac{dw}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_1} = \frac{\alpha + \beta}{2(\alpha - \beta)} \cdot \Big(\frac{dw}{d\beta} - \frac{dw}{d\alpha}\Big) \text{ sec. (11) et (12)},$$

$$v = \frac{dw}{dq_1} = \frac{dw}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dq_1} + \frac{dw}{d\beta}\frac{d\beta}{dq_1} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} \cdot \Big(\alpha^2 \frac{dw}{d\alpha} - \beta^2 \frac{dw}{d\beta}\Big);$$

secundum (23)

$$(\alpha+\beta)^2\frac{dw}{d\alpha}=-(\varphi+2\psi)+\alpha\varphi'+2\beta\psi'-\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\varphi'',$$

$$(\alpha+\beta)^2\frac{dw}{d\beta}=-(\varphi+2\psi)+\alpha\varphi'+2\beta\psi'+(\alpha^2-\beta^2)\psi'';$$

nde concluditur integrale hocce:

$$(25)\;\ldots\;\begin{cases}4u=\varphi''+2\psi'',\\ v=-2(\varphi+2\psi)+2(\alpha\varphi'+2\beta\psi')-(\alpha^2\varphi''+2\beta^2\psi''),\\ 2z=-(\varphi'+2\psi')+\alpha\varphi''+2\beta\psi'';\end{cases}$$

u, secundum (24):

$$(26)\;\ldots\;\begin{cases}2x=-2(\varphi+2\psi)+2(\alpha\varphi'+2\beta\psi')\\ \qquad\qquad+\frac{1}{4}\{1-4\alpha^2)\varphi''+(1-4\beta^2)2\psi''\},\\ 2y\sqrt{-1}=2(\varphi+2\psi)-2(\alpha\varphi'+2\beta\psi')\\ \qquad\qquad+\frac{1}{4}\{1+4\alpha^2)\varphi''+(1+4\beta^2)2\psi''\},\\ 2z=-(\varphi'+2\psi')+\alpha\varphi''+2\beta\psi''.\end{cases}$$

De caetero licere (si placet) huic systemati formam reddi simicem illam (2), perfacili equidem negotio patebit:

Nimirum positis

$$\left.\begin{aligned}-2\varphi+2\alpha\varphi'+\tfrac{1}{4}(1-4\alpha^2)\varphi''&=2a,\\ -2\psi+2\beta\psi'+\tfrac{1}{4}(1-4\beta^2)\psi''&=b;\end{aligned}\right\}\ldots\;(f)$$

habebitur: $x=a+b$;

um positis

$$(g)\;\ldots\;\begin{cases}2\varphi-2\alpha\varphi'+\frac{1}{4}(1+4\alpha^2)\varphi''=2\Phi(a)\,.\sqrt{-1},\\ 2\psi-2\beta\psi'+\frac{1}{4}(1+4\beta^2)\psi''=\Psi(b)\,.\sqrt{-1};\end{cases}$$

habebitur: $y=\Phi(a)+\Psi(b)$;

orro ex (26) sequitur

$$2dz=\alpha\,.\,\varphi'''\,.\,d\alpha+2\beta\,.\,\psi'''\,.\,d\beta;$$

t differentiando (f) habetur

$$\begin{cases}\frac{1}{4}(1-4\alpha^2)\varphi'''\,.\,d\alpha=2da,\\ \frac{1}{4}(1-4\beta^2)\psi'''\,.\,d\beta=db;\end{cases}$$

atque differentiando (g):

$$\begin{cases}\frac{1}{4}(1+4\alpha^2)\varphi'''\,.\,d\alpha=2\sqrt{-1}\,.\,\Phi'da,\\ \frac{1}{4}(1+4\beta^2)\psi'''\,.\,d\beta=\sqrt{-1}\,.\,\Psi'db;\end{cases}$$

unde

$$\alpha . \varphi''' d\alpha = 2 da . \sqrt{-1} . \sqrt{1 + \Phi'^2},$$
$$2\beta . \psi''' d\beta = 2 db . \sqrt{-1} . \sqrt{1 + \Psi'^2};$$

atque habebitur

$$z = \int da \sqrt{-1} . \sqrt{1 + \Phi'^2(a)} + \int db \sqrt{-1} . \sqrt{1 + \Psi'^2(b)}.$$

Denique systemate (26) satisfieri propositae (1), facili usque negotio licet probari. — Etenim α', α_1, β', β_1 denotantibus partiales ipsarum α et β derivatas resp. ad x et y, tertia systematis aequatio praestat

$$(h) \ldots . \begin{cases} 2p = \alpha\alpha'\varphi''' + \beta\beta' . 2\psi''', \\ 2q = \alpha\alpha_1\varphi''' + \beta\beta_1 . 2\psi; \end{cases}$$

at priores ambae

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{4}(1 - 4\alpha^2)\alpha'\varphi''' + \tfrac{1}{4}(1 - 4\beta^2)\beta' . 2\psi''', \\ 0 &= (1 - 4\alpha^2)\alpha_1\varphi''' + (1 - 4\beta^2)\beta_1 . 2\psi''', \\ 0 &= (1 + 4\alpha^2)\alpha'\varphi''' + (1 + 4\beta^2)\beta' . 2\psi''', \\ \sqrt{-1} &= \tfrac{1}{4}(1 + 4\alpha^2)\alpha_1\varphi''' + \tfrac{1}{4}(1 + 4\beta^2)\beta_1 . 2\psi'''; \end{aligned}\right\}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{1 + 4\beta^2}{(\alpha^2 - \beta)^2\varphi'''}, & \beta' &= \frac{1 + 4\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)2\psi'''}, \\ \alpha_1 &= \frac{1 - 4\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)\varphi'''}\sqrt{-1}, & \beta_1 &= -\frac{1 - 4\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)2\psi'''}\sqrt{-1}; \end{aligned}\right\} \ldots . (i)$$

atque (h) abeunt in

$$\left.\begin{aligned} 2p &= -\frac{1 - 4\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \\ 2q\sqrt{-1} &= -\frac{1 + 4\alpha\beta}{\alpha + \beta} \end{aligned}\right\}$$

tum harum differentiatione adhibitisque (i) comparantur

$$\left.\begin{aligned} 2r &= \frac{(1 + 4\alpha^2)^2 . \varphi''' - (1 + 4\beta^2)^2 . 2\psi'''}{2\varphi'''\psi'''(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^2}, \\ 2t &= -\frac{(1 - 4\alpha^2)^2\varphi''' - (1 - 4\beta^2)^2 . 2\psi'''}{2\varphi'''\psi'''(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^2}, \\ 2s\sqrt{-1} &= \frac{(1 - 4\alpha^2)(1 + 4\alpha^2)\varphi''' - (1 - 4\beta^2)(1 + 4\beta^2) . 2\psi'''}{2\varphi'''\psi'''(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^2}; \end{aligned}\right\}$$

per quas aequationi (1) fieri satis, facillimum est probatu.

7. **In determinationem functionum arbitrariarum.** Determinentur istae ex eo quod transeat superficies per curvam $\left\{\begin{matrix} y=f(x) \\ z=f_1(x)\end{matrix}\right\}$, per ambitum cujus sit superficiei $p=f_2(x)$.

Conditiones istas in u et v transformari licet secundum (24), sintque

$$\left.\begin{matrix} u=\mathrm{f}(v), \\ z=\mathrm{f}_1(v), \\ p=\mathrm{f}_2(v), \end{matrix}\right\} \ldots (27)$$

Patet equidem $\psi'''(\beta)$ determinari licere ex (19), si modo cognitum sit, α superficiei quaenam sit functio ipsius β in ambitu curvae (27) nec non $w_{,,}$.

Prius quaeratur. Est quidem

$$\left.\begin{matrix} \alpha=\dfrac{p_1}{1+\sqrt{1+4p_1q_1}} \\ \beta=\dfrac{p_1}{1-\sqrt{1+4p_1q_1}} \end{matrix}\right\} \text{secundum (11)}$$

p_1 et q_1 denot. $\frac{dz}{du}$ et $\frac{dz}{dv}$ — Quaerantur p_1 et q_1 in ambitu (27).

Quoniam superficiei $dz = p_1 du + q_1 dv$, at in ambitu $\left.\begin{matrix} du=\mathrm{f}'(v)\,.\,dv \\ dz=\mathrm{f}'_1(v)\,.\,dv\end{matrix}\right\}$; erit ipsarum p_1 et q_1 superficiei in ambitu altera haecce relatio;

$$\mathrm{f}'_1(v)=p_1\,.\,\mathrm{f}'(v)+q_1.$$

Tum quoniam superficiei $p=\frac{dz}{du}u'+\frac{dz}{dv}v'=p_1+q_1$ secund. (3), altera erit

$$\mathrm{f}_2(v)=p_1+q_1;$$

ex quibus sequitur esse in ambitu (27)

$$(28)\ \ldots\ \left\{\begin{matrix} p_1=\dfrac{\mathrm{f}_2-\mathrm{f}'_1}{1-\mathrm{f}'}=\Gamma(v) \\ q_1=\dfrac{\mathrm{f}'_1\quad \mathrm{f}'\mathrm{f}_2}{1-\mathrm{f}'}=\Gamma_1(v). \end{matrix}\right.$$

Jam α et β in ambitu exprimi licet in v ope aequat. (11) vel (12), eliminatâque v habebitur ibidem

$$(29)\ \ldots\ \alpha=F(\beta).$$

Porro $w_{,,}$ superficiei quaenam sit functio ipsius β in ambitu quaeratur. — Est quidem sec. (17) et (14) supferficiei

$$(30)\ \ldots\ w_{,,}=\frac{2}{\alpha+\beta}\cdot\frac{dw}{d\beta}+\frac{d^2w}{d\beta^2},$$

ideoque $w_{,,}$ in ambitu cognita erit in β, si modo $\frac{dw}{d\beta}$ atque $\frac{d^2w}{d\beta^2}$ ibidem innotuerint.

At $\frac{dw}{d\beta}$ facile invenietur cognitâ modo w in ambitu. Est autem secund. (6) superficiei

$$w = p_1 u + q_1 v - z,$$

cujus membri posterioris omnes termini, quales sunt in ambitu curvae, cognitae sunt in β ex antecedentibus; sitque in ambitu

$$(31) \; \ldots \; w = F_1(\beta).$$

Jam quoniam superficiei $dw = \frac{dw}{d\alpha}d\alpha + \frac{dw}{d\beta}d\beta$, at in ambitu $\left.\begin{matrix} d\alpha = F'(\beta)d\beta \\ dw = F'_1(\beta)d\beta \end{matrix}\right\}$; erit ibidem una relatio ipsarum $\frac{dw}{d\alpha}$ et $\frac{dw}{d\beta}$ ista:

$$F'_1(\beta) = \frac{dw}{d\alpha}F'(\beta) + \frac{dw}{d\beta}.$$

Et quoniam $\frac{dw}{dp_1}$ seu $u = \frac{dw}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp_1} + \frac{dw}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_1}$,

$$\text{i. e} = \left(\frac{dw}{d\alpha} - \frac{dw}{d\beta}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+4p_1q_1}} \text{ secund. } (e);$$

alteram haec dat relationem ipsarum $\frac{dw}{d\alpha}$ et $\frac{dw}{d\beta}$ in ambitu; unde concluditur

$$\frac{dw}{d\alpha} \text{ et } \frac{dw}{d\beta} \text{ in ambitu} = \text{cognitis funct. } \beta. \; \ldots \; (32)$$

Restat $\frac{d^2w}{d\beta^2}$. — Est autem superficiei $d\left(\frac{dw}{d\beta}\right) = \frac{d^2w}{d\alpha d\beta}d\alpha + \frac{d^2w}{d\beta^2}d\beta$; ideoque cognita erit $\frac{d^2w}{d\beta^2}$ in ambitu secund. (29) et (32), si modo $\frac{d^2w}{d\alpha d\beta}$: quam vero dat. (13)

Itaque jam $w_{,,}$ in ambitu cognita est in β; ideoque etiam constitutio functionis $\psi'''(\beta)$.

Qua deinde substitutâ in (20) tum perfectâ integratione illâ $\int(\alpha-\beta)^2\psi'''(\beta)d\beta$, perfacili negotio determinari $\varphi(\alpha)$ licebit.

8. Quibus peractis habebitur (modo, quem in No. 5. indicavimus) superficierum, quarum in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sint signoque contrario, ea quae per datam curvam datâque p transeat*).

*) Haec quoque — ut ex Calculo illo Variationum innotescit — est omnium, quas per datam curvam perimetrum duci liceat, superficierum ea cui minima sit area interclusa perimetro

Nota.

Licebit etiam (ut facile patet) **functiones arbitrarias ex eo determinari quodammodo, ut in ambitu intersectionis superficiei quaesitae atque cylindri $y=f(x)$ sint**

$$p = f_1(x),$$
$$\text{et } q = f_2(x);$$

quae quidem conditiones, eliminatis x et y, abeunt in

$$(33) \ldots \begin{cases} u = \mathrm{f}(v), \\ p = \mathrm{f}_1(v), \\ q = \mathrm{f}_2(v). \end{cases}$$

Scilicet, ut supra, primo quaeratur α quaenam sit functio ipsius β in ambitu intersectionis. Quoniam superficiei

$$p = \frac{dz}{du}u' + \frac{dz}{dv}v',$$
$$q = \frac{dz}{du}u_1 + \frac{dz}{dv}v_1$$

erunt in ambitu

$$\mathrm{f}_1(v) = p_1 + q_1,$$
$$\mathrm{f}_2(v) = (p_1 - q_1)\sqrt{-1};$$

ideoque

$$(34) \ldots \begin{cases} 2p_1 = \mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_2 . \sqrt{-1}, \\ 2q_1 = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 . \sqrt{-1}; \end{cases}$$

ex quibus, ut in casu praecedenti, α licet exprimi in β.

Tum w in ambitu cognita erit in β secund. (6), si modo z superficiei ibidem innotuerit. Est autem $dz = p_1 du + q_1 dv$; ideoque secund. (34) et (33) erit per totum ambitum

$$(35) \ldots \begin{cases} dz = E'(v) . dv, \\ z = E(v) + c, \\ w = E_1(\beta) - c, \end{cases}$$

manente c const. arbitrariâ.

---

datâ aliâque in eadem superficie ductâ, perimetris certe quarum in xyplano projectionum altera alteri sit circumscripta: scilicet iis solis in comparationem vocatis superficiebus, quarum aream perimetris hisce definitam formulâ illâ $\int\int dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$ (communibus integrationis limitibus) exprimi liceat.

Caetera sequuntur, ut in casu praecedenti; attamen, uti — justum, arbitraria heic remanebit constans c, nisi praeterea editum sit punctum per quod transire superficiem lubeat.

Porro ex eo determinari licebit functiones arbitrarias, ut in ambitu intersectionis superficiei quaesitae cum superficie $z = f(x, y)$ sint

$$p = f_1(x, y)$$
$$\text{et } q = f_2(x, y).$$

Scilicet tunc erit in ambitu

$$(dz =) \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = f_1 dx + f_2 dy,$$

quae tunc aequatio est differentialis ambitûs, cui igitur licet concludi

$$f_3(x, y, c) = v,$$

(denot. c const. arbitr.). — Caetera patent.

Jamque ut (corroborandi quodammodo calculi causâ) paucorum, in quibus calculum ad finem usque sine maximis tricis perduci liceat, unicum offeratur exemplum et quidem (uti videtur) admodum simplex; postuletur ut in ambitu perimetri sint

$$\left.\begin{array}{r} z = 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = A, \\ p = 2Bx, \end{array}\right\} \ldots . (k)$$

(A et B const. reales).

Eliminatis x et y habetur definitio ista perimetri:

$$\left.\begin{array}{r} z = 1, \\ \sqrt{uv} = A, \\ p = B \,.\, (v + \frac{A^2}{v}). \end{array}\right\} \ldots . (l)$$

Erunt igitur in ambitu secundum (28)

$$\left.\begin{array}{r} p_1 = Bv, \\ q_1 = \frac{A^2 B}{v}; \end{array}\right\}$$

atque aequationes (11) dant

$$\alpha = \frac{Bv}{1 + \sqrt{1 + 4A^2B^2}} = (\text{breviter}) \frac{B}{2C} v,$$

$$\beta = \frac{Bv}{1 - \sqrt{1 + 4A^2B^2}} = \ldots\ldots . \frac{B}{2D} v.$$

deoque erit in ambitu

$$\alpha = \frac{D}{C} \cdot \beta, \ldots . (m)$$

$$v = \frac{2D}{B} \cdot \beta,$$

$$u = \frac{A^2 B}{2D\beta},$$

$$p_1 = 2D\beta,$$

$$q_1 = \frac{A^2 B^2}{2D\beta},$$

$$\sqrt{1 + 4p_1 q_1} = \sqrt{1 + 4A^2 B^2} = C - D;$$

$$w = 2A^2 B - 1,$$

$$\frac{dw}{d\alpha} = \frac{A^2 BC(C-D)}{D\beta},$$

$$\frac{dw}{d\beta} = -\frac{A^2 B(C-D}{\beta}; ^{*})$$

$$\frac{d^2 w}{d\alpha d\beta} = \frac{4A^2 BC^2}{\beta^2},$$

$$\frac{d^2 w}{d\beta^2} = \frac{A^2 B}{\beta^2}(C - D - 4CD);$$

$$w_{,,} = \frac{A^2 B}{\beta^2}(C - D - 2C[C + D]),$$

$$= -\frac{A^2 B}{\beta^2}.$$

Unde

$$\psi'''(\beta) = \frac{A^2 B}{C-D} \cdot \frac{1}{\beta^2}; \ldots . (n)$$

atque

$$\int (\alpha - \beta)^2 \cdot \psi'''(\beta) \cdot d\beta = -\frac{A^2 B}{C-D}\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} + 2\alpha \log \beta\right),$$

(log denot. logarithm. naturalem);

unde (20) abit in

$$(\alpha^2 - \beta^2) w_1 = \varphi(\alpha) - \frac{A^2 B}{C-D}\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} + 2\alpha \log \beta\right),$$

ex qua jam $\varphi(\alpha)$ est determinanda.

In ambitu est

$$\beta = \frac{C}{D} \alpha,$$

*) Quoniam ex positis

$$2C = 1 + \sqrt{1 + 4A^2 B^2},$$

$$2D = 1 - \sqrt{1 + 4A^2 B^2} \text{ sequitur } C + D = 1.$$

atque secund. (14)

$$(\alpha^2-\beta^2)w_1=\alpha\left(\frac{A^2B}{CD}-2\right);$$

unde

$$(o)\;\ldots\;\varphi(\alpha)=-2\alpha\left(1-\frac{A^2B}{C-D}\log\frac{C}{D}\alpha\right).$$

Quae quum ita sint, integrale (21) abit in

$$w=\frac{A^2B}{C-D}\left\{\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}-\log\frac{C\alpha}{D\beta}\right\}-1,$$

seu, repositis jam valoribus (11) ipsarum α et β,

$$(p)\ldots w=\frac{A^2B}{C-D}\left\{2\sqrt{1+4p_1q_1}+\log\frac{C}{D}\cdot\frac{1-\sqrt{1+4p_1q_1}}{1+\sqrt{1+4p_1q_1}}\right\}-1.$$

Ex quo consequuntur

$$(q)\;\ldots\;\begin{cases}u=\dfrac{A^2B}{C-D}\cdot\dfrac{\sqrt{1+4p_1q_1}}{p_1},\\[2ex] v=\dfrac{A^2B}{C-D}\cdot\dfrac{\sqrt{1+4p_1q_1}}{q_1},\\[2ex] z=1-\dfrac{A^2B}{C-D}\log\dfrac{C}{D}\dfrac{1-\sqrt{1+4p_1q_1}}{1+\sqrt{1+4p_1q_1}};\end{cases}$$

ex qua novissimâ eliminari licet $4p_1q_1$ ope duarum praecedentium, quae quidem dant multiplicando

$$4p_1q_1=\frac{4A^4B^2}{(C-D)^2.uv-4A^4B^2}=\frac{4A^4B^2}{(1+4A^2B^2).uv-4A^4B^2}.$$

Ideoque quoniam nunc

$$e^{\frac{C-D}{A^2B}(z-1)}=\frac{D}{C}\cdot\frac{1+\sqrt{1+4p_1q_1}}{1-\sqrt{1+4p_1q_1}},$$

seu repositis valoribus τῶν C et D,

$$e^{\frac{\sqrt{1+4A^2B^2}}{A^2B}(z-1)}=-\frac{1-\sqrt{1+4A^2B^2}}{1+\sqrt{1+4A^2B^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{4p_1q_1}}+\sqrt{\frac{1}{4p_1q_1}+1}\right)^2;$$

$$e^{x.\frac{\sqrt{1+4A^2B^2}}{A^2B}} = \frac{e^{\frac{\sqrt{1+4A^2B^2}}{A^2B}}}{4A^2B^2}(1-\sqrt{1+4A^2B^2})^2 . [\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}uv}+\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}uv-1}]^2,$$

$$= \frac{e^{\frac{\sqrt{1+4A^2B^2}}{A^2B}}}{4A^2B^2}(1-\sqrt{1+4A^2B^2})^2 . [\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}(x^2+y^2)}+\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}(x^2+y^2)-1}]^2, \dots . (r)$$

h. e. superficies quaedam erit revolutionis circa x-axim.

Et si ponantur ex. gr. A et B tales ut

$$\sqrt{1+4A^2B^2} = 2A^2B,$$

$$2A = e + \frac{1}{e}:$$

cui fit satis ponendo

$$\tfrac{1}{2}B = \frac{1}{(e+\frac{1}{e})(e-\frac{1}{e})};$$

habebitur superficies cognita

$$e^x = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2-1},$$

seu

$$(s) \dots . \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sqrt{x^2+y^2};$$

cui quidem superficiei revolutionis circa z-axim Meridianus est Catenaria, cujus vertex (punctum axi revol. proximum), in xy-plano situs, ab axi distat unitate longitudinis.

9. Ex eo tandem determinari licet functiones illas arbitrarias, quod transeat superficies per curvam $\left\{\begin{matrix} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{matrix}\right\}$ datâ insuper relatione quâdam ipsarum p et q superficiei, in genere

$$(36) \ldots . f_2(x, y, z, p, q) = 0.$$

Quâ quidem, ut patet, perfectâ determinatione responsum erit ad quaestionem, an per datam curvam duci liceat superficiem quamdam illius generis, quod in aequatione (36) derivatarum 1^i ordinis partialium comprehenditur, eandemque talem cujus in puncto unoquoque principales ambo etc. *)

Scilicet loco conditionum (27) heic postulatur, ut per ambitum curvae sit

$$\left.\begin{matrix} u = \mathrm{f}(v), \\ z = \mathrm{f}_1(v), \\ \mathrm{f}_2(v, p, q) = 0. \end{matrix}\right\}$$

In determinationem ipsarum p_1 et q_1 superficiei in ambitu habetur, ut in casu priori, altera haecce relatio:

$$\mathrm{f}'_1(v) = p_1 . \mathrm{f}'(v) + q_1.$$

Et quoniam superficiei

$$p = \frac{dz}{du} u' + \frac{dz}{dv} v' = p_1 + q_1 \text{ secund. (3)},$$

$$q = \frac{dz}{du} u_1 + \frac{dz}{dv} v_1 = (p_1 - q_1)\sqrt{-1} \ldots ;$$

habebitur, conjunctâ his quidem relatione illa

$$\mathrm{f}_2(v, p, q_1) = 0,$$

altera relatio ipsarum p_1, q_1 et v.

Quo facto comparabitur in genere, ut in casu priori,

$$\alpha = F(\beta).$$

Caetera, ut in casu priori, sequuntur.

---

*) Ideoque etiam hoc modo responsum erit ad quaestionem, an per datam curvam duci liceat superficiem generis (36), cui contingat esse omnium, quas per datam curvam duci liceat, superficierum eam cui minima sit area interclusa perimetro datâ aliâque in eadem superficie ductâ, perimetris certe quarum in xyplano projectionum altera alteri sit circumscripta; — adhibitâ equidem reservatione in notula sub No. 8. initâ.

At quaestio, quonam demum modo liceat arbitrarias illas functiones ex eo determinari, quod per datas duas curvas transeat superficies, — quaestio (inquam) quae fere omnium prima in superficiebus tractandis, quarum natura aequatione derivatarum 2^i ordinis partialium definita est, sub sensum cadere solet — hucusque in medio est relicta. Nec in sequentibus responsum illi conciliare conabimur. Scilicet per se patet, quaevis olim in genere methodus hujusce rei explicandae forsan fuerit inventa, perraro tamen fore ut reverâ usui sit ista methodus: et quidem eam ipsam ob caussam quod tantum abest ut per datas duas curvas quascumque duci liceat superficiem generis heic considerati, ut maximâ sane opus sit circumspectione, quo inveniantur umquam duae curvae, quarum et naturae et positioni inter se conveniat hocce idioma. — Quae cum ita sint, re istâ in praesenti relictâ unam vel alteram quaestionem latius patentem magisque delectabilem propositaeque nobis materiei intime conjunctam in sequentibus pagellis tractabimus.

10. Quaeratur, an et quaenam sint superficies revolutionis tales, quarum in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis etc.

Tali superficiei (si exsistat) erit

aequatio (1),

denotantibus tunc (si axis revol. sumatur z - axis) p, q, r, s, t partiales ipsius z derivatas eas, quae aequationi superficierum revolutionis circa z - axim contingunt. Quae autem cum sit

$$z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \varphi(\varrho),$$

ideoque commonstret z puncti superficiei haud pendere ab Θ (angulo radii vectoris puncti ejusdem, in xy-plano projecti, cum ipso x - axi); transformetur hac suppositione aequatio (1) secundum formulas notissimas

$$x = \varrho \cos\Theta,\ y = \varrho \sin\Theta.$$

Quoniam z heic functio solius ϱ putetur, ideoque

$$\frac{dz}{d\varrho} = p \cos\Theta + q \sin\Theta,$$

$$\frac{dz}{d\Theta} = 0 = q\varrho \cos\Theta - p\varrho \sin\Theta;$$

erunt

$$(t) \ \ldots\ p = \frac{dz}{d\varrho}\cos\Theta,\ q = \frac{dz}{d\varrho}\sin\Theta.$$

Tum quoniam

$$\frac{dp}{d\varrho} = r\cos\Theta + s\sin\Theta,\ \frac{dp}{d\Theta} = s\varrho\cos\Theta - r\varrho\sin\Theta,$$

ideoque

$$r = \frac{dp}{d\varrho}\cos\Theta - \frac{dp}{d\Theta}\frac{\sin\Theta}{\varrho},\quad s = \frac{dp}{d\varrho}\sin\Theta + \frac{dp}{d\Theta}\frac{\cos\Theta}{\varrho};$$

erunt secund. (t):

$$r = \frac{d^2z}{d\varrho^2}\cos^2\Theta + \frac{dz}{d\varrho}\frac{\sin^2\Theta}{\varrho},$$

$$s = \frac{d^2z}{d\varrho^2}\sin\Theta\cos\Theta - \frac{dz}{d\varrho}\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\varrho};$$

eodemque modo habebitur

$$t = \frac{d^2z}{d\varrho^2}\sin^2\Theta + \frac{dz}{d\varrho}\frac{\cos^2\Theta}{\varrho}.$$

Quibus impositis (1) abit in

$$\frac{d^2z}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dz}{d\varrho}\left(1 + \frac{dz^2}{d\varrho^2}\right) = 0, \; \ldots . \; (37)$$

seu, ζ denotante breviter ipsam $\frac{dz}{d\varrho}$,

$$\varrho d\zeta + \zeta(1 + \zeta^2)d\varrho = 0;$$

unde integrale

$$(\varrho^2 - a^2)\zeta^2 = a^2,$$

seu

$$\frac{dz}{d\varrho} = \pm\frac{a}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}, \; \ldots . \; (38)$$

denotante igitur const. arbitr. a ipsum ϱ punctorum, in quibus planum tangens superficiei (seu linea tangens Meridiani ipsius) normale sit ad planum projectionis $(z = 0)$; tum

$$z = a\log b\,(\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - a^2}),$$

seu, quod idem valet,

$$z = c + a\log\left(\frac{\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a}\right) \; \ldots , \; (39)$$

denotantibus heic a et c in genere ϱ et z punctorum modo commemoratorum.

Est quidem Catenariae — y - axi horizontali atque per punctum curvae infimum ducto, x - axi positivo sursum verticale — aequatio notissima

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{m}{\sqrt{2mx + x^2}},$$

ideoque, positâ origine alicubi in rectâ $(x = -m)$ seu mutatâ x $x - m$,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{m}{\sqrt{x^2 - m^2}},$$

que

$$y = n + m \log\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - m^2}}{m}\right), \ldots . (u)$$

et m denotantibus ipsas y et x puncti ordinatae x minimae.

Itaque collatis ex aequationibus (39) et (u) facillimo utique negotio perspicitur propositae quaestioni, an superficiem revolutionis (circa datum axim) talem, cujus in puncto unoquoque principales ambo etc., duci liceat per data duo puncta seu (quod heic idem valet) per datos duos circulos

$$(40) \ldots . \begin{pmatrix} x = h \\ \varrho = R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x = \mathfrak{H} \\ \varrho = \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

(axi revol. sumto x-axi), hoc modo esse respondendum: Quo ducatur meridianus illius, Catenariam construi oportet, cujus constantibus a et c — i. e. ϱ et x punctorum axi revol. proximorum — fiat satis conditonibus

$$(41) \ldots . \begin{cases} h = c + a \log\left(\frac{R \pm \sqrt{R^2 - a^2}}{a}\right) \\ \mathfrak{H} = c + a \log\left(\frac{\mathfrak{R} \pm \sqrt{\mathfrak{R}^2 - a^2}}{a}\right). \end{cases}$$

Quod si quando fieri nequeat; ex eo indicatur, nullum per datos illos circulos duci licere hujusce generis superficiem revolutionis circa datum axim.*)

Si ex. gr. perimetri datae forent

$$\begin{pmatrix} x = 0 \\ \varrho = 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x = 1 \\ 2\varrho = e + \frac{1}{e} \end{pmatrix},$$

aequationum (41) prior daret

$$0 = c + a \log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right) \text{**})$$

---

*) In doctrina illa maximorum minimorumque idem Theorema hoc fere modo exprimi decet: Quo ducatur meridianus superficiei revol. circa datum axim, quae in omnibus [nec solis — uti anteá fuit pronuntiatum hoc Theorema — superficiebus revol.], quas per datas duas perimetros (40) duci liceat, superficiebus minimam habeat aream hisce limitibus definitam; Catenariam construi oportet etc. (ut supra). Quod si quando fieri nequeat; ex eo indicatur, minimam quam per datas perimetros duci liceat superficiem non esse revolutionis circa datum axim. — Scil. apponatur praeterea necesse est reservatio in notula sub No. 8. exposita. —

**) Scilicet, ut patet, solo signo superiori hoc loco opus erit.

unde aequatio (39) superficiei abit in

$$\left.\begin{aligned} z &= a\log\left(\frac{\varrho+\sqrt{\varrho^2-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\right) \\ \text{seu} \\ 2\varrho &= (1+\sqrt{1-a^2})e^{\frac{z}{a}}+(1-\sqrt{1-a^2})e^{-\frac{z}{a}}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (v)$$

determinandâ a ex

$$e+\frac{1}{e}=(1+\sqrt{1-a^2})e^{\frac{1}{a}}+(1-\sqrt{1-a^2})e^{-\frac{1}{a}};$$

cui cum fiat satis assumendo $a=1$, concludi licet conditioni, de qua heic quaeritur, satisfieri superficie illâ

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\varrho\,; \ldots\ldots (w)$$

quod equidem exemplo eodem aliter tractando in Nr. 8. supra fuit inventum *).

De caetero ex antecedentibus patet, in superficiebus revolutionis in genere unicam, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sint signo-

---

*) Quam sit necessaria reservatio illa in notulis praecedentibus indicata, vel ex hoc solo exemplo (si placet) satis liquet. Scilicet si supervacanea esset; pronuntiari liceret ex gr. aream superficiei (w) perimetris

$$\begin{pmatrix} z=1 \\ 2\varrho=e+\frac{1}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z=-1 \\ 2\varrho=e+\frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

determinatam minorem esse areâ convexâ cylindri recti, cujus axis (et qua situm et qua longitudinem) est recta per centra circulorum modo commemoratorum ducta atque radius baseos r pars quaelibet radii ϱ, additis areis annulorum circulariorum extra bases cylindri ambas restantium; quod quidem evidenter absurdum.

Altera equidem est

$$2\,.\,2\pi\int_1^{\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})}\varrho d\varrho\sqrt{1+(\frac{dz}{d\varrho})^2}=4\pi\int_1^{\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})}\frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{\varrho^2-1}}=2\pi.[1+\tfrac{1}{4}(e^2-\frac{1}{e^2})];$$

altera autem est

$$2\pi.[2r-r^2+\tfrac{1}{4}(e+\frac{1}{e})^2];$$

quae ut ex. gr. quantitate $\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{e^2})$ minor sit priori, sufficit sumi $r=0{,}2$ circiter.

que contrario, eam esse qua fiat satis aequationi (39), ad axim revol. ut z - axim relatae*).

11. Quaeratur denique, an et quaenam sint superficies, quae rectâ ad planum quoddam parallele motâ generantur, tales quarum in puncto unoquoque principales ambo etc. — Tali superficiei (si existat) erit

aequatio (1),

denotantibus — si planum dirigens sumatur xy planum — p, q, r, s, t partiales ipsius z derivatas eas, quae in aequatione hujus generis superficierum generali occurrunt. Quae autem cum sit**)

$$q^2r-2pqs+p^2t=0; \ldots. (42)$$

erit, eliminatâ t, aequatio quaesitae superficiei ista:

$$2pqs-(q^2-p^2)r=0,$$

seu (positâ y const.)

$$2pqdq-(q^2-p^2)dp=0,$$

cujus equidem homogeneae aequationis integrale hoc est:

$$p^2+q^2=p\,.\,\psi(y). \ldots. (43)$$

At perfecte non est arbitraria ista ψ. Eliminatâ enim r ex (44) et (1) quaesitae erit superficiei

$$2pqs+(q^2-p\ )t=0,$$

seu (positâ x const.)

$$2pqdp+(q^2-p^2)dq=0,$$

cujus integrale

$$p^2+q^2=q\,.\,\varphi(x). \ldots. (44)$$

Quae jam (43) et (44), quoniam eandem repraesentabunt superficiem, combinatae dant illi

$$p=\frac{\psi\varphi^2}{\varphi^2+\psi^2},\ q=\frac{\varphi\psi^2}{\varphi^2+\psi^2};$$

*) Et quidem manifestum est, si — valoribus ex arbitrio datis ipsis a et c — constructa fuerit superficies (39), hanc esse omnium, quas per duas in eâdem ex arbitrio ductas perimetros duci liceat, superficierum eam cui minima sit area hisce perimetris determinata, — perimetris certe, quarum in plano ad axim revol. normali projectionum altera alteri sit circumscripta: — debitâ ratione habitâ reservationis jam pluries commemoratae.

**) Vid. ex. gr. Leç. du Calc. Diff. p. Moigno p. 446; conf. Monge appl. de l'Anal. à la Géom. (1809) pag. 64. —

ideoque, ut sit $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$, erit

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2}=-\frac{\psi'}{\psi^2},$$

quae tamen, nullâ exsistente relatione ipsarum x et y, his inde tis aliter obtineri nequit, nisi sit

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2}=\text{const. arbitr. }\frac{1}{a}=-\frac{\psi'}{\psi^2}.$$

Integrando habebitur

$$\varphi=\frac{-a}{x-b},\ \psi=\frac{a}{y-c};$$

unde superficiei

$$p=\frac{a(y-c)}{(x-b)^2+(y-c)^2},\ q=\frac{-a(x-b)}{(x-b)^2+(y-c)^2},$$

$$dz=\frac{a(y-c)dx-a(x-b)dy}{(x-b)^2+(y-c)^2}$$

atque integrando, quoniam

$$\int\frac{a(y-c)}{(x-b)^2+(y-c)^2}\,dx=\varpi(y)+a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{x-b}{y-c}\right),$$

habetur

$$z-d=a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{x-b}{y-c}\right);\ \ldots\ldots (45)$$

quae quidem, ut liquet, superficiem denotat generis heic cons rati, quippe cujus aequationem generalem (ut constat) ita l describi

$$x=y\varphi(z)+\psi(z);$$

nostra vero dat

$$x=(y-c)\,\text{Tang}\left(\frac{z-d}{a}\right)+b.\ \ldots\ldots (46)$$

Ex aequ. novissima, quoniam quattuor continet constantes bitrarias, patet in genere inveniri licere superficiem generis h considerati, quae per data quattuor puncta transeat. — Cujus breviter investigetur natura, haec fere notentur.

Comparatis inter se intersectionibus superficiei cum xy pla atque plano $(y=2c)$, nimirum

$$\left.\begin{aligned} z-d&=a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{b-x}{c}\right)\\ z-d&=a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang}=\frac{x-b}{c}\right)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (47)$$

ıvenitur esse z alterius, pro x quacumque ξ, aequalem ipsi z lterius pro $x = 2b - \xi$. Ejusdem igitur sunt naturae hae ıtersectiones at (ut ita dicam) directionis reciprocae. taque invento — determinatis in problemate quodam singulari unctis, per quae transire lubeat superficiem — valore constantium $, b, c, d$ atque constructâ in xz plano curva illâ Helice*) $\binom{47}{\text{prior.}}$; urvam $\binom{47}{\text{poster.}}$ in plano $(y = 2c)$ facillimo negotio construi liceıt; quo facto superficies generabitur motâ generatrici super has mbas, ita ut assidue ad xy planum parallela maneat: atque habeıtur superficies illa „Heliçoide (gauche) à plan direceur“ **): quae igitur superficierum, rectâ ad planum quoddam arallele motâ generatarum, unica est cui contingant in puncto noquoque principales ambo radii curvedinis aequales signoque con-ario ***). — Observes tandem, si quando $a = 0$, superficiem in lanum $(z = d)$ abire.

At — numne ista in omnibus superficiebus rectâ geeratis (surfaces reglées) sola est, cui in puncto unoquoue contingant aequales signique contrarii principales mbo radii curvedinis? — Mr. Catalan primus et deinde Mr. Vantzel (ut in prooemio ex Ephemerida illa „l'Institut“ citamus) suâ uterque viâ responsum huic quaestioni dederunt: quod ut ıamprimum promulgatum facere iis placeat, est quod vehementer ptamus.

---

*) Vid. ex. gr. Moigno Calc. Diff. pag. 294.

**) Vid. ex. gr. Moigno ibid., Leroy Géom. déscript. No. 616 etc. — Patet, axem directricis $\binom{47}{\text{prioris}}$ esse $\left\{\begin{matrix} y = c \\ x = b \end{matrix}\right\}$, scil. intersectionem superficiei cum plano $(y = c)$ aut plano $(x = b)$.

***) Atque sumtis ita 4 punctis, ut per ea duci liceat superficiem hujusce generis; pars illius quaelibet perimetro circumscripta omnium per eandem perimetrum transeuntium superficierum minimam ista praebebit aream, nimirum

$$\int\!\!\int dx dy \sqrt{1 + \frac{a^2}{(x-b)^2 + (y-c)^2}},$$

limitibus a perimetro modo dicta datis: — (debita ratione reservationis nostrae habitâ). — Denique superficierum generis nunc considerati aliam non esse, cui contingat esse „superficiem minimam,“ patet.

XXXIII.

Ueber die Zerlegung der bestimmten Integrale in andere von kleineren Integrationsintervallen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

---

§. 1.

Es seien a und b die Grenzen eines bestimmten Integrales, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu$ eine Reihe von Grössen, welche sämmtlich zwischen a und b liegen und von denen jede folgende grösser als die vorhergehende ist, dann hat man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \ldots + \int_\lambda^\mu f(x)dx + \int_\mu^b f(x)dx.$$

Von der Richtigkeit dieses sehr bekannten Satzes überzeugt man sich sogleich durch die Bemerkung, dass ein bestimmtes Integral, wie

$$\int_a^b f(x)dx,$$

nichts anderes ist, als die Fläche, welche von den zu den Abscissen $x=a$, $x=b$ gehörenden rechtwinkligen Ordinaten, dem Stücke $b-a$ der Abscissenachse und der Curve, deren Gleichung $y=f(x)$ ist, begränzt wird.

Der oben ausgesprochene Satz kann oft dazu benutzt werden, die Werthe bestimmter Integrale aufzufinden, sobald die Mittelgrössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ auf eine zweckmässige, der Natur der Function $f(x)$ entsprechende Weise gewählt werden. Einige sehr gefügige Integrale dieser Art mögen dies darthun.

§. 2.

Es sei folgendes Integral gegeben:

$$\int_0^\infty f(x) \operatorname{Arctan} x \,.\, \frac{dx}{x}.$$

Theilen wir das Intervall 0 bis ∞ in zwei andere von 0 bis 1 ıd von da bis ∞, so ist unser Integral auch

$$=\int_0^1 f(x)\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}dx+\int_1^\infty f(x)\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}dx.$$

etzen wir im ersten Integrale $x=z$, im zweiten $x=\frac{1}{z}$, so änert jenes seinen Werth nicht, für dieses aber wird $\frac{dx}{x}=-\frac{dz}{z}$, nd wenn x die Werthe 1 und ∞ angenommen hat, ist $z=1$ und $=0$ geworden (weil aus $x=\frac{1}{z}$ folgt $z=\frac{1}{x}$). Wollen wir ber die Gränzen 1 und 0 vertauschen, also 1 zur oberen Gränze achen, so haben wir dem Integral das entgegengesetzte Zeichen ı geben, wodurch es wieder positiv wird. Es ist also:

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}dx$$

$$=\int_0^1 f(z)\frac{\operatorname{Arctan} z}{z}dz+\int_0^1 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{\operatorname{Arctan}\frac{1}{z}}{z}dz.$$

ide Integrale auf der rechten Seite können jetzt wegen der gleien Gränzen in eines zusammengezogen werden, und dies gäbe ıe sehr gute Reduction, wenn noch $f(\frac{1}{z})=f(z)$ wäre, weil man ın $f(z)\frac{dz}{z}$ als gemeinschaftlichen Factor der beiden Kreisbogen ıondern könnte.

Der Bedingung $f(\frac{1}{z})=f(z)$ kann aber sehr leicht genügt rden, wenn man $f(z)=\varphi(z+\frac{1}{z})$ setzt, wo φ eine beliebige nction bedeutet; es ist dann durch Vereinigung der beiden Inrale

$$\int_0^\infty \varphi\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}dx$$
$$=\int_0^1\left[\operatorname{Arctan} z+\operatorname{Arctan}\frac{1}{z}\right]\varphi\left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

ı gilt aber für jedes z die Formel:

$$\operatorname{Arctan} z+\operatorname{Arctan}\frac{1}{z}=\operatorname{Arctan}\infty=\frac{\pi}{2}.$$

ıdurch verwandelt sich die obige Gleichung in die folgende, in elcher wieder x für z gesetzt worden ist:

$$\int_0^\infty \operatorname{Arctan} x\,.\,\varphi\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\int_0^1\varphi\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}\ldots.(1)$$

Durch eine ganz analoge Betrachtung wird man auch folg
Gleichung finden:

$$\int_0^\infty \varphi(x+\frac{1}{x})\frac{lx}{x}\,dx = \int_0^1 [lz + l\frac{1}{z}]\,\varphi(z+\frac{1}{z})\frac{dz}{z},$$

d. h.

$$\int_0^\infty lx\,.\,\varphi(x+\frac{1}{x})\frac{dx}{x} = 0 \ldots. (2)$$

weil $lz + l\frac{1}{z} = 0$ ist.

Jede der beiden Gleichungen (1) und (2) kann zur Auffin
bestimmter Integrale von angebbaren Werthen dienen, die e
wenn man die Function φ so wählt, dass sich die Integratio
der rechten Seite durch die gewöhnlichen Mittel bewerkstel
lässt, die zweite dadurch, dass man in ihr eine neue Veränder
für x einführt.

§. 3.

Nimmt man für die Anwendung der Formel (1)

$$\varphi(x+\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x+\frac{1}{x}})^\mu = \frac{x^\mu}{(x^2+1)^\mu},$$

so wird

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+x^2)^\mu}\,\text{Arctan}\,x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+x^2)^\mu} \ldots. (3)$$

wobei das Integral ein rein algebraisches für jedes rational
ausführbares ist. Z. B. für $\mu = 1$, $\mu = 2$:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Arctan}\,x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8} \ldots. (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,\text{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8} \ldots. (5)$$

Setzt man

$$\varphi(x+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^\mu + \frac{1}{x^\mu}} = \frac{x^\mu}{1+x^{2\mu}},$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x^{2\mu}}\,\text{Artan}\,x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^{2\mu}} \ldots. (6)$$

wobei es ebenfalls nicht schwer ist, den Werth des Integrales rech

nach den gewöhnlichen Regeln zu bestimmen. Man findet z. B. für die Fälle $\mu=\frac{1}{2}$ und $\mu=\frac{1}{3}$:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \ldots.(7)$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan} x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}=\frac{3\pi^2}{8}\ldots.(8)$$

Nehmen wir für die Anwendung des Theoremes (2)

$$\varphi\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)^{2\mu},$$

so ist wieder

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{2\mu+1}dx=0.$$

Von diesem Integrale können wir uns zu einem allgemeineren von ähnlicher Form erheben, wenn wir für x eine neue Veränderliche $\frac{x}{\alpha}$ einführen, wodurch sich die Gränzen nicht ändern; es muss dann auch sein:

$$\alpha^{2\mu+1}\int_0^\infty \frac{l\frac{x}{\alpha}}{x}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1}dx=0$$

oder, wenn wir den Factor $\alpha^{2\mu+1}$ weglassen und $lx-l\alpha$ für $l\frac{x}{\alpha}$ schreiben,

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1}dx=l\alpha\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1}dx\ldots.(9)$$

Es handelt sich jetzt noch um die Ausführung des Integrales auf der rechten Seite. Es wird aber für $x=\alpha\sqrt{z}$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1}dx=\frac{1}{2\alpha^{2\mu+1}}\int_0^\infty \frac{z^{\mu+\frac{1}{2}-1}}{(1+z)^{2\mu+1}}\,dz$$

und unter dieser Form kann man den Werth des Integrales nach der bekannten Formel:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

für $p=q=\mu+\frac{1}{2}$ leicht bestimmen. Führt man diesen in die Gleichung (9) ein, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1}dx=\frac{l\alpha}{2\alpha^{2\mu+1}}\cdot\frac{[\Gamma(\mu+\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(2\mu+1)}\ldots.(10)$$

Ein Paar bemerkenswerthe spezielle Fälle dieser Formel liefern die Annahmen $\mu = n - \frac{1}{2}$ und $\mu = n$, wobei n eine positive ganze Zahl bedeutet. Vermöge der Gleichungen

$$\Gamma(m) = 1.2.3\ldots.(m-1),$$

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5\ldots..(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi},$$

welche für jedes ganze positive m gelten, erhält man nämlich

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)^{2n} dx = \frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{n(n+1)\ldots.(2n-1)} \cdot \frac{la}{2a^{2n}} \ldots.(11)$$

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)^{2n+1} dx = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)} \cdot \frac{\pi la}{2a^{2n+1}} \ldots.(12)$$

Für $\mu = 0$ erhält man unmittelbar aus (10)

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x} \cdot \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{la}{a} \ldots.(13)$$

Zu bemerken ist noch, dass die Formeln (10) bis (13) bloss für positive a, welche weder $= 0$ noch unendlich gross genommen werden dürfen, Gültigkeit besitzen. Denn die Herleitung dieser Integrale beruht auf der Voraussetzung, dass die Gränzen des früher betrachteten Integrales

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{2\mu+1} dx$$

sich nicht ändern, wenn man $\frac{x}{a}$ für x setzt. Dies würde aber der Fall sein, wenn $a = 0$, ∞ oder negativ genommen würde.

§. 4.

Bevor wir weiter gehen, mögen noch ein Paar Anwendungen der Formeln (12) und (13) Platz finden.

Man setze in (12) $n = 0, 1, 2, 3$ etc., multiplicire die entstehenden Glieder mit β, $\frac{1}{3}\beta^3$, $\frac{1}{5}\beta^5$ etc. und addire Alles, so kommt:

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left[\frac{\beta a}{a^2+x^2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\beta x}{a^2+x^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\beta x}{a^2+x^2}\right)^5 + \ldots..\right] dx$$

$$= \pi la\left[\frac{\beta}{2a} + \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{3}\left(\frac{\beta}{2a}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{2a}\right)^5 + \ldots..\right].$$

Bevor von einer Summirung dieser Reihen die Rede sein kann, müssen wir wissen, in welchen Fällen dieselben convergiren. Dies ist auf der rechten Seite der Fall, wenn der absolute Werth des Quotienten $\frac{\beta}{2a}$ die Einheit nicht übersteigt, oder wenn $2a \geqq \beta$ ist. In diesem Falle ist die Summe der Reihe $= \text{Arcsin}\,\frac{\beta}{2a}$. Ferner

haben wir für jedes α und x, $\alpha^2+x^2>2\alpha x$, weil $\alpha^2-2\alpha x+x^2$, als Quadrat von $\alpha-x$, immer eine positive Grösse sein muss. Da wir nun schon die Bedingung $2\alpha\geqq\beta$ gefunden haben, so ist um so mehr $\alpha^2+x^2>\beta x$, folglich $\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}$ ein ächter Bruch, für jeden beliebigen Werth von x. In diesem Falle convergirt die Reihe unter dem Integralzeichen für alle Werthe, welche x innerhalb des Intervalles 0 bis ∞ annehmen kann, und hat zur Summe den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}l\frac{1+\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}}{1-\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}}=\tfrac{1}{2}l\frac{\alpha^2+x^2+\beta x}{\alpha^2+x^2-\beta x}.$$

Führen wir diese Summe nebst der vorhergehenden in die Gleichung (14) ein, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty\frac{lx}{x}\,l\frac{\alpha^2+\beta x+x^2}{\alpha^2-\beta x+x^2}\,dx=2\pi l\alpha\,.\,\mathrm{Arcsin}\frac{\beta}{2\alpha},\ 2\alpha\geqq\beta.$$

Setzen wir noch 2β für β, wo nun $\alpha\geqq\beta$ sein muss, so ist auch

$$\int_0^\infty\frac{lx}{x}\,l\frac{\alpha^2+2\beta x+x^2}{\alpha^2-2\beta x+x^2}\,dx=2\pi l\alpha\,.\,\mathrm{Arctan}\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha\geqq\beta.\quad(15)$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich aus Formel (13) auf folgende Weise. Man nehme α veränderlich $=u$, multiplicire beiderseits mit $2u\,du$ und integrire zwischen den Gränzen $u=b$, $u=a$, so ist

$$\int_a^b 2u\,du\int_0^\infty\frac{lx}{u^2+x^2}\,dx=\pi\int_a^b lu\,du.\quad(16)$$

Hier kann man auf der linken Seite die Ordnung der Integrationen umkehren und zuerst nach u integriren, wodurch man erhält:

$$\int_0^\infty lx\,dx\int_a^b\frac{2u\,du}{x^2+u^2}=\int_0^\infty lx\,dx\,.\,l\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}.$$

Auf der rechten Seite von (16) ist

$$\int lu\,du=u\,lu-u=l(u^u)-u,$$

folglich

$$\int_a^b lu\,du=l\frac{b^b}{a^a}-b+a.$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (16) ein, so erscheint das Resultat:

$$\int_0^\infty lx\,.\,l\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\,dx=\pi(a-b)+\pi l\frac{b^b}{a^a}.\quad(17)$$

Die Grössen a und b sind nur in so weit beliebig, als sie weder $=0$, ∞ noch negativ genommen werden dürfen. Denn a und b waren die Gränzwerthe für u, d. h. für das frühere α; daher gelten die Determinationen für α auch für a und b.

§. 5.

Die Zerlegung eines bestimmten Integrals in andere von kleineren Intervallen ist auch mit grossem Vortheil auf Integrale von der Form

$$\int_0^\infty f(\sin x,\ \cos x)\frac{dx}{x}$$

anwendbar. Man denke sich nämlich die obere Gränze als ein unendlich hohes Vielfache von π, und zerlege demgemäss das Integral in eine unendliche Reihe anderer, welche sämmtlich nach dem Intervall $\frac{\pi}{2}$ fortschreiten. Es wird dann, $f(\sin x,\ \cos x)$ kurz mit $f(x)$ bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty f(x)\frac{dx}{x}\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{dx}{x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\frac{dx}{x}+\int_{\pi}^{(1+\frac{1}{2})\pi} f(x)\frac{dx}{x}+\int_{(1+\frac{1}{2})\pi}^{2\pi} f(x)\frac{dx}{x}\\ &+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Ein Paar auf einander folgende Glieder dieser Reihe mit dem allgemeinen Index r würden sein:

$$\int_{(r-1+\frac{1}{2})\pi}^{r\pi} f(x)\,\frac{dx}{x}\ \text{und} \int_{r\pi}^{(r+\frac{1}{2})\pi} f(x)\frac{dx}{x}.$$

Im ersten setze man $x=r\pi-z$, im zweiten $x=r\pi+z$, so werden dieselben

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(r\pi-z)\,\frac{dz}{r\pi-z},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\pi+z)\,\frac{dz}{r\pi+z}.$$

Will man im ersten dieser Integrale die Gränzen vertauschen, so hat man demselben das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben; dadurch wird es wieder positiv und stellt sich mit dem zweiten unter die gemeinschaftliche Form

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(r\pi\pm z)}{r\pi\pm z}\,dz.$$

Wenden wir diese Transformation auf die Gleichung (18) an, indem wir r der Reihe nach $=1, 2, 3,$ u. s. w. nehmen und im ersten Inte-

grale z für x setzen, so erhalten sämmtliche Integrale auf der rechten Seite die gleichen Gränzen 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und können daher in ein einziges zusammengezogen werden, nämlich in das folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\infty f(x)\frac{dx}{x} \\ =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(z)}{z}+\frac{f(\pi-z)}{\pi-z}+\frac{f(\pi+z)}{\pi+z}+\frac{f(2\pi-z)}{2\pi-z}+\ldots\right]dz. \end{array}\right\} (19)$$

Es kommt jetzt auf die besondere Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ an, wenn die unter dem Integralzeichen eingeklammerte Reihe summirbar sein soll. Dass hierbei die Funktion immer noch ziemlich allgemein bleiben kann, wird man sogleich sehen.

§. 6.

Man nehme erstlich $f(x)=\sin x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)$, wobei φ eine neue beliebige Funktion bedeutet. Da dieselbe nur die Quadrate von sin. und cos. enthält, so ändert sie ihren Werth nicht, wenn man $\pi-z$, $\pi+z$, $2\pi+z$ u.s.w. für x setzt. Die Zeichenfolge in der Reihe (19) hängt jetzt bloss noch von $\sin x$ ab, und da dieser positiv von 0 bis π, negativ von π bis 2π und so abwechselnd ist, so wird das erste Paar Glieder jener Reihe positiv, das zweite Paar negativ, und so paarweis weiter. Wir haben daher

$$\int_0^\infty \sin x\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{\pi-z}-\frac{1}{\pi+z}-\frac{1}{2\pi-z}+\ldots\right]\sin z\,\varphi(\sin^2 z,\ \cos^2 z)dz.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe ist aber nach einem bekannten Satze $=\frac{1}{\sin z}$, folglich wird

$$\int_0^\infty \sin x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\sin^2 z,\ \cos^2 z)dz. \quad (20)$$

Da das Integral auf der rechten Seite viel einfacher als jenes auf der linken ist, so wird es leicht sein, die Funktion φ so zu wählen, dass man den Werth des Integrales rechts angeben kann.

Es sei z. B.

$$\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)=(\sin^2 x)^m.(\cos^2 x)^n,$$

so ist die rechte Seite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}z\,.\,\cos^{2n}z\,dz.$$

Für $\sin z = x$ geht dieses Integral in das folgende über:

$$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx$$

und dieses verwandelt sich für $x^2 = y$ in

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{2m-1}{2}}(1-y)^{\frac{2n-1}{2}} dy,$$

dessen Werth sich nach der bekannten Formel

$$\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

leicht angeben lässt, wenn man $p = m + \frac{1}{2}$, $q = n + \frac{1}{2}$ nimmt. Wir haben daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} z \,.\, \cos^{2n} z\, dz = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+n+1)},$$

und

$$\int_0^\infty \sin^{2m+1} x \,.\, \cos^{2n} x \,.\, \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+n+1)}. \quad (21)$$

Für ganze positive m und n erhält man hieraus

$$\int_0^\infty \sin^{2m+1} x . \cos^{2n} x . \frac{dx}{x} = \frac{1.3.5....(2m-1).1.3.5....(2n-1)}{2.4.6......(2m+2n)} . \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Für $n = 0$ scheint die Formel unbrauchbar zu sein. Man erhält für diesen Fall unmittelbar aus (21):

$$\int_0^\infty \sin^{2m+1} x \,.\, \frac{dx}{x} = \frac{1.3.5....(2m-1)}{2.4.6....(2m)} . \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Man darf die Formel (21) auch für gebrochene m und n benutzen, sobald die Nenner dieser Brüche ungerade Zahlen sind. Denn wäre im Gegentheil z. B. $m = \frac{p}{2q}$, $n = \frac{p'}{2q'}$, so würde

$$\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x) = \sin^{\frac{p}{q}} x \,.\, \cos^{\frac{p'}{q'}} x$$

sein, und diese Funktion hat im Allgemeinen nicht mehr die Eigenschaft, ihren Werth zu behalten, wenn man $r\pi \pm z$ für x setzt, wie dies zur Aufstellung des Theoremes (20) nöthig war.

Ein anderes bemerkenswerthes Beispiel für die Anwendung des Satzes (20) liefert die Annahme:

$$\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x) = \frac{1}{(1+k)^2 - 4k\sin^2 x} = \frac{1}{1+2k\cos 2x + k^2}.$$

Auf der rechten Seite steht dann das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1+2k\cos 2z+k^2},$$

welches für $z=\frac{x}{2}$ in das folgende übergeht:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2k\cos x+k^2},$$

dessen Werth nach der bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arctan} \frac{(a-b)\tan\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2-b^2}},\ a>b$$

gefunden werden kann. Für jedes beliebige k ist hier $1+k^2 > 2k$, folglich $a>b$, ferner $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1-2k^2+k^4}$, wofür man $1-k^2$ oder k^2-1 setzen wird, jenachdem $k<$ oder >1 ist.

Wir erhalten zuletzt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+2k\cos 2x+k^2} \cdot \frac{dx}{x} = \pm\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-k^2} \qquad (24)$$

wobei das obere Zeichen für den Fall $k<1$ und das untere für den Fall $k>1$ gilt.

§. 7.

In dem allgemeinen Theorem (19) nehmen wir jetzt

$$f(x)=\tan x \,.\, \varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x).$$

Die Zeichenfolge in der dortigen Reihe richtet sich jetzt nach der tan., und da diese in jedem Quadranten ihr Vorzeichen wechselt, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\infty} \tan x \,.\, \varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{z}-\frac{1}{\pi-z}+\frac{1}{\pi+z}-\frac{1}{2\pi-z}+\ldots\ldots\right]\tan z \,.\, \varphi(\sin^2 z,\ \cos^2 z)\,dz.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe ist aber $=\cot z=\frac{1}{\tan z}$, folglich haben wir:

$$\int_0^{\infty} \tan x \,.\, \varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin^2 z,\ \cos^2 z)\,dz. \qquad (25)$$

Vergleichen wir dies mit dem früher gewonnenen Resultate (20), so ergiebt sich:

$$\int_0^{\infty} \tan x \,.\, \varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \sin x \,.\, \varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x} \qquad (26)$$

so dass man also in den Gleichungen des vorigen Paragraphen, ohne sie zu stören, den Faktor $\tan x$ für $\sin x$ substituiren darf. Z. B. aus (22):

$$\int_0^\infty \sin^{2m+1} x \,.\, \cos^{2n-1} x \frac{dx}{x} = \frac{1.3.5\ldots(2m-1).1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2m+2n)} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

Ebenso folgt aus

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

auch

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

und aus dem Integral (24):

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{1+2k\cos 2x + k^2} \cdot \frac{dx}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-k^2}. \quad (29)$$

§. 8.

Während wir bisher in der allgemeinen Reduktionsformel für f die Funktion φ einmal mit dem Faktor $\sin x$, das andere Mal mit dem Faktor $\tan x$ multiplicirt gesetzt haben, können wir auch

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x}\varphi(\sin^2 x, \cos^2 x) \text{ und} = \frac{1}{\tan x}\varphi(\sin^2 x, \cos^2 x)$$

nehmen. Die Zeichenfolgen in der Reihe (19) sind dann die nämlichen wie in den Beispielen der Paragraphen 5. und 6.; man erhält leicht

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sin^2 x, \cos^2 x)}{\sin x} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(\sin^2 z, \cos^2 z)}{\sin^2 z} dz \quad (30)$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sin^2 x, \cos^2 x)}{\tan x} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(\sin^2 z, \cos^2 z)}{\tan^2 z} dz$$

oder, weil $\frac{1}{\tan^2 z} = \frac{1}{\sin^2 z} - 1$ ist,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \cot x \,.\, \varphi(\sin^2 x, \cos^2 x)\frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(\sin^2 z, \cos^2 z)}{\sin^2 z} dz - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin^2 z, \cos^2 z)\, dz \end{aligned}\right\} . \quad (31)$$

Zu diesen Sätzen (30) und (31) wird man eben so leicht passende Beispiele finden, wie sie sich für das Theorem (20) früher darboten.

§. 9.

Ein anderes bemerkenswerthes Beispiel für die Anwendung der Gleichung (19) liefert die Annahme:

$$f(x) = l(\frac{1+\tan x}{1-\tan x})^2.$$

Man findet nämlich

$$f(z) = f(\pi + z) = f(2\pi + z) = f(3\pi + z),$$

$$f(\pi - z) = f(2\pi - z) = f(3\pi - z) \ldots = l(\frac{1-\tan z}{1+\tan z})^2 = -f(z),$$

mithin

$$\int_0^\infty l(\frac{1+\tan x}{1-\tan x})^2 \frac{dx}{x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{z} - \frac{1}{\pi - z} + \frac{1}{\pi + z} - \frac{1}{2\pi - z} + \ldots\ldots] \, l(\frac{1+\tan z}{1-\tan z})^2 dz$$

oder, weil die Summe der eingeklammerten Reihe $= \frac{1}{\tan z}$ ist,

$$\int_0^\infty l(\frac{1+\tan x}{1-\tan x})^2 \frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\frac{1+\tan z}{1-\tan z})^2 \frac{dz}{\tan z}. \quad (32)$$

Setzt man in dem Integrale rechts $\tan z = u$, also $z = \text{Arctan}\, u$, so wird $dz = \frac{du}{1+u^2}$, und wenn $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$ geworden ist, hat u die Werthe 0 und ∞ angenommen. Also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\frac{1+\tan z}{1-\tan z})^2 \frac{dz}{\tan z} = \int_0^\infty l(\frac{1+u}{1-u})^2 \frac{du}{u(1+u^2)}. \quad (33)$$

Wollen wir jetzt den Logarithmus in eine Reihe verwandeln, so müssen wir dieselbe so einrichten, dass sie für alle Werthe von $u = 0$ bis $u = \infty$ convergirt. Dies geschieht leicht durch die Bemerkung, dass

$$l(\frac{1+u}{1-u})^2 = l\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1-\frac{2u}{1+u^2}}$$

$$= 2[\frac{2u}{1+u^2} + \tfrac{1}{3}(\frac{2u}{1+u^2})^3 + \tfrac{1}{5}(\frac{2u}{1+u^2})^5 + \ldots]$$

ist. Denn die vorstehende Reihe convergirt immer, wenn $\frac{2u}{1+u^2}$ ein ächter Bruch, d. h. $1+u^2 > 2u$ ist, was aber für jedes belie-

bige u stattfindet. Substituiren wir diese Reihe in das Integral (33) und integriren jedes einzelne Glied, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2 \frac{du}{u(1+u^2)}\\ =\frac{2^2}{1}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^2}+\frac{2^4}{3}&\int_0^\infty \frac{u^2du}{(1+u^2)^4}+\frac{2^6}{5}\int_0^\infty \frac{u^4du}{(1+u^2)^6}+\ldots\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe wäre, abgesehen vom Coefficienten,

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}du}{(1+u^2)^{2n+2}},$$

welches für $u=\sqrt{z}$ in das folgende übergeht:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{n+\frac{1}{2}-1}dz}{(1+z)^{2n+2}},$$

dessen Werth sich nach der in §. 2. angeführten Formel von den Gammafunktionen angeben lässt. Derselbe ist nämlich für $p=n+\frac{1}{2}$, $p+q=2n+2$, also $q=n+\frac{3}{2}$:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(2n+2)}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1.3.5\ldots.(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}}{1.2.3\ldots\ldots(2n+1)}$$

$$=\frac{\pi}{2^{2n+2}}\cdot\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}.$$

Für $n=0$ hat man unmittelbar

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,.\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1}=\frac{\pi}{2^2}.$$

Substituiren wir diese Werthe für $n=0, 1, 2, 3\ldots$ in die Gleichung (34), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2\frac{du}{u(1+u^2)}=\pi\left\{\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7}+\ldots\right\}$$

$$=\pi\cdot\frac{\pi}{2},$$

folglich vermöge der Gleichungen (33) und (32):

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{2}. \quad (35)$$

Nimmt man ähnlich

$$f(x)=l\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2,$$

so findet sich

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2 \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{2}, \quad (36)$$

wie man auch mit Hülfe der Formel (23) ableiten kann, wenn man den Logarithmus in eine Reihe verwandelt und jedes einzelne Glied integrirt. Man darf hier eine solche Reihenentwickelung annehmen, weil die Reihe

$$l\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2 = 4\{\sin x + \tfrac{1}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x + \ldots\}$$

convergirt, indem $\sin x$ ein ächter Bruch ist. Wollte man dagegen in der Formel (35) für den Logarithmus die Reihe

$$4\{\tan x + \tfrac{1}{3}\tan^3 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x + \ldots\}$$

setzen, so würde ein ganz falsches Resultat erscheinen, weil die Reihe nicht für alle Werthe, welche x in dem Intervalle 0 bis ∞ erhalten kann, convergirt.

Ebenso unrichtig würde es sein, den Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x} dx$$

dadurch finden zu wollen, dass man für $\tan x$ die Reihe

$$\frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_3 x^3 + \ldots\ldots$$

setzte und jedes einzelne Glied integrirte. Man würde finden

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x} dx = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 \frac{\infty}{1} + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_3 \frac{\infty^3}{3} + \ldots\ldots$$

d. h. $=\infty$, weil alle Glieder positiv sind. Das Resultat erweist sich, mit Formel (28) verglichen, als falsch; was daher rührt, dass jene Reihe nur dann $\tan x$ zur Summe hat, wenn x nicht $> \frac{\pi}{2}$ ist. Für $x = \frac{\pi}{2}$ divergirt sie, darüber hinaus um so mehr, während $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$ ist. — Wieder ein Beispiel, wie vorsichtig man beim Gebrauch unendlicher Reihen sein muss!

XXXIV.

Geometrischer Lehrsatz.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

In dem Dreieck BAC (Taf. IV. Fig. 6.) halbiren die Linien BE und CD die Winkel ABC und ACB, überdies ist $BE=CD$; man soll beweisen, dass $AB=AC$, also das Dreieck BAC gleichschenklich ist*).

Setzen wir $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $DC=\beta$, $BE=\gamma$, so ist nach einem bekannten geometrischen Satze:

$$\beta^2=\frac{ac\{a+b+c\}\{a+(c-b)\}}{(a+c)^2},$$

$$\gamma^2=\frac{ab\{a+b+c\}\{a-(c-b)\}}{(a+b)^2}.$$

Weil nach der Voraussetzung $\beta=\gamma$, so ist, wenn wir $c-b$ mit x bezeichnen, $a+(c-b)=a+x$, $a-(c-b)=a-x$, $c=b+x$; $a+c=a+b+x$, und daher:

$$\frac{(b+x)(a+x)}{(a+b+x)^2}=\frac{b(a-x)}{(a+b)^2},$$

woraus wir die Gleichung

$$\{(a+b)^2(a+2b)+(a+b)(a+3b)x+bx^2\}x=0\ \ldots\ (1)$$

erhalten.

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet

a) wenn : $x=0$, oder $c-b=0$;

b) „ „ $(a+b)^2(a+2b)+(a+b)(a+3b)x+bx^2=0$

ist. Aus a) folgt $c=b$, was zu beweisen war. Aus b) folgt, dass auch

$$bx^2+(a+b)(a+3b)x+(a+b)^2(a+2b)=0.$$

---

*) Der Herr Verfasser des vorliegenden Aufsatzes schreibt mir bei dessen Uebersendung, dass ihm der obige Lehrsatz von Herrn Prof. Steiner zu Berlin, als derselbe ihn auf seiner letzten Schweizerreise besuchte, mit der Bemerkung mitgetheilt worden sei, dass der Beweis dieses Lehrsatzes, ungeachtet dessen scheinbarer Geringfügigkeit, doch mit einigen Schwierigkeiten verbunden sei. Herrn Professor Steiner sei aber der Lehrsatz vor zwei Jahren von Herrn Prof. Lehmus in Berlin vorgelegt worden. G.

Sind x' und x'' die Wurzeln dieser Gleichung, so ist nach einigen Reductionen:

$$x' = -(a+b) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x'' = -\frac{(a+b)(a+2b)}{b} \ldots\ldots (3)$$

Es folgt also aus (2) nach den obigen Annahmen, dass

$$c - b = -(a+b) \text{ oder } c = -a \ldots\ldots (4)$$

sei, und aus (3), dass

$$c - b = -\frac{(a+b)(a+2b)}{b} \text{ also } c = -\frac{\{(a+b)^2+ab\}}{b} \ldots (5)$$

Aus (4) geht aber hervor, dass, wenn wir $AB' = BC$ machen und B' mit C verbinden, alsdann die Winkel $B'BC$ und $B'CB$ durch die Linien BE' und CD' halbiren, endlich diese bis zu ihren respectiven Durchschnittspunkten E' und D' mit CB' und BB' verlängern, auch in diesem Fall

$$BE' = CD'$$

sei.

Endlich folgt noch aus (5), dass, wenn wir zu b u. $\sqrt{(a+b)^2+ab}$ die dritte Proportionale suchen, und diese auf die Verlängerung der Linie BA von A nach B'' tragen, so dass also $AB'' = \frac{\{(a+b)^2+ab\}}{b}$ ist, alsdann B'' mit C verbinden, und die Winkel $B''BC$, $B''CB$ durch die Linien BE'' und CD'', welche AB und AC in D'' und E'' treffen, halbiren, auch in diesem Fall $BE'' = CD''$ sei.

Eine zweite mehr elementare, aber nur den einzigen verlangten Fall beweisende Deduction des Satzes ist folgende:

Wir setzen folgende geometrische Sätze als bekannt voraus:

$$BC : AB = EC : AE \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$BC : AC = BD : AD \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{und } BE^2 = BC \times AC - BD \times AD \ldots\ldots (3)$$

$$CD^2 = BC \times AB - EC \times AE \ldots\ldots (4)$$

Da nun $BE = CD$, so folgt aus (3) und (4)

$$BC \times AC - BD \times AD = BC \times AB - EC \times AE \ldots (5)$$

Weil aber $AB = BD + AD$, und $AC = EC + AE$ ist, so erhalten wir leicht aus (1), (2) und (5)

$$BC \times EC + BC \times AE - BD \times AD = BC \times BD + BC \times AD - EC \times AE \ldots (6)$$

$$BC \times AE = EC\,(BD + AD),$$

$$BC \times AD = BD\,(CE + AE);$$

folglich wird auch No. 6 zu:

$$BC \times EC + AD \times EC + AE \times EC = BC \times BD + AE \times BD + AD \times BD \text{ oder}$$

$$EC \times \{BC + AD + AE\} = BD \times \{BC + AD + AE\} \text{ oder}$$

$$EC = BD.$$

In den Dreiecken BEC und BDC sind daher alle Seiten gleich, mithin diese congruent, und daher $\angle ECB = \angle DBC$, folglich auch $AB = AC$, was zu beweisen war.

XXXV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Ein geometrischer und ein arithmetischer Satz.

Von dem Herrn Professor Pross an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Satz 1.

Kennt man von einem geradlinigen Dreieck den Halbmesser r des einbeschriebenen, den R des umschriebenen Kreises und den ϱ eines der äussern Berührungskreise, und setzt der Kürze wegen $\sqrt{\frac{r+4R-\varrho}{\varrho-r}}=m$, so findet man die drei Seiten des Dreiecks durch die Gleichung:

$$x^3-2m\varrho x^2+(m^2\varrho^2+r^2+4Rr)x-4m\varrho Rr=0.$$

Satz 2.

Eine decadische Zahl ist durch $10.n+a$ theilbar, wenn der Unterschied zwischen dem $n$fachen der letzten und dem $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10.n+a$ theilbar ist; oder sie ist durch $10n-a$ theilbar, wenn die Summe aus dem $n$fachen der letzten und dem $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10.n-a$ theilbar ist. (In beiden Fällen bezeichnet n jede beliebige ganze Zahl von 0 an und a die einfachen Ziffern von 0 bis 9.)

So ist z. B.

301 theilbar durch $43=40+3=10.4+3$, weil
$30.3-4.1=86$ durch 43 theilbar ist.
261 theilbar durch $29=30-1=3.10-1$, weil
$3.1+26.1=29$ durch 29 theilbar ist.
1157 theilbar durch $89=90-1=9.10-1$, weil
$7.9+1.115=178$ durch 89 theilbar ist.
816 theilbar durch $68=70-2=7.10-2$, weil
$7.6+2.81=204$ durch 68 theilbar ist.

Lehrsatz von den Binomialkoeffizienten.

Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.

Bezeichnet μ eine beliebige Grösse, n eine ganze positive Zahl, so ist die Summe der $(n+1)$gliedrigen Reihe

$$\frac{\mu_0 n_0}{(\mu-n)_0}-\frac{\mu_1 n_1}{(\mu-n+1)_1}+\frac{\mu_2 n_2}{(\mu-n+2)_2}-\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}\mu_{\frac{1}{2}n}}{\mu_n} \text{ für ein gerades } n$$

und $=0$ für ein ungerades n.

Wie lässt sich dieser Satz, der gelegentlich gefunden wurde, auf elementarem Wege beweisen?

XXXVI.

Miscellen.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Steichen an der École militaire de Belgique zu Brüssel an den Herausgeber.

J'ai lu dans le dernier No. de votre estimable Journal *) l'énoncé d'un principe général de mécanique, qui ne me paraît guères nouveau (si toutes fois j'en ai bien compris le sens), et que j'établis de la manière suivante dans mon cours de mécanique, que je professe à l'École militaire. Quand des forces appliquées à un Système quelconque de corps ne se font pas équilibre, il y aura mouvement après un temps quelconque t, et pendant l'instant suivant dt, ces forces modifieront infiniment peu les vitesses des différentes masses du système; mais ces accroissements de vitesse instantanés donneront lieu à des réactions, et l'équilibre subsiste entre les forces sollicitantes et ces forces de reaction dues à l'inertie de la matière: En effet les forces modificatrices transmettent par leur action immédiate ou par le moyen des lois de liaison des efforts, les quels, s'ils étaient pris en sens contraire, feraient équilibre aux forces proposées, puisqu'ils empêcheraient ces modifications de vitesse: mais

*) Literarischer Bericht. Nr. XII. S. 184. G.

ces efforts ainsi envisagés, sont précisement la mesure des réactions d'inertie. Donc il y a équilibre entre les forces sollicitantes et les réactions d'inertie. On voit que le principe est la généralisation naturelle d'un principe qui date de Newton, et qui est connu sous le nom d'égalité de l'action et de la réaction; l'idée de cette généralisation, je me hâte de le dire, ne m'appartient même pas; je l'ai puisée dans le cours de mécanique malheureusement trop peu répandu encore de Monsieur Poncelet; mais je pars de là pour établir ensuite toutes les autres notions de dynamique et pour montrer le moyen de mettre en équations tous les problêmes possibles; ce qui dispense du fameux principe de D'Alembert qui me paraît moins clair, moins direct, et surtout plus embarrassant dans les applications. Traduisons maintenant l'enoncé en formule. Soient P, P', P''.... les forces appliquées à de certains points A, A', A'', ... d'un système de masses m, m', m'', m'''....; v, v', v'', v'''.... les vitesses de celles-ci après le temps t, et dv, dv', dv'', dv'''.... les accroissements de vitesse instantanés engendrés par les forces données; la masse m éprouve donc de la part de ces forces un effort de pression dans le sens de v donné par l'équation $\varphi = m \cdot \frac{dv}{dt}$. En admettant une notation analogue pour les autres masses, on voit évidemment que l'équilibre doit subsister entre les forces P, P', P''.... et entre les forces $-\varphi$, $-\varphi'$, $-\varphi''$, $-\varphi'''$...., qui seraient appliquées à m, m', m'', m'''...., puisqu'ainsi les impressions éprouvées par ces masses seraient détruites par des forces égales, et opposées: donc en nommant de, de', de'', de'''.... les chemins décrits en vertu des vitesses acquises v, v'...., pendant le temps dt, on aura par le principe des vitesses virtuelles effectives:

$$Pdp + P'dp' + P''dp'' + \dots - \varphi . de - \varphi' . de' - \varphi'' . de'' - \varphi''' de''' \dots \text{etc.} = 0$$

ou abréviativement, et à cause de $de = vdt$, $de' = v'dt$....,

$$\Sigma . Pdp - \Sigma . m . \frac{dv}{dt} . vdt = \Sigma . Pdp - \Sigma . m . \frac{dv}{dt} . de = 0,$$

équation qui exprime le principe des forces vives instantanées; qui conduit aussi par l'intégration à celui des forces vives finies, et qui se trouve aussi démontrée dejà dans le cours de Mr. Poncelet. Comme on a, en nommant Q, Q', Q''.... les poids des masses m, m', m''...., amenées à la surface terrestre, on évaluera ces dernières par les équations: $m = \frac{Q}{g}$, $m' = \frac{Q'}{g}$...., g exprimant la vitesse acquise par un grave pendant une seconde: ce qui permet d'écrire aussi:

$$0 = \Sigma . Pdp - \Sigma \frac{Q}{gdt} . de . dv = \Sigma . Pdp - \frac{1}{gdt} . \Sigma . Q . dv . de, \dots$$

équation qui exprime sans doute l'énoncé même du principe en question: mais supposons maintenant qu'après le temps t on puisse anéantir tout-à-coup les vitesses des masses m, m', m''.... sans troubler toutefois la figure du système; dès lors on pourra lui imprimer un déplacement arbitraire, dans lequel les points d'application A, A', A''.... décrivent les chemins δp, $\delta p'$, $\delta p''$.... suivant les

lignes d'action des forces $P, P', P'', P'''\ldots$, et ceux des points d'application $m, m', m''\ldots$ des forces $-\varphi, -\varphi', -\varphi'', -\varphi'''\ldots$ decriront aussi des chemins arbitraires $\delta e, \delta e', \delta e'', \delta e'''\ldots$ et l'on aura encore:

$$\Sigma . P\delta p - \Sigma . \varphi . \delta e = 0, \text{ ou } \Sigma P\delta p - \frac{1}{gdt} . \Sigma . Q . dv . \delta e = 0$$

et cette équation est plus générale que celle donnée d'abord. Au reste ce-ci ne saurait en rien porter atteinte au mérite de l'ouvrage annoncé, et il n'y a sans doute pas d'inconvénient, Monsieur, de voir présenté quelques observations à cet égard.

Si à l'avenir les remarques de ma part, sur la mécanique rationnelle et appliquée, ayant quelque mérite de nouveauté peuvent faire plaisir à vos lecteurs, je prendrai la liberté de vous en communiquer plusieurs; pour le moment je me bornerai à ce qui suit. Depuis long-temps je m'étais apperçu de la faute commise par Poisson aux sujet des axes principaux et qui a été signalée dans votre journal. En effet dans la théorie générale que j'établis sur les axes principaux des corps, et qui comprend dans les consequences tous les résultats, trouvés anterieurement par Poisson, Binet et Ampère, se démontre la propriété suivante: Toutes les fois qu'un solide est pourvu d'un point fixe, situé dans l'un de ses trois plans principaux du centre; l'un des trois axes permanents de rotation en ce point est normal au plan, et les deux autres se trouvent dans ce même plan ou ils occupent une position qu'on peut calculer. Ce théorème conduit à une conclusion en effet opposée à celle de Poisson, comme on l'a remarqué. Voici un autre théorème sur cette matière, qui paraît également nouveau: Les trois axes permanents de rotation, relatifs à un point fixe quelconque d'un solide de révolution, sont l'un perpendiculaire au plan, déterminé par ce point et par l'axe de révolution, et les deux autres occupent dans ce plan une position que notre théorie permet de calculer. Dans un solide homogène de 1ère classe un point fixe quelconque (O), intérieur ou extérieur, et différent du centre d'inertie (I) est ce que je nomme un centre de radiation plane normale d'axes principaux: c'est-à-dire que tous les axes en ce point situés dans un plan normal à la ligne centrale OI sont des axes permanents de rotation du solide, et ils correspondent tous à des moments d'inertie du corps, égaux entr'eux.

Pour le moment je ne pousserai pas plus loin cette énumération. Mais si des resultats de ce genre pourront vous faire plaisir, Monsieur, et être utiles à vos lecteurs, je vous prierai de bien vouloir m'en donner avis, et dès lors je mettrai tout mon travail en ordre, et m'empresserai de vous le communiquer *). Je termine par une dernière remarque; elle se rapporte à la 3ème loi de Kepler. En admettant cette loi comme un résultat d'observation, les auteurs

---

*) Ich sehe mit Vergnügen diesen Mittheilungen entgegen und werde sie sehr gern in das Archiv aufnehmen, so weit es irgend der Raum gestattet. Gr.

de mécanique en concluent que la force attractive du soleil sur deux planètes de même masse et à même distance, est la même, partant que l'attraction inhérente à la matière inerte est indépendante de la nature chimique des corps attirés. Pour notre part, nous pensons qu'il vaudrait mieux renverser la thèse, et raisonner de la manière suivante: Dans la manière de mesurer les forces on peut et l'on doit déjà admettre tacitement que l'intensité d'une force évaluée en nombre, est proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle engendre en l'unité de temps, et qu'on a en général $\varphi = m\frac{dv}{dt}$; équation où l'on fait abstraction de la nature chimique de la masse, puisque celle-ci n'entre dans la formule que par sa quantité. Pour prouver maintenant qu'il en doit être ainsi, on a à faire voir que toutes les forces sont comparables à des poids; car l'expérience prouve que l'accélération terrestre est la même pour tous les corps que nous manions ici bas, et que par suite elle est indépendante de la nature chimique de ces corps. Donc puisque l'induction nous porte à considérer la pesanteur terrestre comme un cas particulier de la gravitation universelle, il faut qu'en général celle-ci soit indépendante de la nature des corps attirés; donc il devient évident ainsi qu'à distances égales et sur des masses égales l'action du centre attractif est la même. Mais en nommant P_1 l'accélération d'une planète placée à une distance initiale r_1, T la durée de sa revolution sydérale, a le demi-grand axe de son orbite, on a par la théorie connûe: $P_1 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a^3}{r_1^2}$: pour une autre planète, placée à une distance initiale r'_1, on aura encore $P'_1 = \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 \frac{a'^3}{r_1'^2}$; partant:

$$T^2 : T'^2 = \frac{a^3}{P_1 r_1^2} : \frac{a'^3}{P'_1 . r'^2_1}.$$

Mais puisque les accélérations P_1, P'_1 sont indépendantes de la nature des masses planétaires, la loi des forces inversement proportionnelles aux quarrés des distances s'observe, et l'on aura parsuite $P'_1 . r'^2_1 = P_1 r_1^2$: partant: $T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3$, ce qui démontre rigoureusement la troisième loi de Kepler.

Berichtigung.

Seite 240 ganz am Ende setze man **kömmt** statt **könnte**. — Auf Seite 266, Zeile 17 und 35, und auf Seite 267, Zeile 10 und 25, setze man statt der Nummern 1), 2), 3), 4) die Nummern 1., 2., 3., 4.

XXXVII.

Mittheilungen über die Construction von Tangenten, Krümmungshalbmessern und Normalen an Curven, deren Natur völlig unbekannt ist. Rectification und Quadratur der Kreisevolvente und der entwickelbaren Schraubenfläche.

Von

Herrn Wilhelm Pressel,

Ingenieur-Eleven auf der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Ehe ich auf die Sache selbst eingehe, glaube ich Folgendes über die allgemeinen Eigenschaften der Curven vorausschicken zu müssen.

Ich denke mir eine jede Curve zusammengesetzt aus einer Reihe von unendlich kleinen, gleich langen geradlinigen Elementen; alsdann wird bei jedem Punkte die Verlängerung des zunächstliegenden Elements die Richtung der Curve in besagtem Punkte angeben und diese Verlängerung heisst alsdann die Tangente. Man kann zur Tangente auch auf folgende Art gelangen: man zieht durch den auf der Curve angenommenen Punkt eine Anzahl Secanten, so werden auf denselben Sehnen von verschiedener Länge abgeschnitten, und man kann alsdann diejenige Secante die Tangente für den gegebenen Punkt nennen, auf welcher eine unendlich kleine Sehne abgeschnitten wird.

Denkt man sich nun eine Curve als zusammengesetzt aus unendlich vielen gleich grossen geradlinigen Elementen, so werden diese Elemente Winkel mit einander bilden, die man Contingenzwinkel nennt, und welche dazu dienen, die Krümmung der Curve in jedem beliebigen Punkte zu messen. Da nämlich die Elemente der Curve gleich lang sind, so werden im Allgemeinen die Contingenzwinkel verschieden sein, und man kann die Krümmung einer Curve in einem gegebenen Punkte dem zugehörigen Contingenz-

winkel proportional setzen; denn man sieht, dass die Curve sich desto mehr biegt, je grösser der Contingenzwinkel ist.

Die Krümmung einer Curve in einem beliebigen Punkte wird aber gewöhnlich durch den Halbmesser eines Kreises gemessen, welcher in dem angenommenen Punkte die zwei zunächstliegenden Elemente mit der Curve gemeinschaftlich hat, oder zwischen welchem Kreise und der gegebenen Curve eine Osculation der zweiten Ordnung Statt findet. Diesen Kreis nennt man den **Krümmungskreis**, seinen Halbmesser den **Krümmungshalbmesser** und seinen Mittelpunkt den **Krümmungsmittelpunkt** für den angenommenen Punkt auf der gegebenen Curve.

Es seien nun AB und AC (Taf. VI. Fig. 1.) die Elemente einer Curve, welche sich in dem Punkte A begegnen, der Contingenzwinkel $BAD = \varphi$, so muss man also, um den Krümmungshalbmesser zu erhalten, den Mittelpunkt eines Kreises bestimmen, von welchem AB und AC zwei Elemente, d. h. zwei unendlich kleine Sehnen sind. Man halbire beide Elemente in F und G und errichte in diesen Punkten auf denselben Perpendikel, so wird der Punkt E, in welchem sich dieselben schneiden, der Mittelpunkt des Krümmungskreises und also EA der Krümmungshalbmesser sein. Man sieht nun leicht, dass der Winkel FEG dem Contingenzwinkel φ gleich ist, und man hat demnach

$$FA = EA \sin\frac{\varphi}{2},\ AB = 2FA = 2EA \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Da aber $\frac{\varphi}{2}$ ein unendlich kleiner Winkel ist, so kann man statt seines Sinus den Bogen selbst setzen, also:

$$AB = 2EA \,.\, \frac{\varphi}{2} = EA \,.\, \varphi.$$

Bezeichnet man nun die Länge der Elemente AC und AB mit ds, den Krümmungshalbmesser mit β, so hat man nach dem Obigen

$$1)\ ds = \beta \,.\, \varphi,$$

$$2)\ \beta = \frac{ds}{\varphi}.$$

Da aber nach der Annahme die Krümmung einer Curve dem Contingenzwinkel proportionirt ist, so sieht man aus No. 2, dass dieselbe auch umgekehrt proportionirt ist dem Krümmungshalbmesser.

Erste Aufgabe.

Es ist eine Curve UV (Taf. VI. Fig. 2.) gegeben (verzeichnet), deren geometrische Eigenschaften unbekannt sind, es soll für einen beliebigen Punkt M derselben die Tangente und der Krümmungshalbmesser construirt werden.

(Leroy, Géometrie descriptive. §. 572, 676.)

Erste Auflösung.

Man ziehe durch den Punkt M verschiedene Sehnen MA, MB, $MC\ldots.$ MD, $ME\ldots.$, verlängere dieselben und mache $Aa = Bb = Cc = \ldots. = Dd = Ee = \ldots.$ alle gleich einer beliebig angenommenen Länge l, und verbinde die Punkte $a, b, c \ldots. d, e \ldots.$ durch eine stetige Curve $U'V'$. Bezeichnet nun (Taf. VI. Fig. 3. und Fig. 4.) P einen beliebig auf der Curve UV angenommenen Punkt und p seinen entsprechenden Punkt auf $U'V'$, s die Länge der Sehne MP, so hat man:

$$Mp = l + s \text{ (Taf. VI. Fig. 3.)}, \quad Mp = l - s \text{ (Taf. VI. Fig. 4.)}$$

Nimmt man nun den Punkt p unendlich nahe bei M, so wird s im Verhältniss zu l unendlich klein und kann also vernachlässigt werden. Bezeichnet nun (Taf. VI. Fig. 2.) m den dem Punkt M entsprechenden Punkt auf $U'V'$, so hat man $Mm = l + ds$ oder $= l$. Man erhält also den Punkt m, indem man von M aus mit dem Halbmesser l einen Kreis beschreibt; alsdann wird der Punkt, in welchem dieser $U'V'$ schneidet, der gesuchte Punkt m sein, und verbindet man diesen Punkt mit M, so ist diess die Tangente für letzteren Punkt.

Es seien nun $MA = MB = ds$ (Taf. VI. Fig. 5.) die Elemente der Curve UV, welche sich in dem Punkte M begegnen, so erhält man die entsprechenden Punkte a und b der Curve $U'V'$, indem man $Aa = Bb = l$ macht, so dass also die Linie ab die Richtung der Tangente des Punktes m der Curve $U'V'$ angibt. Fällt man von b aus das Perpendikel bb' auf Aa, so hat man:

$$bb' = Mb \sin \varphi, \quad Mb' = Mb \cos \varphi.$$

Da aber φ ein unendlich kleiner Winkel ist, so kann man statt seines Sinus den Bogen selbst und statt seines Cosinus den Werth 1 setzen, so dass also:

$$\left.\begin{array}{l} bb' = Mb \,.\, \varphi \\ Mb' = Mb \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} bb' = (l - ds)\,\varphi \\ Mb' = l - ds. \end{array}\right.$$

Ferner ist $ab' = Ma - Mb' = (l + ds) - (l - ds) = 2ds$ und:

$$\text{tang } \alpha = \frac{bb'}{ab'} = \frac{(l - ds)\,\varphi}{2ds} = \frac{l\varphi}{2ds} - \frac{\varphi\, ds}{2ds} = \frac{l\varphi}{2ds} - \frac{\varphi}{2}.$$

Da aber der Krümmungshalbmesser β des Punktes $M = \frac{ds}{\varphi}$, so ist $\frac{\varphi}{ds} = \frac{1}{\beta}$ und also, wenn man diess substituirt:

$$\text{tang } \alpha = \frac{l}{2\beta} - \frac{\varphi}{2} \text{ oder (da } \frac{\varphi}{2} \text{ unendlich klein ist)}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{l}{2\beta} \text{ und } \beta = \frac{l}{2 \text{ tang } \alpha}.$$

Diese Formel kann dazu dienen, den Krümmungshalbmesser des Punktes M der Curve UV zu bestimmen (Taf. VI. Fig. 6.).

Construirt man nämlich die Tangente mT der Curve $U'V'$ (ganz auf dieselbe Art, wie diess bei der Construction der Tangente Mm geschehen ist), halbirt Mm in E, fällt von E aus ein Perpendikel EF auf die Tangente mT und verlängert dieses, bis es die Normale des Punktes M in O trifft, so ist dieser Punkt O der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M der Curve UV, denn es ist:

$$MO = \frac{ME}{\tang\alpha} = \frac{l}{2\tang\alpha}.$$

Anmerkung. Da die Länge l ganz beliebig ist, so kann man sich dieselbe ändern lassen, und man wird auf diese Art ein System von Curven $U'V'$ erhalten, welche sich alle in dem Punkt M schneiden. Ebenso erhält man alsdann auf jeder dieser Curven einen Punkt, welcher dem Punkte m entspricht. Construirt man nun für alle Curven $U'V'$ in den Punkten m die Tangenten, so werden diese eine neue Curve einhüllen. Ich habe die Gleichung derselben gesucht und gefunden, dass es eine apollonische Parabel ist, deren Axe die Normale des Punktes M, deren Scheitel dieser Punkt M selbst ist, und deren Brennpunkt die Entfernung 2β von dem Scheitel M hat, so dass also der Krümmungshalbmesser dieser Parabel für ihren Scheitel M 4mal so gross ist, als der der Curve UV für denselben Punkt.

Zweite Auflösung.

Man ziehe Sehnen durch den Punkt M (Taf. VI. Fig. 7.) und verlängere dieselben, bis sie eine beliebig angenommene gerade oder krumme Linie XY schneiden; alsdann mache man:

$$A''a = A'a = MA \qquad D''d = D'd = MD$$
$$B''b = B'b = MB \qquad E''e = E'e = ME$$
$$C''c = C'c = MC \quad \text{und} \quad \ldots$$
$$\vdots$$

verbinde die Punkte

$$A', B', C' \ldots\ldots D', E' \ldots\ldots$$
$$A'', B'', C'' \ldots\ldots D'', E'' \ldots\ldots$$

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte m der Curve XY schneiden und dieser Punkt, mit M verbunden, gibt alsdann die Tangente dieses letzteren Punkts.

Dritte Auflösung.

Durch die Punkte a, b, c .... d, e .... (Taf. VI. Fig. 8.), in

welchen die willkürlich angenommene XY durch die Sehnen des Punkts M geschnitten wird, ziehe man Linien parallel unter sich, jedoch in einer ganz beliebigen Richtung, und mache:

$$A'a = A''a = MA \qquad D'd = D''d = MD$$
$$B'b = B''b = MB \qquad E'e = E''e = ME$$
$$C'c = C''c = MC \quad \text{und} \quad \ldots$$

. . . .

verbinde alsdann die Punkte

$$A', B', C' \ldots . D', E' \ldots .$$
$$A'', B'', C'' \ldots . D'', E'' \ldots .$$

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte m der XY schneiden und Mm ist alsdann die gesuchte Tangente. (Diese beiden Auflösungsarten geben wieder Mittel, den Krümmungshalbmesser des Punktes M zu bestimmen, welche jedoch etwas verwickelter sind, als die erste.)

Zweite Aufgabe.

Es ist eine ebene Curve UV (Taf. VI. Fig. 9.) gegeben und ausserhalb derselben ein Punkt P, man soll von diesem Punkte aus eine Normale an die Curve UV ziehen.

(Leroy, Géometrie descr. §. 324, 325, 326.)

Auflösung.

Man beschreibe von dem Punkte P aus Kreise, welche die gegebene Curve in den Punkten $A, B, C \ldots . a, b, c \ldots .$ schneiden. Durch diese Punkte ziehe man Linien nach P und mache:

$$A'A = A''A = aa' = aa'' = \text{der Sehne } Aa$$
$$BB' = BB'' = bb' = bb'' = \text{der Sehne } Bb$$
$$CC' = CC'' = cc' = cc'' = \text{der Sehne } Cc$$

. . . .

Verbindet man nun die Punkte

$$A', B', C' \ldots . a', b', c' \ldots .$$
$$A'', B'', C'' \ldots . a'', b'', c'' \ldots .$$

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte M der gegebenen Curve schneiden, und diess ist alsdann der Fusspunkt der verlangten Normale.

Anmerkung. Man könnte auch auf den nach P gezogenen Geraden Stücke auftragen, welche so gross sind als die halben entsprechenden Sehnen. Auf diese Art würde man wieder zwei Curven erhalten, welche sich in dem verlangten Fusspunkte M schneiden, und zwar so, dass jede dieser neuen Curven die gegebene Curve unter einem Winkel von 45° und dieselben einander selbst unter einem Winkel von 90° schneiden; ferner haben die beiden Hilfscurven in dem Punkte M gleiche Krümmungshalbmesser, und zwar erhält man die Länge β dieser Krümmungshalbmesser als die Diagonale eines Quadrats, dessen Seite gleich dem doppelten Krümmungshalbmesser r der Curve UV für den Punkt M ist, d. h. $\beta = 2r\sqrt{2}$.

Dritte Aufgabe.

Es sei eine Curve UV von doppelter Krümmung gegeben, deren geometrische Eigenschaften unbekannt sind; es soll für einen beliebigen Punkt M derselben die Tangente und die Osculationsebene bestimmt werden.

(Leroy, Géom. descr. §. 572, 654.)

(Da die gegebene Curve windschief ist, so denke ich mir dieselbe auf zwei Projectionsebenen bezogen und sämmtliche Constructionen nach den Lehren der beschreibenden Geometrie ausgeführt.)

Erste Auflösung.

Man ziehe durch den Punkt M (Taf. VI. Fig. 10.) verschiedene Sehnen MA, MB, MC .... MD, ME ...., verlängere dieselben, und mache

$$Aa = Bb = Cc = \ldots = Dd = Ee \ldots$$

alle gleich einer beliebig angenommenen Länge l; alsdann werden die Punkte a, b, c .... d, e ... mit einander verbunden eine neue windschiefe Curve $U'V'$ bilden. Um nun den Punkt der Curve $U'V'$ zu erhalten, welcher einem unendlich nahe bei M gelegenen der Curve UV entspricht, beschreibe man von M aus mit dem Halbmesser l eine Kugel und bestimme den Punkt m, in welchem dieselbe von der Curve $U'V'$ durchbohrt wird, alsdann wird diess der gesuchte Punkt und also Mm die verlangte Tangente sein, woraus sich leicht die Normalebene des Punktes M ergibt. Bestimmt man nun auf dieselbe Art die Tangente mT des Punktes m der Curve $U'V'$ und legt durch diese Tangente mT und die Mm eine Ebene, so sieht man leicht, dass dieses die Osculationsebene der Curve UV für den Punkt M ist. (Projicirt man nun die gegebene Curve UV auf diese Osculationsebene und bestimmt den Krümmungshalbmesser für den Punkt M dieser Projection, so ist diess zugleich auch der Krümmungshalbmesser für den Punkt M der gegebenen Curve.)

Zweite Auflösung.

Man nehme ganz beliebig eine Ebene FF' (Taf. VII. Fig. 1.) an, ziehe Sehnen durch den Punkt M der gegebenen Curve, und verlängere dieselben, bis sie die Ebene F durchbohren; es geschehe diess in den Punkten $a, b, c \ldots. d, e \ldots.$ Nun verbinde man diese Punkte durch eine stetige Curve XY; ferner ziehe man in der Ebene FF' durch die Punkte $a, b, c \ldots. d, e \ldots.$ Linien parallel unter sich, jedoch in einer ganz beliebigen Richtung, und mache alsdann

$$ee' = ee'' = ME$$
$$dd' = dd'' = MD$$
$$\vdots$$
$$aa' = aa'' = MA$$
$$bb' = bb'' = MB$$
$$cc' = cc'' = MC$$
$$\vdots$$

verbinde alsdann die Punkte

$$e', d' \ldots. a', b', c' \ldots.$$
$$e'', d'' \ldots. a'', b'', c'' \ldots.$$

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte m der XY schneiden, und dieser Punkt gibt alsdann, mit M verbunden, die Tangente des Punktes M der Curve UV. Die Sehnen, welche man durch den Punkt M gezogen hat, bilden eine Kegelfläche, deren Spitze der Punkt M und deren Leitlinie die Curve UV ist, und welche die Ebene FF' in der Curve XY durchdringt. Man sieht nun, dass eine Ebene, welche die Kegelfläche längs der Seite Mm berührt, zugleich die Osculationsebene der Curve für den Punkt M ist. Construirt man also die Tangente mT der Curve XY und legt durch dieselbe und die Tangente Mm eine Ebene, so wird dieses die Berührungsebene der Kegelfläche längs der Seite Mm und also auch die Osculationsebene der Curve UV für den Punkt M sein.

Vierte Aufgabe.

Die Länge der Kreisevolvente zu bestimmen.

Auflösung.

Der Kreisbogen $AM = s = r\alpha$ (Taf. VII. Fig. 2.) sei in eine

unendlich grosse Anzahl m gleich langer Elemente von der Länge ds getheilt. Die Contingenzwinkel dieser Elemente werden einander gleich sein; man setze jeden derselben $= \varphi$. Man hat demnach $\frac{ds}{\varphi} = r$; $\varphi = \frac{ds}{r}$; $mds = r\alpha = AM$. Man findet nun die Längen der Evolventenelemente Ab, bc, cd .... als die Längen von kleinen Kreisbögen, deren Halbmesser die Linien AB, bC, cD, dB.... $= ds$, $2ds$, $3ds$, $4ds$ .... mds sind, und deren Centriwinkel immer $= \varphi$ ist. Man hat also Bogen

$$AN = ds \,.\, \varphi + 2ds \,.\, \varphi + 3ds \,.\, \varphi + \ldots\ldots + mds \,.\, \varphi$$
$$= ds \,.\, \varphi \; (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m)$$
$$= ds \,.\, \varphi \; (1 + m) \, \frac{m}{2}.$$

Da aber m unendlich gross ist, so verschwindet in der Parenthese die Zahl 1 gegen m, und man hat also:

$$AN = ds \,.\, \varphi \, \frac{m^2}{2}; \text{ es ist } \varphi = \frac{ds}{r}, \text{ also diess substituirt:}$$

$$AN = \frac{m^2 ds^2}{2r}; \text{ da aber } mds = MA = r\alpha, \text{ so ist auch}$$

$$AN = l = \frac{r^2\alpha^2}{2r} = \frac{r\alpha^2}{2}.$$

Die Länge eines Umlaufs der Evolvente findet man, indem man in dem Werthe für l $\alpha = 2\pi$ setzt, alsdann ist

$$L = \frac{r \,.\, 4 \,.\, \pi^2}{2} = 2r\pi^2$$

oder gleich dem Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser gleich dem Umfange des gegebenen Kreises ist.

Fünfte Aufgabe.

Den Inhalt des Stücks zwischen dem Kreise und seiner Evolvente zu bestimmen.

Auflösung.

Dieser Inhalt wird erhalten durch die Summation der Kreisausschnitte ABb, bCc, cDd....

Es sei dEe der n^{te} Ausschnitt, so ist sein Inhalt:

$$q = \tfrac{1}{2} de \,.\, dE = \tfrac{1}{2} nds \,.\, \varphi \,.\, nds = \tfrac{1}{2} n^2 ds^2 \,.\, \varphi.$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = 1$, $n = 2$ .... bis $n = m$ und summirt die hiedurch entstandenen Werthe, so erhält man den Inhalt Q des Stücks zwischen dem Kreise und der Evolvente, so dass also:

$Q = \frac{1}{2}ds^2 . \varphi + \frac{1}{2} . 2^2 ds^2 \varphi + \frac{1}{2} . 3^2 ds^2 . \varphi + \ldots . + \frac{1}{2} m^2 ds^2 \varphi$ oder
$Q = \frac{1}{2} ds^2 \varphi (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + m^2)$.

Es ist aber die Summe dieser Reihe $= \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$, also:

$$Q = \frac{1}{2} ds^2 . \varphi (\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}).$$

Setzt man für φ seinen Werth $\frac{ds}{r}$ und dividirt sämmtliche Glieder in der Parenthese durch m^3, während man die Grösse ausserhalb derselben mit m^3 multiplicirt, so hat man:

$$Q = \frac{m^3 ds^3}{2r} (\frac{m^3}{3m^3} + \frac{m^2}{2m^3} + \frac{m}{6m^3})$$
$$= \frac{m^3 ds^3}{2r} (\frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2}).$$

Da aber m unendlich gross ist, so kann man in der Parenthese die Brüche $\frac{1}{2m}$ und $\frac{1}{6m^2}$ vernachlässigen, und ferner kann man statt $m^3 ds^3$ die Länge AM^3 oder $r^3 \alpha^3$ setzen, so dass also:

$$Q = \frac{r^3 \alpha^3}{6r} \text{ oder } Q = \frac{r^2 \alpha^3}{6}.$$

Sechste Aufgabe.

Den Inhalt der entwickelbaren Schraubenfläche zu finden. (Leroy §. 456.)

Auflösung.

Diese Fläche entsteht durch die Verlängerung der Elemente einer Schraubenlinie und ist also eine entwickelbare Fläche. Nimmt man die Axe der Schraubenlinie senkrecht an und schneidet die Fläche durch zwei Horizontalebenen, welche um eine Ganghöhe von einander entfernt sind, so wird hiedurch die Fläche nach zwei Kreisevolventen geschnitten, zwischen welchen beiden Grenzen die Fläche nun berechnet werden soll. Wickelt man die Fläche ab, so bleiben hiebei die Contingenzwinkel der Wendecurve unveränderlich, weil die Drehung um die Verlängerungen der Elemente vor sich geht. Die Wendecurve wird sich also nach einer Curve abwickeln, welche bei gleich grossen Elementen gleich grosse Contingenzwinkel hat, das heisst nach einem Kreisstück, dessen Länge gleich der Länge der gegebenen Wendecurve und dessen Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser derselben ist. Die Kreisevolventen, durch welche unsere Fläche begrenzt ist, wickeln sich nach Kreisevolventen an der abgewickelten Wendecurve ab, so dass man also den Inhalt des einen Mantels der gegebenen Fläche als den

Inhalt des Stücks zwischen der verwandelten Wendecurve und ihrer Evolvente berechnen kann. Man bezeichne den Halbmesser des Grundkreises mit r und den des Krümmungskreises der Schraubenlinie mit β.

Es seien nun $AB = BC = ds'$ (Taf. VII. Fig. 3.) zwei Elemente der Schraubenlinie, welche den Winkel α mit der Grundfläche bilden; ihre Projectionen $ab = bc = ds$ sind alsdann zwei Elemente des Grundkreises. Der Contingenzwinkel $B'BC$ werde mit φ' und der Contingenzwinkel $B'bC$ mit φ bezeichnet, alsdann ist $r = \frac{ds}{\varphi}$ und $\beta = \frac{ds'}{\varphi'}$. In den gleichschenkligen Dreiecken $B'BC$ und $B'bC$ hat man nun:

$$B'C = 2BB' \sin\frac{\varphi'}{2} = 2ds' . \sin\frac{\varphi'}{2}$$

$$B'C = 2B'b \sin\frac{\varphi}{2} = 2ds . \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Da aber $\frac{\varphi'}{2}$ und $\frac{\varphi}{2}$ unendlich kleine Winkel sind, so kann man statt ihrer Sinus die Bögen selbst setzen, so dass

$$B'C = ds . \varphi' \text{ und}$$

$$B'C = ds . \varphi, \text{ also auch}$$

$$ds' . \varphi' = ds . \varphi, \text{ oder da } ds' = \frac{ds}{\cos\alpha}, \text{ so ist auch } \frac{ds . \varphi'}{\cos\alpha} = ds . \varphi,$$

$$\text{hieraus } \varphi' = \varphi \cos\alpha \ (1)$$

Nun ist weiter $\beta = \frac{ds'}{\varphi'}$, substituirt man für ds' und φ' ihre Werthe, so hat man:

$$\beta = \frac{\frac{ds}{\cos\alpha}}{\varphi\cos\alpha} = \frac{ds}{\varphi\cos^2\alpha}.$$

Es ist aber $\frac{ds}{\varphi} = r$, also

$$2) \quad \beta = \frac{r}{\cos^2\alpha}.$$

Bezeichnet man nun mit L die Länge eines Gangs der Schraubenlinie, so dass also $L = \frac{2r\pi}{\cos\alpha}$, so hat man (nach der Formel für Inhalt des Stücks zwischen dem Kreis und seiner Evolvente) für die Oberfläche Q eines Mantels

$$Q = \frac{L^3}{6\beta} = \frac{L^3\cos^2\alpha}{6r} = \frac{8r^3\pi^3\cos^2\alpha}{6r\cos^3\alpha} = \frac{4r^2\pi^3}{3\cos\alpha},$$

und also die Oberfläche beider Mäntel $= \frac{8r^2\pi^3}{3\cos\alpha}$.

Anmerkung. Aus der Formel 2) geht hervor, dass (da $\cos 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$) der Krümmungshalbmesser einer Schraubenlinie bei einer Steigung von 45° das Doppelte und bei einer Steigung von 60° das Vierfache von dem Halbmesser der Grundfläche beträgt.

Andere Auflösungsart.

Sämmtliche Elemente unserer Fläche haben dieselbe Neigung gegen die Grundfläche, wie man leicht sieht, wenn man die Berührungsebenen construirt, und zwar ist dieser Neigungswinkel gleich dem Winkel α, den die Schraubenlinie selbst mit der Grundfläche bildet. Man findet aber den Inhalt einer ebenen Figur, wenn man den Inhalt ihrer Projection mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels dividirt. Da aber alle Elemente unserer Fläche dieselbe Neigung haben, so findet man den Inhalt derselben, indem man den Inhalt der Projection durch $\cos\alpha$ dividirt. Es ist aber die Projection des unteren Mantels der Fläche das Stück zwischen dem Grundkreise und eines Umgangs seiner Evolvente, so dass also der Inhalt dieses Mantels $= \frac{2^3 r^2 \pi^3}{6 \cos\alpha} = \frac{8 r^2 \pi^3}{6 \cos\alpha}$, und man erhält folglich den ganzen Inhalt unserer Fläche:

$$Q = \frac{8 r^2 \pi^3}{3 \cos\alpha}.$$

XXXVIII.

Einige Bemerkungen über fehlerzeigende Dreiecke.

Von dem

dem Herausgeber.

Wenn man durch drei Punkte in einer Ebene mit denselben, die wir im Folgenden als Ebene der xy annehmen werden, drei beliebige gerade Linien legt, so werden diese drei geraden Linien im Allgemeinen ein Dreieck mit einander einschliessen, welches wir im Folgenden nach einem in der Geodäsie gebräuchlichen Ausdrucke ein fehlerzeigendes Dreieck nennen wollen; und über solche Dreiecke sollen die folgenden Blätter einige Betrachtungen enthalten.

Die Coordinaten der drei in Rede stehenden Punkte sollen

$$x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2;\ x_3,\ y_3$$

und die Gleichungen der drei durch diese Punkte gelegten geraden Linien sollen

$$1)\quad \begin{cases} y-y_1=A_1\,(x-x_1), \\ y-y_2=A_2\,(x-x_2), \\ y-y_3=A_3\,(x-x_3) \end{cases}$$

sein; die Coordinaten der Durchschnittspunkte der 1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 1sten Linie wollen wir aber respective durch

$$\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_2,\ \eta_2;\ \xi_3,\ \eta_3$$

bezeichnen. Bestimmt man nun diese Coordinaten auf bekannte Weise, so erhält man

$$2)\quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{A_1x_1-A_2x_2-(y_1-y_2)}{A_1-A_2}, \\[2ex] \eta_1=\dfrac{A_1A_2\,(x_1-x_2)+A_1y_2-A_2y_1}{A_1-A_2}; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \xi_2=\dfrac{A_2x_2-A_3x_3-(y_2-y_3)}{A_2-A_3}, \\[2ex] \eta_2=\dfrac{A_2A_3\,(x_2-x_3)+A_2y_3-A_3y_2}{A_2-A_3}; \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} \xi_3=\dfrac{A_3x_3-A_1x_1-(y_3-y_1)}{A_3-A_1}, \\[2ex] \eta_3=\dfrac{A_3A_1\,(x_3-x_1)+A_3y_1-A_1y_3}{A_3-A_1}. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$5)\quad R = A_1A_2(x_1-x_2)+A_2A_3(x_2-x_3)+A_3A_1(x_3-x_1) \\ +A_3(y_1-y_2)+A_1(y_2-y_3)+A_2(y_3-y_1),$$

so erhalten wir ohne alle Schwierigkeit

$$6)\quad \begin{cases} \xi_1-\xi_2=\dfrac{R}{(A_1-A_2)(A_2-A_3)}, \\ \eta_1-\eta_2=\dfrac{A_2R}{(A_1-A_2)(A_2-A_3)}; \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \xi_2-\xi_3=\dfrac{R}{(A_2-A_3)(A_3-A_1)}, \\ \eta_2-\eta_3=\dfrac{A_3R}{(A_2-A_3)(A_3-A_1)}; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} \xi_3-\xi_1=\dfrac{R}{(A_3-A_1)(A_1-A_2)}, \\ \eta_3-\eta_1=\dfrac{A_1R}{(A_3-A_1)(A_1-A_2)}. \end{cases}$$

Bezeichnet Δ den Flächeninhalt des fehlerzeigenden Dreiecks, so ist nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie *)

$$9)\quad \mp 2\Delta = (\xi_2-\xi_3)\eta_1+(\xi_3-\xi_1)\eta_2+(\xi_1-\xi_2)\eta_3,$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte $(\xi_1\eta_1)$ durch den Punkt $(\xi_2\eta_2)$ zu dem Punkte $(\xi_3\eta_3)$ zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Also ist nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet, wenn man immer dieselbe Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher festhält:

$$10)\quad 2\Delta = \mp\frac{R^2}{(A_1-A_2)(A_2-A_3)(A_3-A_1)}.$$

Setzt man

$$11)\quad \begin{cases} A_1=\tang\alpha_1, \\ A_2=\tang\alpha_2, \\ A_3=\tang\alpha_3; \end{cases}$$

so ist

$$12)\quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{(x_1\sin\alpha_1-y_1\cos\alpha_1)\cos\alpha_2-(x_2\sin\alpha_2-y_2\cos\alpha_2)\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}, \\ \eta_1=\dfrac{(x_1\sin\alpha_1-y_1\cos\alpha_1)\sin\alpha_2-(x_2\sin\alpha_2-y_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}; \end{cases}$$

*) Archiv. Thl. III. S. 263.

$$13)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\cos\alpha_3 - (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} \\[2ex] \eta_2 = \dfrac{(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3 - (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} \end{cases}$$

$$14)\quad \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\cos\alpha_1 - (x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \\[2ex] \eta_3 = \dfrac{(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_1 - (x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\sin\alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} 15)\quad R = &(x_1 - x_2)\operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 \\ &+ (x_2 - x_3)\operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3 \\ &+ (x_3 - x_1)\operatorname{tang}\alpha_3 \operatorname{tang}\alpha_1 \\ &+ (y_1 - y_2)\operatorname{tang}\alpha_3 \\ &+ (y_2 - y_3)\operatorname{tang}\alpha_1 \\ &+ (y_3 - y_1)\operatorname{tang}\alpha_2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 16)\quad &\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \,.\, R \\ &= (x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ &+ (x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &+ (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned} 17)\quad \Theta = &(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ &+ (x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &+ (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2), \end{aligned}$$

so ist nach dem Obigen

$$18)\quad \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = \dfrac{\Theta\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}, \\[2ex] \eta_1 - \eta_2 = \dfrac{\Theta\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}; \end{cases}$$

$$19)\quad \begin{cases} \xi_2 - \xi_3 = \dfrac{\Theta\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}, \\[2ex] \eta_2 - \eta_3 = \dfrac{\Theta\sin\alpha_3}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}; \end{cases}$$

$$20)\quad \begin{cases} \xi_3 - \xi_1 = \dfrac{\Theta\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\[2ex] \eta_3 - \eta_1 = \dfrac{\Theta\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}; \end{cases}$$

und

$$21)\quad 2\Delta = \mp \frac{\Theta^2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie oben. Bezeichnet man die Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks, so wie dieselben in der ersten, zweiten und dritten der drei durch die Gleichungen 1) charakterisirten Linien liegen, durch s_1, s_2, s_3; so ist

$$22)\quad \begin{cases} s_1^2 = (\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2, \\ s_2^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2, \\ s_3^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2; \end{cases}$$

und folglich nach dem Obigen

$$23)\quad \begin{cases} s_1^2 = \dfrac{\Theta^2}{\{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\}^2}, \\ s_2^2 = \dfrac{\Theta^2}{\{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\}^2}, \\ s_3^2 = \dfrac{\Theta^2}{\{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\}^2}; \end{cases}$$

oder ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$24)\quad \begin{cases} s_1 = \pm \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\ \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}, \\ s_2 = \pm \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\ \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\ s_3 = \pm \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\ \sin(\alpha_2 - \alpha_3)}. \end{cases}$$

Man braucht die Winkel α_1, α_2, α_3 nicht grösser als 180° zu nehmen. Dann sind auch die absoluten Werthe der Differenzen

$$\alpha_1 - \alpha_2,\ \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_3 - \alpha_1$$

nicht grösser als 180°, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass α, α_1, α_2 positiv sind; und weil nun

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$$

ist, so haben

$$\alpha_1 - \alpha_2,\ \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_3 - \alpha_1$$

nicht sämmtlich einerlei Vorzeichen. Also haben auch

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2),\ \sin(\alpha_2 - \alpha_3),\ \sin(\alpha_3 - \alpha_1)$$

nicht sämmtlich einerlei Vorzeichen, und es ist folglich, wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem Θ positiv oder negativ ist, immer entweder

$$s_1 = \pm \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

$$s_2 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$s_3 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)};$$

oder

$$s_1 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

$$s_2 = \pm \frac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$s_3 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)};$$

oder

$$s_1 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

$$s_2 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$s_3 = \pm \frac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}.$$

Daher ist jederzeit

$$25)\quad s_1 s_2 s_3 = \pm \frac{\Theta_3}{\{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\}^2},$$

wenn man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachd Θ positiv oder negativ ist.

Denkt man sich, was offenbar verstattet ist, die Winkel α_2, α_3 nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet, so ist

$\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ negativ,
$\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$ negativ,
$\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$ positiv;

also unter dieser Voraussetzung, wenn man die obern oder unt Zeichen nimmt, jenachdem Θ positiv oder negativ ist:

$$26)\quad \begin{cases} s_1 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}, \\ s_2 = \pm \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_1)}, \\ s_3 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}. \end{cases}$$

Also ist

$$27)\quad s_1 : s_2 : s_3$$
$$= \sin(\alpha_2 - \alpha_3) : \sin(\alpha_1 - \alpha_3) : \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin(\alpha_3 - \alpha_1) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Weil unter der gemachten Voraussetzung das Product

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$$

positiv ist, so ist nach 21) unter dieser Voraussetzung

$$28)\quad 2\Delta = \frac{\Theta^2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

Bezeichnet man die den Seiten s_1, s_2, s_3 entsprechenden Höhen des fehlerzeigenden Dreiecks respective durch h_1, h_2, h_3, so ist

$$h_1 = \frac{2\Delta}{s_1},\ h_2 = \frac{2\Delta}{s_2},\ h_3 = \frac{2\Delta}{s_3};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$29)\quad \begin{cases} h_1 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}, \\ h_2 = \pm \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}, \\ h_3 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}; \end{cases}$$

also

$$30)\quad h_1 h_2 h_3 = \pm \frac{\Theta^3}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

d. i.

$$31)\quad h_1 h_2 h_3 = \pm 2\Delta\,\Theta,$$

oder

$$32)\quad \Theta = \pm \frac{h_1 h_2 h_3}{2\Delta}.$$

Auch ist

$$33)\quad \frac{h_1 h_2 h_3}{s_1 s_2 s_3} = \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1).$$

Leicht überzeugt man sich auch von der Richtigkeit der beiden folgenden Relationen:

$$34)\quad \begin{cases} s_1 \sin\alpha_1 - s_2 \sin\alpha_2 + s_3 \sin\alpha_3 = 0, \\ s_1 \cos\alpha_1 - s_2 \cos\alpha_2 + s_3 \cos\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ist r der Halbmesser des um das fehlerzeigende Dreieck beschriebenen Kreises, so ist bekanntlich

$$r = \frac{s_1 s_2 s_3}{4\Delta},$$

also nach dem Obigen

$$35)\ r = \pm \frac{\Theta}{2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

Bezeichnet ferner ϱ den Halbmesser des in das fehlerzeigende Dreieck beschriebenen Kreises, so ist bekanntlich

$$\varrho = \frac{2\Delta}{s_1 + s_2 + s_3},$$

und folglich, wie sich hieraus mittelst des Obigen mit Hülfe einiger goniometrischen Relationen leicht ergiebt:

$$36)\ \varrho = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

oder

$$37)\ \varrho = \pm \frac{\Theta}{4\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\cos\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)\sin\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

Wenn sich die drei durch die Gleichungen 1) charakterisirten geraden Linien in einem Punkte schneiden sollen, so muss $\Delta = 0$, also nach 21) die Grösse $\Theta = 0$, d. i. nach 17)

$$38)\ \left.\begin{array}{l} (x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ + (x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ + (x_3 \sin\alpha_3 - y_3 \cos\alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \end{array}\right\} = 0$$

sein, wobei auf der Stelle erhellen wird, dass diese Gleichung eigentlich die Grundgleichung des gewöhnlich nach Pothenot benannten Problems ist. Leicht bringt man die vorhergehende Gleichung auf die Form

$$\left\{\begin{array}{l} (x_2 - x_1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ + (x_3 - x_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha_3 - \alpha_1) \\ + (y_3 - y_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \end{array}\right\} \sin\alpha_1$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (y_2 - y_1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ + (y_3 - y_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha_3 - \alpha_1) \\ - (x_3 - x_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \end{array}\right\} \cos\alpha_1,$$

woraus sich sogleich

$$39)\ \tan g\,\alpha_1 = -\frac{x_3 - x_2 - (y_2 - y_1)\cot(\alpha_1 - \alpha_2) - (y_3 - y_1)\cot(\alpha_3 - \alpha_1)}{y_3 - y_2 + (x_2 - x_1)\cot(\alpha_1 - \alpha_2) + (x_3 - x_1)\cot(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

ergiebt, und also erhellet, dass der Winkel α_1 bloss aus den Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 und den Differenzen $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_1$ bestimmt werden kann, welches das vorzüglich dem Pothenot'schen Problem zum Grunde liegende Princip ist. Weitere Entwickelungen über diesen Gegenstand halten wir aber nach den in dem Aufsatze No. XIV. im ersten Theile des Archivs angestellten Betrachtungen an diesem Orte für überflüssig, und können dieselben füglich dem Leser überlassen.

XXXIX.

Verschiedene mathematische Bemerkungen und Aufsätze.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

k. k. Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

I.

Bemerkungen zu dem Aufsatze auf Seite 57 im ersten Theile des Archivs.

Der in diesem Aufsatze auf combinatorischem Wege erwiesene Lehrsatz:

„Alle ganzen Zahlen kann man aus den Gliedern der nach den Potenzen von 2 fortgehenden geometrischen Progression, so dass jedes Glied nur einmal vorkommt, durch Addition bilden und zwar nur auf eine einzige Weise;"

lässt sich als eine höchst einfache Folgerung aus dem leicht nachzuweisenden Satze entnehmen, „dass jede Zahl nach dem dyadischen Ziffersysteme, in welchem man sich nur der Ziffern 0 und 1 bedient, geschrieben werden kann, und zwar auf nicht mehr als Eine Weise."

Uebrigens kann man, bloss auf die Lehre vom Theilen gestützt, den allgemeinen Satz erweisen:

„Jede Anzahl lässt sich als algebraische Summe von Vielfachen der natürlichen Potenzen jeder die 1 übersteigenden Anzahl so darstellen, dass die theils posi-

tiven, theils negativen Multiplicatoren möglichst klein, d. i. nicht grösser als die Hälfte der potenzirten Anzahl, sind, und zwar nur auf Eine Weise."

Denn ist a die potenzirte und n die darzustellende Anzahl, und sind $m_0, m_1, m_2, \ldots . m_r$ die algebraischen Multiplicatoren für die Potenzen $a^0, a^1, a^2, \ldots . a^r$; so soll der Forderung gemäss sein:

$$n = m_0 + m_1 a + m_2 a^2 + \ldots . + m_r a^r,$$

oder

$$n = m_0 + (m_1 + m_2 a + \ldots . + m_r a^{r-1})\, a,$$

oder auch, wenn man

$$n_1 = m_1 + m_2 a + \ldots . + m_r a^{r-1}$$

setzt,

$$n = m_0 + n_1 a.$$

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, dass man die Anzahl n vorerst nur aus den beiden niedrigsten Potenzen von a, der nullten und ersten, nämlich aus einem Vielfachen, dem $n_1$fachen, von a und aus einer möglichst kleinen, positiven oder negativen, Anzahl m_0 zusammenzusetzen hat; folglich dass man die darzustellende Anzahl n durch die zu potenzirende a dergestalt theilen solle, dass der Rest möglichst klein, mithin der Quotus nächst zustimmig ausfalle. Dann ist der Multiplicator m_0 von a^0 jener möglich kleinste Rest und der Multiplicator n_1 von a^1 dieser nächst zustimmige Quotus; nämlich, wenn man nicht erst noch neue Zeichen einführen will:

$$m_0 = \text{möglich kleinster Rest von } n : a,$$
$$n_1 = \text{nächst zustimmiger Quotus von } n : a.$$

Weil nun eine solche Theilung jederzeit, aber auch nur auf eine einzige Art, ausführbar ist, so kann auch jede Anzahl n immer, und zwar nur auf Eine Weise, aus den möglich kleinsten Vielfachen der Potenzen a^0 und a^1 algebraisch zusammengesetzt werden.

So wie aber n zusammengesetzt wird, eben so wird sich der Quotus

$$n_1 = m_1 + m_2 a + \ldots . + m_r a^{r-1}$$

neuerdings zusammensetzen lassen; es wird nämlich sein:

$$m_1 = \text{möglich kleinster Rest von } n_1 : a, \text{ und}$$
$$n_1 = m_2 + m_3 a + \ldots . + m_r a^{r-2}$$
$$= \text{nächst zustimmiger Quotus von } n_1 : a.$$

Wenn man demnach die zusammenzusetzende Anzahl n durch die potenzirende a so theilt, dass der Rest möglichst klein ausfällt; wenn man den Quotus, und auf gleiche Weise jeden nachfolgenden Quotus, wieder so theilt, dass der Rest immer so klein als

möglich ausfällt: so sind die der Ordnung nach sich ergebenden Reste die gewünschten Multiplicatoren $m_0, m_1, m_2, \ldots m_r$; wegen $a > 1$ wird jeder nachfolgende Quotus wenigstens auf die Hälfte des vorbergehenden, mithin endlich einmal einer unter a selbst, herabsinken und bei ihm die Rechnung abbrechen.

Ist insbesodere $a = 2$, so sind die möglich kleinsten Reste, daher auch die Multiplicatoren 0 und 1; und darin liegt der obige Satz. Ist aber $a = 3$, so werden die möglich kleinsten Reste, folglich auch die Multiplicatoren, $-1, 0, 1$; und somit ist der, in dem citirten Aufsatze auch angeführte Satz erwiesen, „dass man jede Anzahl aus den natürlichen Potenzen von 3 durch Addition und Subtraction, und zwar nur auf Eine Weise, bilden kann".

II.

Feststellung und Würdigung des in dem Archive, Theil I. S. 204, über eine Stelle in Cauchy's Begründung der Differential-Rechnung ausgesprochenen Tadels.

Der Herr Herausgeber des Archivs leitet die citirte Abhandlung mit folgenden Worten ein:

„Cauchy hat bekanntlich die Entwickelung der wichtigen Differentialquotienten der Functionen log x und a^x auf den Satz gegründet, dass sich die Grösse $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$, wenn Θ sich der Null nähert, der Summe der convergirenden Reihe $1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \ldots,$ welche wir wie gewöhnlich durch e bezeichnen wollen, als ihrer Gränze nähert, ..."

Auf der nächsten Seite fährt er fort:

„Gegen den von Cauchy gegebenen Beweis des .... erwähnten Satzes hat aber Herr Liouville in seinem Journal (Août. 1840. p. 280) die sehr gegründete Einwendung gemacht, dass demselben die Annahme zum Grunde liege, dass das Product $(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m}) \ldots (1-\frac{n-1}{m})$ für $m = \infty$ der Einheit gleich werde, welches zwar dann seine Richtigkeit habe, wenn n eine bestimmte von m unabhängige Zahl sei, sich aber dann offenbar nicht mehr behaupten lasse, wenn n von m abhängig, z. B. $n = m$ oder $n = m - 1$ sei, ..."

Allein Cauchy stützt sowohl in seinem Résumé des Leçons .... sur le calcul infinitésimal. 4. Paris. 1823. pag. 2, als auch in der verbesserten Ausgabe eines Theils dieses Werkes, nämlich in seinen Leçons sur le calcul différentiel. 4. Paris. 1829. p. 2, die Herleitung der in Rede stehenden Differentialquotienten, in letzter Instanz, auf folgende, wörtlich also lautende Stelle:

„Si l'on suppose d'abord la quantité α positive et de la forme $\frac{1}{m}$, m désignant un nombre entier variable et susceptible d'un accroissement indéfini, on aura

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\frac{1}{m})^m$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{m}) + \frac{1}{1.2.3}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots m}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{m-1}{m}).$$

Comme, dans le second membre de cette dernière formule, les termes qui renferment la quantité m sont tous positifs, et croissent en valeurs et en nombre en même temps que cette quantité, il est clair que l'expression $(1+\frac{1}{m})^m$ croîtra elle-même avec le nombre entier m, en demeurant toujours comprise entre les deux sommes

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$\text{et } 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \text{etc.} = 1 + 1 + 1 = 3;$$

donc elle s'approchera indéfiniment, pour des valeurs croissantes de m, d'une certaine limite comprise entre 2 et 3. Cette limite est un nombre qui joue un grand rôle dans le calcul infinitésimal, est qu'on est convenu de désigner par la lettre e."

Cauchy lässt sich demnach gar nicht darauf ein, die Grenzen der einzelnen Glieder der entwickelten Binomial-Potenz für eine unendlich wachsende Anzahl m aufzusuchen, sondern benutzt diese Entwicklung bloss, um das stete Wachsen dieser Potenz zwischen den Anzahlen 2 und 3, also die Annäherung der Potenz selbst an eine fixe Grenzzahl, die er e nennt, zu erweisen. Darum erwähnt er keineswegs, dass die Grenze dieser entwickelten Potenz die Summe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$ sei, noch weniger bezeichnet er diese Summe durch e, sondern er versteht unter e die Grenze, der sich die Binomial-Potenz $(1+\frac{1}{m})^m$, bei dem unendlichen Steigen der Anzahl m, unbestimmt nähert, wie auch immer die successiven Werthe dieser Potenz berechnet werden mögen und jene Grenze derselben gefunden werden mag. Ihm genügt, für seine Herleitung der Differentialquotienten, die blosse Nachweisung der Existenz einer solchen Grenze; da er die Grösse derselben für diesen Zweck gar nicht zu kennen braucht.

Jedoch in den Préliminaires der oben angeführten jüngeren Leçons, pag. 10, nicht aber in dem älteren Résumé, führt Cauchy, zur Erläuterung der Convergenz der Reihen, folgendes Beispiel an:

Une série digne de remarque est celle, qu'on obtient, lorsque, dans le développement de l'expression

$$(1+\frac{x}{m})^m = 1 + \frac{x}{m} + \frac{x^2}{1.2}(1-\frac{1}{m}) + \frac{x^3}{1.2.3}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m}) + \ldots$$

on fait converger le nombre entier m vers la limite ∞. Cette série, dont les différents termes sont respectivement

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3} \dots \frac{x^n}{1.2.3\dots n} \text{ etc.} \dots,$$

reste convergente ...."

Hier schliesst Cauchy allerdings aus der Grenzform der Anfangsglieder der Reihe, in einer nicht genugsam begründeten Induction, auf die Grenzform ihres allgemeinen Gliedes, indem er stillschweigend

$$\lim \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)=1, \text{ für } \lim m=\infty$$

gelten lässt.

Diese Stelle ist es demnach, welche von Liouville's Tadel mit Recht getroffen werden könnte; ob er sich aber wirklich auf sie beziehe, vermag ich nicht zu entscheiden, da ich den Jahrgang 1840 seines Journals nicht mehr besitze. Mit dieser Stelle hängt jedoch die später, pag. 19, folgende Entwickelung der Differentialquotienten logarithmischer und exponentieller Functionen durchaus nicht zusammen; was auch schon daraus einleuchtet, dass dieselbe in dem Resumé gar nicht vorkommt. Mithin ist diese Entwickelung über die ihm zugemuthete Unrichtigkeit völlig erhaben; was diese Zeilen zu beweisen einzig beabsichtigten.

III.

Bemerkungen zur Bestimmung des Schwerpunktes im sphärischen Dreiecke, auf Seite 6 bis 9 im dritten Theile des Archivs.

1) Die hier vom Herrn Director Eschweiler aufgestellte elegante Bestimmung des Schwerpunktes eines sphärischen Dreieckes hatte ich bereits im Jahre 1836 selbst gefunden; ich hoffe, er werde mir gern gestatten, seinem Aufsatze Folgendes von meinem damaligen Funde anzuschliessen.

I. Nach seiner Ableitung (S. 7 und Taf. VII. Fig. 4.) ist das statische Moment eines sphärischen Dreieckes ABC in Bezug auf die Ebene des zu dem Kugelhalbmesser OA einer Dreiecksspitze A senkrechten grössten Kreises, d. h. das Product aus dem Flächeninhalte e des sphärischen Dreieckes in den Abstand $\frac{a \sin b \sin\gamma}{2e}$ seines Schwerpunktes von jener Kreisebene $=\frac{1}{2}a \,.\, \sin b \sin\gamma$. Der erste Factor $\frac{1}{2}a$ dieses Productes giebt den Flächeninhalt des Kreisausschnittes BOC an, welcher der jener Dreiecksspitze A gegenüber liegenden Dreiecksseite BC zugehört. Der zweite Factor $\sin b \sin\gamma = \sin c \sin\beta$ drückt den Abstand derselben Dreiecksspitze A von der Ebene dieser Dreiecksseite BC aus. Mithin ist das statische Moment der Fläche eines sphärischen Dreieckes ABC in Bezug auf die Ebene des, zu dem Kugelhalbmesser OA einer Dreiecksspitze A senkrechten oder zu dieser Spitze als einem Pole gehörigen, grössten Kreises

gleich dem Producte aus dem Abstande der Dreiecksspitze von der Ebene der ihr entgegen liegenden Seite BC in den Flächeninhalt des dieser Seite angehörigen Kreisausschnittes BOC.

2. Es dürfte wohl nicht ohne Interesse sein, diesen Ausdruck des statischen Momentes eines sphärischen Dreieckes auch mittels einer elementaren Betrachtung aufzustellen. In dieser Absicht theilen wir die Seite BC (Taf. VII. Fig. 4.) des Dreieckes ABC in beliebig viele und beliebig grosse Stücke, und führen durch alle Theilungspunkte nach der gegenüber liegenden Spitze A Bogen grösster Kreise, und zwischen jeden zwei benachbarten solchen Kreisbogen, wie AD und AE, um dieselbe Spitze A als Pol, Bogen kleinerer Kreise, wie DF und EG. So wird dem Kugeldreiecke ADE nicht bloss ein kleineres Dreieck ADF eingeschrieben, sondern auch ein grösseres AEG umgeschrieben, von denen jedes ein Ausschnitt der Seitenfläche eines Kugelabschnittes ist. Sind HD und HF Halbmesser der Grundebene des ersteren Kugelabschnittes, so ist AH seine Höhe und der Inhalt seiner Seitenfläche $= 2\pi . AH$. Zu ihm verhält sich der Inhalt des Dreieckes ADF, wie zur vollen Umdrehung 2π der Winkel DAE, den wir durch φ bezeichnen wollen; mithin ist $\triangle ADF = (2\pi . AH : 2\pi) . \varphi = \varphi . AH$, oder wenn wir den Bogen $AD = u$ setzen, $= \varphi(1 - \cos u)$. Aehnlich muss, wenn wir $AB = u'$ annehmen, $\triangle AEG = \varphi(1 - \cos u')$ sein.

Der Schwerpunkt der Seitenfläche eines Kugelabschnittes, so wie jedes Ausschnittes derselben, steht um die halbe Höhe des Abschnittes von seiner Grundebene ab. Beziehen wir demnach die statischen Momente auf die Ebene des zur Dreiecksspitze A als einem Pole gehörigen grössten Kreises, so hat von ihr der Schwerpunkt des Dreieckes ADF den Abstand $OH + \frac{1}{2}HA = \frac{1}{2}(OA + OH) = \frac{1}{2}(1 + \cos u)$, mithin analog jener des Dreieckes AEG den Abstand $\frac{1}{2}(1 + \cos u')$; und der erstere Abstand ist offenbar grösser, der letztere aber kleiner als der Abstand des Schwerpunktes des Dreieckes ADE selbst von der Momentenebene.

Daraus folgt nun, dass das Moment des Dreieckes ADE, d. i. das Product aus seinem Inhalte und aus dem Abstande seines Schwerpunktes von der Momentenebene, wenn man dessen Factoren einmal durch kleinere, ein andermal durch grössere ersetzt,

$$> \varphi(1 - \cos u) . \tfrac{1}{2}(1 + \cos u') \text{ und } < \varphi(1 - \cos u') . \tfrac{1}{2}(1 + \cos u)$$

sein muss.

Zur ferneren Umgestaltung dieser einschränkenden Grenzen setzen wir $DE = v$, $ADB = \omega$, $AEB = \omega'$; dann ist im Dreiecke ADE

$$\sin\varphi \sin u = \sin v \sin\omega'$$

und im Dreiecke ABE

$$\sin\omega' \sin u' = \sin c \sin\beta$$

folglich, wenn wir multipliciren und abkürzen,

$$\sin\varphi . \sin u \sin u' = \sin c \sin\beta . \sin v.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin\varphi = \frac{\sin c \sin\beta}{\sin u \sin u'} \sin v,$$

und sonach

$$\varphi = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin\varphi = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin c\sin\beta}{\sin u\sin u'}\cdot\frac{\sin v}{v}\cdot v.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für φ, so finden wir des Dreieckes ADE Moment

$$> \tfrac{1}{2}\sin c\sin\beta\,.\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} : \frac{v}{\sin v}\right)\frac{(1-\cos u)(1+\cos u')}{\sin u\sin u'}\,.\,v$$

$$\text{und } < \tfrac{1}{2}\sin c\sin\beta\,.\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} : \frac{v}{\sin v}\right)\frac{(1-\cos u')(1+\cos u)}{\sin u'\sin u}\,.\,v.$$

Für den Winkel φ lässt sich auch noch folgender Ausdruck vortheilhaft verwenden. Es ist

$$\varphi = DAE = DHF = DF : DH = DF : \sin u,$$

daher, wenn man durch $\sin\omega'\sin u'$ theilt und mit dem, nach dem Obigen, ihm gleichen $\sin c\sin\beta$ multiplicirt,

$$\varphi = \frac{\sin c\sin\beta}{\sin u\sin u'}\cdot\frac{DF}{v\sin\omega'}\cdot v \text{ und analog } = \frac{\sin c\sin\beta}{\sin u'\sin u}\cdot\frac{EG}{v\sin\omega}\cdot v.$$

Mithin zeigt sich das Moment des Dreieckes ADE

$$> \tfrac{1}{2}\sin c\sin\beta\,.\,\frac{(1-\cos u)(1+\cos u')}{\sin u\sin u'}\cdot\frac{DF}{v\sin\omega'}\,.\,v$$

$$\text{und } < \tfrac{1}{2}\sin c\sin\beta\,.\,\frac{(1-\cos u')(1+\cos u)}{\sin u'\sin u}\cdot\frac{EG}{v\sin\omega}\,.\,v.$$

Nun ist das Moment des Dreieckes ABC gleich der Summe der Momente aller dasselbe constituirenden Dreiecke, wie ADE, folglich grösser als die Summe aller unteren und kleiner als die Summe aller oberen Grenzen der Momente der Dreiecke ADE für sämmtliche Theile $v = DE$ der Seite $BC = a$.

Lassen wir demnach alle Theile v der Seite BC unendlich abnehmen, so nimmt auch der Winkel φ unendlich ab, und die Kreisbogen u und u' nähern sich unendlich ihrer Gleichheit; daher streben die Quotienten $\frac{\varphi}{\sin\varphi}$ und $\frac{v}{\sin v}$ ihrer bekannten gemeinschaftlichen Grenze 1, die Producte $(1-\cos u)(1+\cos u')$, $(1-\cos u')(1+\cos u)$ und $\sin u\sin u'$ ihrer gemeinsamen Grenze $1-\cos u^2 = \sin u^2$ zu; die Kugeldreiecke DEF und DEG, welche an F und G rechtwinklig sind, nähern sich unendlich ihrer Ausebnung, folglich dem Zustande, in welchem $DF = v\sin\omega'$ und $EG = v\sin\omega$ ist; kurz, das Product der in den Ausdrücken der einschränkenden Grenzen als Factoren vorkommenden Quotienten strebt seiner Grenze 1 ohne Ende zu.

Bei der Summirung sämmtlicher Werthe der gleichnamigen

Grenzen der Momente aller constitutiven Dreiecke kommt ihr gemeinschaftlicher Factor $\frac{1}{2}\sin c \sin\beta$ mit der Summe von lauter Producten zu multipliciren, in denen die einen Factoren einer gemeinsamen Grenze zustreben; daher ist letztere Summe gleich dem Producte dieser gemeinsamen Grenze, — hier 1 — in die Summe aller zweiten Factoren *) — hier in die Summe aller Bestandstücke v der Seite $BC = a$, d. i. in die Seite a selbst. Mithin strebt sowohl die untere als auch die obere Grenze des Moments vom Dreiecke ABC derselben Grenze $\frac{1}{2}\sin c \sin\beta \,.\, a$ ohne Ende zu; folglich muss dieses Moment eben dieser Grenze $\frac{1}{2}a \sin c \sin\beta$ gleich sein, welche man auch durch $\frac{1}{2}a \sin b \sin\gamma$ ausdrücken kann.

IV.

Neuer Beweis der Gleichheit von Parallelepipeden.

Der Satz: **Parallelepipede von gleichen Grundebenen und Höhen sind gleich**, wird in allen mir bekannten Lehrbüchern der Stereometrie bloss für den sehr eingeschränkten Fall erwiesen, wo die Grundebenen congruent sind; auch drängen sich in den zum Beweise dienenden Figuren die Linien in einen so engen Raum zusammen, dass besonders in öffentlichen Vorlesungen das Sichten und Uebersehen derselben den Zuhörern sehr beschwerlich fällt. Der folgende Beweis, den ich im Jahre 1838 fand, ist von beiden Mängeln frei.

I. Zuvörderst betrachten wir den Fall, **wo die gleichen Grundebenen der Parallelepipede je eine Grundkante und den Kantenwinkel an ihr gleich haben.**

Hier gehören daher zu den gleichen Grundkanten, als Grundlinien der parallelogrammischen Grundebenen, auch gleiche Höhen, d. h. gleiche Entfernungen von den parallelen Seiten.

In dem einen Parallelepipede $ACEG$ (Taf. VII. Fig. 5.) erweitern wir nun die Grundebene AC und die parallelen Grundkanten AB und CD, welche den Grundkanten ab und cd des anderen Parallelepipeds $aceg$ gleich sein sollen. Zwischen diesen verlängerten Grundkanten und mit dem ersteren Parallelepipede auf die nämliche Seite der Grundebene stellen wir das zweite Parallelepiped $aceg$ dergestalt auf, dass die gleichen Grundkanten paarweise in einerlei Gerade zu liegen kommen, die Oeffnungen der gleichen Kantenwinkel an ihnen nach einerlei Gegend gerichtet sind und die Parallelepipede selbst nirgends zusammentreffen. In dieser Stellung fallen die erweiterten zweiten Schenkel der gleichen Kantenwinkel, so wie auch die erweiterten zweiten Grundebenen der gleichhohen Parallelepipede, in eine Ebene zusammen; und die Parallelepipede machen mit einem zwischen ihnen stehenden schief abgeschnittenen Prisma $BdFh$ ein eben solches Prisma $AeEg$ aus.

---

*) Denn, bekanntlich ist, nach Cauchy (vergl. auch Archiv. Theil I. S. 293), $\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \ldots\ldots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots) \,.\, \mathrm{Med.}(a, a', a'', \ldots\ldots)$; folglich, wenn $\lim a = \lim a' = \lim a'' = \ldots\ldots = A$ ist,

$$\lim(\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \ldots\ldots) = \lim(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots) \times \mathrm{Med.}(\lim a, \lim a', \lim a'', \ldots\ldots) = A \,.\, \lim(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots).$$

Nunmehr lässt sich leicht nachweisen, dass **die schief abgeschnittenen Prismen** $AdEh$ **und** $BcFg$ **congruent sind.** Denn 1) sind alle parallele Kanten, als Seiten desselben Parallelepipeds, gleich, wie $AE = BF$, $ae = bf \ldots$; 2) sind jede zwei in einer Geraden gelegene Kanten gleich, wie $Aa = Bb$, $Ee = Ff$ u. dgl., weil sie aus gleichen Stücken bestehen, da $AB = ab$, also auch $AB + Ba = Ba + ab$, d. i. $Aa = Bb$ ist; daher sind 3) nicht nur die Winkel der gleichgerichteten Kanten gleich, wie $DAa = CBb$, $EAa = FBb \ldots$, sondern auch 4) die Winkel der gleichgestreckten Ebenen gleich, wie die der Ebenen AH und BG mit den sie schneidenden Ebenen Ae oder Bf, u. dgl. Denkt man sich daher ein solches Prisma, $BcFg$, zu dem andern $AdEh$ dergestalt gebracht, dass eine Kante Bb mit der ihr gleichen Aa, und an ihr die gleichen Kantenwinkel überein fallen; so fällt die Seitenebene BG auf die congruente AH und die Seitenebene bg auf die congruente ah, mithin auch jede Ecke des ersteren Prisma in eine des letzteren; das Prisma $BcFg$ wird gleichsam zwischen der es einhüllenden parallelepipedischen Fläche $AfHcA$ um das Stück AB von B gegen A geschoben und erfüllt so ganz das andere Prisma $AdEh$. Da nun in dieser Stellung beider Prismen jeder Unterschied zwischen ihnen aufgehoben erscheint, so sind sie congruent.

Zieht man demnach von diesen congruenten Prismen $AdEh$ und $BcFg$ das ihnen gemeinschaftliche $BdFh$, oder sie selbst von dem ganzen Prisma $AcEg$ ab, so müssen die Reste, welche gerade die mit einander zu vergleichenden $ACEG$ und $aceg$ sind, gleich gross sein.

II. **In jedem anderen Falle** muss, weil die Grundebenen der Parallelepipede Parellelogramme und einander gleich sind, in **jeder Grundebene wenigstens Eine Höhe kleiner oder nur höchstens so gross als eine Seite der anderen Grundebene sein.** Denn der Flächeninhalt eines Parallelogramms gleicht dem Producte aus einer Seite (der Grundlinie) in ihre Höhe, und jede Seite desselben ist wenigstens so gross, wenn nicht grösser, als die der anstossenden Seite zukommende Höhe; folglich ist der Flächeninhalt des Parallelogramms nie kleiner als das Product seiner beiden Höhen und nie grösser als das Product zweier zusammenstossenden Seiten. Bei zwei gleichen Parallelogrammen, wie hier die Grundebenen sind, ist demnach das Product der Höhen des einen sicher nie grösser als das Product zweier zusammenstossenden Seiten des anderen. Daraus folgt sogleich, dass nie beide Höhen des einen Parellelogramms zugleich grösser sein können als jede der Seiten des gleichen anderen Parellelogramms.

Sei nun die zur Seite AB (Taf. VII. Fig. 6.) der Grundebene AC gehörige Höhe, d. i. der Abstand der zwei parallelen Seiten AB und CD von einander, nicht grösser als die Seite ab der Grundebene des zweiten Parallelepipeds $aceg$. Dann kann man zwischen jenen Parallelen und ihren Verlängerungen durch jeden Punkt $\mathfrak{a}$ wenigstens Eine der Seite ab gleiche Gerade $\mathfrak{ab}$ führen. Zieht man zu dieser in demselben Abstande, wie die Parallelen ab und cd, die $\mathfrak{cd}$ parallel, so ist das entstehende Parellelogramm $\mathfrak{ac}$ dem andern ac gleich, weil sie die Grundlinien $\mathfrak{ab}$ und ab sammt den zugehörigen Höhen gleich haben. Nach der Annahme ist aber auch $AC = ac$, daher auch noch $AC = \mathfrak{ac}$. Beide Parellelogramme

liegen überdiess zwischen einerlei Parallelen, mithin haben sie auch ihre Grundlinien gleich, $AB = \mathfrak{ab}$. Kurz das Parallelogramm $\mathfrak{ac}$ hat mit jedem der zwei einander und ihm gleichen Parellelogramme AC und ac eine Grundlinie und ihre Höhe gleich.

Verlängern wir endlich die Parallelen $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{cd}$, und stellen wir auf sie die ihnen gleichen Grundkanten ab und cd des Parallelepipeds $aceg$; erweitern wir dann die durch AB und CD, so wie die durch ab und cd gehenden Seitenebenen, und die von der Grundebene $ACac$ gleichweit abstehenden, also in Eine Ebene zusammenfallenden Grundebenen EG und eg; so begrenzt dies Paar Grundebenen mit jenen zwei Paaren parelleler Seitenebenen ein neues Parallelepiped $\mathfrak{aceg}$. — Für die Darstellung bleibt es hierbei vortheilhaft, die Gerade $\mathfrak{ab}$ so weit von der Grundebene AC und von ihr die Grundebene ac so weit entfernt zu halten, dass keine zwei Parallelepipede irgend wo zusammentreffen. — Mit diesem dritten Parallelepipede $\mathfrak{aceg}$ hat nun, vermöge seiner Entstehung, jedes der zwei Parallelepipede $ACEG$ und $aceg$, ausser der Grundebene und Höhe, auch noch eine Grundkante und an ihr den Kantenwinkel gleich; mithin sind sie, dem vorigen Falle gemäss, ihm einzeln gleich, daher auch einander selbst gleich.

Der behauptete Satz gilt demnach ganz allgemein.

XL.

Ueber die höheren Differentialquotienten einiger Functionen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

---

1. Wir wollen uns zunächst mit den höheren Differenzialquotienten der häufig vorkommenden Function

$$y = e^{-x^2} \quad (1)$$

beschäftigen. Durch successive Differenziation derselben, unter beständiger Anwendung der Sätze

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x, \quad \frac{d(pq)}{dx} = p\frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dx}$$

findet man folgende Reihe von Gleichungen:

$$\frac{dy}{dz} = -2z\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = (+4z^2 - 2)\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = (-8z^3 + 12z)\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^4y}{dz^4} = (+16z^4 - 48z^2 + 12)\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^5y}{dz^5} = (-32z^5 + 160z^3 - 120z)\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^6y}{dz^6} = (+64z^6 - 480z^4 + 720z^2 - 120)\overline{e}^{-z^2}$$

u. s. f.

und wir müssen nun in dieselben ein Gesetz zu bringen suchen.

Man bemerkt zunächst, dass die erste Vertikalreihe nach Potenzen von $2z$ fortgeht; wir wollen daher aus den Coeffizienten in den anderen ebenfalls so hohe Potenzen von 2 ausscheiden, als die daneben stehenden Potenzen von z sind, damit sämmtliche Horizontalreihen nach Potenzen von $2z$ fortlaufen. Es wird nun

$$\frac{dy}{dz} = -(2z)\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = +[(2z)^2 - 2]\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = -[(2z)^3 - 6(2z)]\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^4y}{dz^4} = +[(2z)^4 - 12(2z)^2 + 12]\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^5y}{dz^5} = -[(2z)^5 - 20(2z)^3 + 60(2z)]\overline{e}^{-z^2}$$

$$\frac{d^6y}{dz^6} = +[(2z)^6 - 30(2z)^4 + 180(2z)^2 - 120]\overline{e}^{-z^2}$$

u. s. f.

und es handelt sich jetzt noch um die independente Bestimmung der Coeffizienten der Potenzen von $2z$, nämlich

1
1, 2,
1, 6,
1, 12, 12,
1, 20, 60,
1, 30, 180, 120
. . . .

Zerlegt man die Zahlen der zweiten Vertikalreihe in Factoren, so bemerkt man leicht das Gesetz: $2=2.1$, $6=3.2$, $12=4.3$, $20=5.4$, $30=6.5$, so dass diese Zahlen unter der Form $n(n-1) = 2n_2$ zu stehen scheinen, wenn wir mit n_2 den zweiten Binomialkoeffizienten des Exponenten n bezeichnen. Die Zahlen der vierten Vertikalreihe haben den gemeinschaftlichen Factor $12=3.4$, und lassen sich auf folgende Weise schreiben: $12=3.4.\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$, $60=3.4.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$, $180=3.4.\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$, was auf das Gesetz $3.4.n_4$ hinzudeuten scheint. Die Zahlen der vierten Vertikalreihe müssten demnach von der Form $4.5.6.n_6$ sein, auf welche auch die Zahl 120 für $n=6$ passt. Wir wollen nun dieses Gesetz der Coeffizienten annehmen und zusehen, ob es für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten richtig bleibt, wenn es für den $n$ten gilt. Sei demnach

$$\frac{d^ny}{dz^n}=(-1)^n[(2z)^n-\overset{n}{A}_{n-2}(2z)^{n-2}+\overset{n}{A}_{n-4}(2z)^{n-4}-\ldots\ldots]\overline{e}^{z^2} \quad (2)$$

und irgend ein Coeffizient

$$\overset{n}{A}_{n-2r}=(r+1)(r+2)\ldots\ldots 2r.n_{2r} \quad (3)$$

also der folgende

$$\overset{n}{A}_{n-2r-2}=(r+2)(r+3)\ldots\ldots(2r+2)\,n_{2r+2} \quad (4)$$

so müsste gleichförmig für

$$\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}=(-1)^{n+1}[(2z)^{n+1}-\overset{n+1}{A}_{n-1}(2z)^{n-1}+\overset{n+1}{A}_{n-3}(2z)^{n-3}-\ldots\ldots]\overline{e}^{z^2} \quad (5)$$

auch

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r+1}=(r+1)(r+2)\ldots\ldots 2r.(n+1)_{2r}$$

und

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1}=(r+2)(r+3)\ldots\ldots(2r+2).(n+1)_{2r+2} \quad (7)$$

sein, wie man sogleich erkennt, wenn man $n+1$ für n setzt. Man erhält aber die Gleichung (5) aus (2) durch Differenziation der letzteren; diess gibt bei wirklicher Ausführung

$$\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}$$

$$=(-1)^{n+1}[(2z)^{n+1}-\overset{n}{A}_{n-2}(2z)^{n-1}+\overset{n}{A}_{n-4}(2z)^{n-3}-\ldots\ldots]\overline{e}^{z^2}$$

$$+(-1)^{n+1}[-2n(2z)^{n-1}+2(n-2)\overset{n}{A}_{n-2}(2z)^{n-3}$$

$$-2(n-4)\overset{n}{A}_{n-4}(2z)^{n-5}+\ldots\ldots]\overline{e}^{z^2}$$

Vergleicht man diess mit der Gleichung (5), so ist

$$\overset{n+1}{A}_{n-1} = 2n + \overset{n}{A}_{n-2}$$

$$\overset{n+1}{A}_{n-3} = 2(n-2)\overset{n}{A}_{n-2} + \overset{n}{A}_{n-4}$$

$$\overset{n+1}{A}_{n-5} = 2(n-4)\overset{n}{A}_{n-4} + \overset{n}{A}_{n-6}$$

u. s. f.

oder allgemein

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} = 2(n-2r)\overset{n}{A}_{n-2r} + \overset{n}{A}_{n-2r-2}.$$

Nehmen wir jetzt das oben ausgesprochene Bildungsgesetz für den $n$ten Differentialquotienten als richtig an und substituiren für $\overset{n}{A}_{n-2r}$ und $\overset{n}{A}_{n-2r-2}$ die in (3) und (4) gegebenen Werthe, so ist

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} = 2(n-2r)(r+1)(r+2)\ldots.2r.n_{2r}$$
$$+ (r+2)(r+3)\ldots.(2r+2)\,n_{2r+2}$$
$$= (r+2)(r+3)\ldots.2r\,[2(n-2r)(r+1)n_{2r} + (2r+1)(2r+2)n_{2r+2}].$$

Es ist aber $(n-2r)\,n_{2r} = (2r+1)\,n_{2r+1}$ und $2(r+1) = 2r+2$, folglich

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} = (r+2)(r+3)\ldots.2r(2r+1)(2r+2)\,[n_{2r+1} + n_{2r+2}]$$

oder unter Anwendung eines bekannten Satzes von den Binomialkoeffizienten

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} = (r+2)(r+3)\ldots.(2r+2)\,(n+1)_{2r+2}.$$

Dieser Ausdruck ist aber mit dem in (7) identisch, welcher letztere aus (4) dadurch abgeleitet worden war, dass $n+1$ für n gesetzt wurde. Das Bildungsgesetz unserer Coeffizienten gilt daher für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten, wenn es für den $n$ten richtig ist, d. h. es gilt allgemein, da es für den ersten Differentialquotienten Gültigkeit besitzt.

Setzen wir nun in der Gleichung (2) die Werthe der A ein, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^n(\overline{e}^{x^2})}{dx^n} \\ = (-1)^n\,[(2x)^n - 2n_2(2x)^{n-2} + 3.4n_4(2x)^{n-4} - 4.5.6n_6(2x)^{n-6} \\ \qquad + \ldots]\overline{e}^{x^2}\end{array}\right\}(8)$$

Nimmt man $x = au$, wo a eine Constante ist, so wird $dx^n = a^n du^n$, folglich

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^n(e^{-a^2u^2})}{du^n}\\ &=(-a)^n\,[(2au)^n-2n_2\,(2au)^{n-2}+3.4n_4\,(2au)^{n-4}-\ldots.]\,e^{-a^2u^2}\end{aligned}\right\}\;(9)$$

womit die gestellte Aufgabe allgemein gelöst ist.

II. Aus dem Vorigen lässt sich auch leicht der Werth des Differenzialquotienten

$$\frac{d^n(ue^{-a^2u^2})}{du^n}$$

ableiten.

Aus dem bekannten Satze

$$\frac{d^n(pq)}{du^n}=p\,\frac{d^n q}{du^n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{dp}{du}\cdot\frac{d^{n-1}q}{du^{n-1}}+\ldots.$$

erhält man nämlich für $p=u$, $q=e^{-a^2u^2}$

$$\frac{d^n(ue^{-a^2u^2})}{du^n}=u\,\frac{d^n(e^{-a^2u^2})}{du^n}+n\,\frac{d^{n-1}(e^{-a^2u^2})}{du^{n-1}};$$

folglich, wenn wir für die rechte Seite die gefundenen Werthe aus (9) substituiren und wieder $\overset{n}{A}_{n-2}$, $\overset{n}{A}_{n-4}$ etc. zur Abkürzung brauchen,

$$\frac{d^n(ue^{-a^2u^2})}{du^n}$$

$$=(-a)^n u\,[(2au)^n-\overset{n}{A}_{n-2}\,(2au)^{n-2}+\overset{n}{A}_{n-4}\,(2au)^{n-4}-\ldots.]\,e^{-a^2u^2}$$

$$+(-a)^{n-1}n\,[(2au)^{n-1}-\overset{n-1}{A}_{n-3}\,(2au)^{n-3}+\overset{n-1}{A}_{n-5}\,(2au)^{n-5}-\ldots.]\,e^{-a^2u^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(-1)^n a^{n-1}\,[(2au)^{n+1}-\overset{n}{A}_{n-2}(2au)^{n-1}+\overset{n}{A}_{n-4}(2au)^{n-3}-\ldots.]\,e^{-a^2u^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(-1)^n a^{n-1}\,[-2n\,(2au)^{n-1}+2n\,\overset{n-1}{A}_{n-3}\,(2au)^{n-3}-\ldots.]\,e^{-a^2u^2}$$

Nehmen wir die Coeffizienten gleicher Potenzen von $2au$ zusammen und bezeichnen die neuen Coeffizienten mit B_{n+1}, B_{n-1}, B_{n-3} etc., so ist

$$\begin{aligned}B_{n-2r+1}&=\overset{n}{A}_{n-2r}+2n\,\overset{n-1}{A}_{n-2r+1}\\ &=(r+1)\,(r+2)\ldots.2r\,.\,n_{2r}\\ &\qquad+2n\,.\,r\,(r+1)\,(r+2)\ldots.(2r-2)\,.\,(n-1)_{2r-2}\\ &=(r+1)(r+2)\ldots.(2r-2)\,[(2r-1)\,2r\,.\,n_{2r}+2nr\,.\,(n-1)_{2r-2}]\\ &=(r+1)(r+2)\ldots.(2r-2)\,.\,2r\,[(2r-1)\,n_{2r}+n\,.\,(n-1)_{2r-2}]\end{aligned}$$

Nun ist aber $n\,.\,(n-1)_{2r-2}=(2r-1)\,.\,n_{2r-1}$, folglich

$$B_{n-2r+1} = (r+1)(r+2)\dots(2r-2)(2r-1)2r\,[n_{2r}+n_{2r-1}]$$
$$= (r+1)(r+2)\dots 2r\,.\,(n+1)_{2r}.$$

Setzen wir nun $r=0, 1, 2, 3, \dots$ so wird

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^n(u\overset{-a^2u^2}{e})}{du^n}\\ &=\tfrac{1}{2}(-1)^n a^{n-1}[(2au)^{n+1}-2(n+1)_2(2au)^{n-1}\\ &\qquad +3\,.\,4(n+1)_4(2au)^{n-3}-\dots]\overset{-a^2u^2}{e}\end{aligned}\right\}(10)$$

Wir wollen nun einige Anwendungen der gefundenen Formeln (9) und (10) mittheilen.

III. Es sind folgende Integrale bekannt:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_0^\infty \overset{-kx^2}{e}\,dx \quad (11)$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{1.3.5\dots(2m-1)}{k^m}\,.\,\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_0^\infty x^{2m}\overset{-kx^2}{e}\,dx \quad (12)$$

Setzen wir im ersten Integrale $k=u^2$ und differenziiren $n$mal nach u, wobei x wie früher a constant für die Integration bleibt, so wird

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{d^n(u^{-1})}{du^n} = \int_0^\infty \frac{d^n(\overset{-x^2u^2}{e})}{du^n}\,dx.$$

Führt man die Differenziation auf der linken Seite aus, setzt unter dem Integrale rechts für $\frac{d^n(\overset{-x^2u^2}{e})}{du^n}$ seinen Werth aus der Gleichung (9) für $a=x$, und integrirt die einzelnen Glieder rechts nach Formel (12), so ergiebt sich folgender arithmetische Satz:

$$\left.\begin{aligned}&1.2.3\dots n\\ &=1.3.5\dots(2n-1)-2n_2.\frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2}+3.4n_4.\frac{1.3.5\dots(2n-5)}{2^2}-\dots\end{aligned}\right\}(13)$$

Aehnliche und allgemeinere Sätze lassen sich durch ein ähnliches Verfahren leicht in grösserer Anzahl ableiten. Wichtiger als dieses ist, dass man aus den oben gefundenen Differenzialquotienten die einiger anderen Funktionen ableiten kann, wie man sogleich sehen wird.

IV. Man setze in Formel (11) $k=1+u^2$, so ist

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^\infty \overset{-u^2x^2}{e}\,\overset{-x^2}{e}\,dx,$$

folglich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{d^n}{du^n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right] = \int_0^\infty \frac{d(\overset{-x^2u^2}{e})}{du^n}\overset{-x^2}{e}\,dx$$

Substituirt man für den Differenzialquotienten unter dem Integralzeichen den Ausdruck (9) für $a = x$, integrirt jedes einzelne Glied nach Formel (12) für $k = 1 + u^2$ und $m = n$, $n-1$, $n-2$, u.s.w., so wird

$$\frac{d^n}{du^n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right]$$

$$= (-1)^n \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{(2u)^n}{(\sqrt{1+u^2})^{2n+1}} - 2n_2\,\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot\frac{(2u)^{n-2}}{(\sqrt{1+u^2})^{2n-1}} + \ldots\right]$$

und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = U \qquad (14)$$

setzt, so ergiebt sich

$$\frac{d^n U}{du^n}$$

$$= (-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1)\left[u^n U^{2n+1} - \frac{2n_2}{4n-2}u^{n-2}U^{2n-1} + \ldots\right]$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{d^n U}{du^n}\\ &= u^n U^{2n+1} - \frac{2n_2}{4n-2}u^{n-2}U^{2n-1} + \frac{3.4n_4}{(4n-2)(4n-6)}u^{n-4}U^{2n-3} - \ldots\end{aligned}\right\}(15)$$

Ein allgemeines Glied der vorliegenden Reihe würde folgendes sein:

$$\pm\frac{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots 2r\,.\,n_{2r}}{(4n-2)(4n-6)(4n-10)\ldots(4n-4r+2)}u^{n-2r}U^{2n-2r+1}$$

aus welchem das Gesetz des Fortganges leicht zu übersehen ist. Man kann der Gleichung (15) noch eine andere Gestalt geben. Sei nämlich $u = \tan\varphi$, so wird $U = \cos\varphi$, und in dem allgemeinen Gliede

$$u^{n-2r}U^{2n-2r+1} = \cos^{n+1}\varphi\,.\,\sin^{n-2r}\varphi,$$

und wir erhalten jetzt

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{d^n U}{du^n}\\ &= \cos^{n+1}\varphi\left[\sin^n\varphi - \frac{2n_2}{4n-2}\sin^{n-2}\varphi + \frac{3.4n_4}{(4n-2)(4n-6)}\sin^{n-4}\varphi - \ldots\right]\end{aligned}\right\}(16)$$

V. Nimmt man in Formel (11) wieder $k = 1 + u^2$ und multitirt beiderseits mit dem constanten u, so ist

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^\infty u e^{-u^2 x^2} e^{-k^2} dx,$$

folglich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{d^n}{du^n} \left[\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right] = \int_0^\infty \frac{d^n(ue^{-u^2x^2})}{du^n} e^{-x^2} dx.$$

Substituirt man unter dem Integralzeichen den Werth des Differenzialquotienten aus Gleichung (10) für $a = x$ und integrirt die einzelnen Glieder nach Formel (12) für $k = 1 + u^2$ und $m = n$, $n - 1$ u. s. w., so ergiebt sich:

$$\frac{d^n}{du^n} \left[\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right]$$
$$= \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{(2u)^{n+1}}{(\sqrt{1+u^2})^{2n+1}} - 2(n+1)_2 \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}} \cdot \frac{(2u)^{n-1}}{(\sqrt{1+u^2})^{2n-1}} + \ldots\right]$$

und wenn man

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = U \quad (17)$$

setzt,

$$\frac{d^n U}{du^n}$$
$$= \frac{(-1)^n . 1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)}{u^n} \left[U^{2n+1} - \frac{(2n+1)_2}{4n-2} U^{2n-1} + \ldots\right]$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \cdot \dfrac{d^n U}{du^n} \\ = \dfrac{1}{u^n}\left[U^{2n+1} - \dfrac{2(n+1)_2}{4n-2} U^{2n-1} + \dfrac{3.4(n+1)_4}{(4n-2)(4n-6)} U^{2n-3} - \ldots\right] \end{array}\right\} (18)$$

wobei das allgemeine Glied der Reihe durch folgende Formel dargestellt wird:

$$\pm \frac{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots 2r(n+1)_{2r}}{(4n-2)(4n-6)(4n-10)\ldots(4n-4r+2)} U^{2n-2r+1},$$

aus welcher das Bildungsgesetz der Coeffizienten erhellet. Nimmt man noch $u = \tan\varphi$, so wird $U = \sin\varphi$, und man bekommt:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \cdot \dfrac{d^n U}{du^n} \\ = \cos^n\varphi \left[\sin^{n+1}\varphi - \dfrac{2(n+1)_2}{4n-2} \sin^{n-1}\varphi + \dfrac{3.4(n+1)_4}{(4n-2)(4n-6)} \sin^{n-3}\varphi - \ldots\right] \end{array}\right\} (19)$$

Die vorstehende Gleichung enthält die Auflösung der vom Herrn

Herausgeber im 1sten Hefte des 4ten Theiles d. Arch. S. 111 g
stellten Aufgabe. Die dort gegebenen Ausdrücke stellen sich unt
die obige Form, sobald man in ihnen $\cos\varphi(1-\sin\varphi^2)$ für $\cos^3$
$\cos^2\varphi(1-\sin^2\varphi)$ für $\cos^4\varphi$ u.s.w. setzt, die noch nöthigen Multipl
cationen ausführt und Alles nach Potenzen von $\sin\varphi$ ordnet.

VI. Setzt man in den Gleichungen (14), (15) und (17), (1
$u\sqrt{-1}$ für u, so erhält man die folgenden beiden Sätze:

Für

$$U=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

ist

$$\frac{1}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\cdot\frac{d^nU}{du^n}$$

$$=u^nU^{2n+1}\left[1+\frac{2n_2}{4n-2}\left(\frac{1}{uU}\right)^2+\frac{3.4n_4}{(4n-2)(4n-6)}\left(\frac{1}{uU}\right)^4+\ldots.\right] \quad (2($$

und für

$$U=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

ist

$$\frac{1}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\cdot\frac{d^nU}{du^n}$$

$$=\frac{U^{2n+1}}{u^n}\left[1+\frac{2(n+1)_2}{4n-2}\cdot\frac{1}{U^2}+\frac{3.4(n+1)_4}{(4n-2)(4n-6)}\cdot\frac{1}{U^4}+\ldots.\right] \quad (21)$$

Nun hat aber Euler folgendes Resultat gefunden:

$$\frac{d^n(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}}{du^n}$$

$$=\frac{n!.u^n}{(1-u^2)^{\frac{2n+1}{2}}}\left[1+\tfrac{1}{2}n_2\cdot\frac{1}{u^2}+\frac{1.3}{2.4}n_4\cdot\frac{1}{u^4}+\ldots.\right] \quad (22)$$

Vergleichen wir diess für $\sqrt{1-u^2}=U$ mit Formel (20), so er-
giebt sich folgender Satz:

Für

$$U=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

ist

$$1+\frac{2n_2}{4n-2}\left(\frac{1}{uU}\right)^2+\frac{3.4n_4}{(4n-2)(4n-6)}\left(\frac{1}{uU}\right)^4+\ldots.$$

$$=\frac{1.2.3\ldots.n}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\left[1+\tfrac{1}{2}n_2\frac{1}{u^2}+\frac{1.3}{2.4}n_4\cdot\frac{1}{u^4}+\ldots.\right]$$

oder für $u=\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{2n_2}{2n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{3.4n_4}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\ldots. \\ =\frac{1.2.3\ldots.n}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\left[1+\frac{1}{2}n_2x+\frac{1.3}{2.4}n_4x^2+\ldots.\right] \end{array}\right\}(23)$$

Diese Gleichung enthält die Formel (13) als speciellen Fall für $x=0$. Nimmt man $x=1$, so erhält man eine bekannte Eigenschaft der Binomialkoeffizienten.

Könnte man das vorliegende Theorem unabhängig von dem Vorigen beweisen, so liesse sich durch dasselbe umgekehrt die Gleichung (20), so wie die daraus folgende (21) aus dem Eulerschen Resultate ableiten.

XLI.

Aufgaben über Maxima und Minima.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

I.

Im zweiten Bande dieses Archivs Seite 405 wurde für das grösste, in einem gegebenen rhombischen Octaeder beschriebene Ellipsoid die Gleichung

$$\left\{\frac{x\sqrt{3}}{a}\right\}^2+\left\{\frac{y\sqrt{3}}{b}\right\}^2+\left\{\frac{z\sqrt{3}}{c}\right\}^2=1 \quad (1)$$

gefunden, worin $2a$, $2b$, $2c$ die Grössen der drei Achsen des Octaeders bezeichnen; wir wollen nun umgekehrt **dasjenige unter allen Octaedern mit gleichen Achsenrichtungen zu bestimmen suchen, dessen Seitenflächen das Ellipsoid (1) ebenfalls berühren, und das zugleich den kleinsten Inhalt hat.**

Es sei $ABCDEF$ (Taf. VII. Fig. 7.) das verlangte Octaeder AC, BD und EF seien die Achsen desselben, und zugleich die der x, y und z; γ, β und α die Winkel, welche die Achsen der x und y, der x und z, der y und z einschliessen; ferner setzen wir $\angle ABC=\varphi$, $\angle CAB=\psi$, und schreiben in der Gleichung (1) der Kürze wegen a_1, b_1 und c_1 statt $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{b}{\sqrt{3}}$ und $\frac{c}{\sqrt{3}}$, so ha-

ben wir, wenn $x_1, y_1, z_1; -x_2, y_2, z_2; x_3, -y_3, z_3; -x_4, -y_4, z_4; x_5, y_5, -z_5; -x_6, y_6, -z_6; x_7, -y_7, -z_7; -x_8, -y_8, -z_8$ die Coordinaten der Berührungspunkte der Seitenflächen ABE, BCE, AED, CED, ABF, CBF, ADF und CDF mit dem Ellipsoid bezeichnen, für dieses und für jene die Gleichungen:

$$\left\{\frac{x}{a_1}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{b_1}\right\}^2 + \left\{\frac{z}{c_1}\right\}^2 = 1 \quad (2)$$

$$\frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} + \frac{zz_1}{c_1^2} = 1 \quad (3)$$

$$-\frac{xx_2}{a_1^2} + \frac{yy_2}{b_1^2} + \frac{zz_2}{c_1^2} = 1 \quad (4)$$

$$\frac{xx_3}{a_1^2} - \frac{yy_3}{b_1^2} + \frac{zz_3}{c_1^2} = 1 \quad (5)$$

$$-\frac{xx_4}{a_1^2} - \frac{yy_4}{b_1^2} + \frac{zz_4}{c_1^2} = 1 \quad (6)$$

$$\frac{xx_5}{a_1^2} + \frac{yy_5}{b_1^2} - \frac{zz_5}{c_1^2} = 1 \quad (7)$$

$$-\frac{xx_6}{a_1^2} + \frac{yy_6}{b_1^2} - \frac{zz_6}{c_1^2} = 1 \quad (8)$$

$$\frac{xx_7}{a_1^2} - \frac{yy_7}{b_1^2} - \frac{zz_7}{c_1^2} = 1 \quad (9)$$

$$-\frac{xx_8}{a_1^2} - \frac{yy_8}{b_1^2} - \frac{zz_8}{c_1^2} = 1 \quad (10)$$

Setzen wir die senkrechte Höhe von E bis auf die Ebene $ABCD$ gleich h, und den Inhalt des Octaeders gleich K, so ist:

$$K = \tfrac{2}{3} AB \,.\, BC \,.\, h \,.\, \sin\varphi$$

und

$$h = \frac{2EO}{\sin\gamma} \sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2} \sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2} \sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}}$$

folglich

$$K = \tfrac{4}{3} AB \,.\, BC \,.\, EO \,.\, \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \,.$$

$$\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2} \sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2} \sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}} \quad (11)$$

Um die Grössen AB, BC, EO zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung (3) $z=0$, so ist die Gleichung von AB folgende:

$$y = \frac{b_1^2}{y_1} - \frac{b_1^2}{a_1^2} \,.\, \frac{x_1}{y_1} \,.\, x \quad (12)$$

Aus derselben Gleichung erhalten wir aber auch, wenn wir nach einander $z=0$ und $y=0$; $z=0$ und $x=0$; $x=0$ und $y=0$ setzen:

$$x = AO = \frac{a_1^2}{x_1},\ y = BO = \frac{b_1^2}{y_1},\ z = EO = \frac{c_1^2}{z_1}.$$

Dadurch erhalten wir aus den Dreiecken OAB und BOC:

$$AB = \frac{1}{x_1 y_1}\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma},$$

$$BC = \frac{1}{x_1 y_1}\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma}.$$

Führen wir die gefundenen Werthe von AB, BC und EO in No. 11 ein, und setzen der Kürze wegen:

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}} = M$$

so ist

$$K = \frac{c_1^2 M}{x_1^2 . y_1^2 z_1} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}}{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}}} \quad (13)$$

Wir finden aber auch für die Gleichung von AB:

$$y = \frac{a_1^2}{x_1} . \frac{\sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)} - x . \frac{\sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)} \quad (14)$$

Aus (12) und (14) folgt:

$$\frac{b_1^2}{a_1^2}\frac{x_1}{y_1} = \frac{\sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)},$$

woraus wir

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b_1^2 x_1 \sin\gamma}{a_1^2 y_1^2 - b_1^2 x_1 \cos\gamma},$$

also

$$\sin\psi = \frac{b_1^2 x_1 \sin\gamma}{\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma}}$$

und

$$\cos\psi = \frac{a_1^2 y_1 - b_1^2 x_1 \cos\gamma}{\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma}}.$$

erhalten.

Weil aber auch $AB : BC = \sin(\varphi+\psi) : \sin\psi$, so ist:

$$\sin(\varphi+\psi) = \frac{b_1^2 x_1 \sin\gamma}{\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma}}.$$

Da endlich

$AC = \frac{2a_1^2}{x_1}$ und auch $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB . BC . \cos\varphi}$,

so finden wir nach der Substitution der Werthe von AB un[d]
und der Gleichsetzung beider Werthe von AC

$$\cos\varphi =$$
$$\frac{b_1^4 x_1^2 - a_1^4 y_1^2}{\sqrt{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y}}$$

also auch

$$\sin\varphi =$$
$$\frac{2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \sin\gamma}{\sqrt{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y}}$$

Führen wir diesen Werth von $\sin\varphi$ in der Gleichung (13
so ist

$$K = \frac{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 M}{x_1 y_1 z_1} \quad (15)$$

Um den kleinsten Werth von K zu finden, betrachten w[ir]
als eine Function von x_1 und y_1, und setzen die Werthe vo[n]
und $\frac{dK}{dy_1}$ gleich Null, bestimmen alsdann aus den resultirenden
chungen die Werthe von x_1 und y_1, so erhalten wir:

$$\frac{dK}{dx_1} = -\frac{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 . M}{x_1^2 y_1 z_1^2}\left\{z_1 + x_1 \frac{dz_1}{dx_1}\right\}$$
$$\frac{dK}{dy_1} = -\frac{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 . M}{x_1 y_1^2 z_1^2}\left\{z_1 + y_1 \frac{dz_1}{dy_1}\right\}$$

Nach No. 2 ist aber $z_1 = c_1\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2}$, also auch

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{-c_1 x_1}{a_1^2\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2}},$$

$$\frac{dz_1}{dy_1} = \frac{-c_1 y_1}{b_1^2\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2}};$$

mithin sind die Bestimmungsgleichungen für x_1, y_1 und z_1:

$$a_1^2 z_1 \sqrt{1 - \left\{\frac{x}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2} = c_1 x_1^2 \quad (16)$$

$$b_1^2 z_1 \sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2} = c_1 y_1^2 \quad (17)$$

$$z_1 = c_1\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2} \quad (18)$$

woraus wir leicht

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{3}},\ y_1 = \frac{b_1}{\sqrt{3}},\ z_1 = \frac{c_1}{\sqrt{3}} \ldots . \} \quad (19)$$

finden; setzen wir statt der Grössen a_1, b_1, c_1 ihre oben angegebenen Werthe, so ist

$$x_1 = \frac{a}{3},\ y_1 = \frac{b}{3},\ z_1 = \frac{c}{3};$$

Auf gleiche Art finden wir

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{a}{3},\ y_2 = \frac{b}{3},\ z_2 = \frac{c}{3};\\
x_3 &= \frac{a}{3},\ y_3 = -\frac{b}{3},\ z_3 = \frac{c}{3};\\
x_4 &= -\frac{a}{3},\ y_4 = -\frac{b}{3},\ z_4 = \frac{c}{3};\\
x_5 &= \frac{a}{3},\ y_5 = \frac{b}{3},\ z_5 = -\frac{c}{3};\\
x_6 &= -\frac{a}{3},\ y_6 = \frac{b}{3},\ z_6 = -\frac{c}{3};\\
x_7 &= \frac{a}{3},\ y_7 = -\frac{b}{3},\ z_7 = -\frac{c}{3};\\
x_8 &= -\frac{a}{3},\ y_8 = -\frac{b}{3},\ z_8 = -\frac{c}{3}.
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Für den Inhalt des gesuchten Körpers finden wir daher

$$K = 8\frac{abc}{3}\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}} \ldots . \quad (21)$$

oder auch

$$K = 8a_1b_1c_1\sqrt{3}.\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}} \ldots . \quad (22)$$

Vergleichen wir die Gleichungen (2), (19) und (22) mit jenen in (1), (20) und (21), so finden wir nach den drei erstern:

Dass, wenn um irgend ein gegebenes dreiaxiges Ellipsoid, von welchem allgemein drei beliebige, jedoch einander zugeordnete Durchmesser die Grössen $2A$, $2B$ und $2C$ haben, das kleinste rhombische Octaeder, dessen Ecken in den Verlängerungen dieser Durchmesser liegen, beschrieben werden soll; alsdann $\frac{A}{\sqrt{3}}$, $\frac{B}{\sqrt{3}}$ und $\frac{C}{\sqrt{3}}$ die absoluten Grössen (ohne Berücksichtigung der Zeichen) der drei Coordinaten der acht Berührungspunkte des Ellipsoids mit den Seitenflächen des Octaeders sind, ferner dass

$$K' = 8ABC\sqrt{3}\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}}$$

der Inhalt dieses kleinsten Octaeders ist (wo α, β und γ wie oben die Winkel bezeichnen, welche die Durchmesser $2B$ und $2C$, $2A$ und $2C$, $2A$ und $2B$ einschliessen).

Endlich ergiebt sich aus den drei letzten Gleichungen No. 1, 20 und 21, dass, wenn in ein gegebenes Octaeder, dessen Achsen (Diagonalen) $2a$, $2b$ und $2c$ sind, ein grösstes Ellipsoid einbeschrieben ist, und alsdann um dieses letztere wieder das kleinste Octaeder, dessen Ecken auf den Verlängerungen der Durchmesser $2a$, $2b$, $2c$ liegen, beschrieben werden soll, dieses letztere mit dem gegebenen Octaeder identisch wird; so wie auch die Berührungspunkte der Seitenflächen des erstern gegebenen Octaeders mit dem grössten Ellipsoid, mit jenen der entsprechenden Seitenflächen des gesuchten kleinsten Octaeders mit dem Ellipsoid zusammenfallen.

II.

Es ist ein Parallelogramm $ABCD$ (Taf. VII. Fig. 8.) gegeben; man soll die grösste Ellipse in und die kleinste um dasselbe beschreiben.

Für den ersten Fall seien $AB = a$, $AC = b$ die Seiten, und $CAB = \alpha$ der von diesen eingeschlossene Winkel des Parallelogramms; ferner sei für ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \ldots \quad (1)$$

die allgemeine Gleichung für einen Kegelschnitt.

Nehmen wir aber AB als Achse der x und AC als Achse der y, so ist, wenn x' und y' die neuen Coordinaten bezeichnen:

$$x = x' + y' \cos \alpha,\ y = y' \sin \alpha.$$

Führen wir diese Werthe von x und y in der Gleichung (1) ein, so erhält sie die Form

$$A'y'^2 + 2B'x'y' + Cx'^2 + 2D'y' + 2Ex' + F = 0 \ldots \quad (2)$$

wo

$$A' = A \sin \alpha^2 + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos \alpha^2$$
$$B' = B \sin \alpha + C \cos \alpha$$
$$D' = D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

ist.

Für $x' = 0$ erhalten wir aus (2)

$$y' = -\frac{D'}{A'} \pm \sqrt{\frac{D'^2 - A'F}{A'}}.$$

Da aber die Ellipse die Seite AC berühren soll, so kann y' nur einen einzigen Werth haben, folglich muss

$$D'^2 - A'F = 0 \ldots \quad (3)$$

sein. Dadurch wird aber, wenn I der Berührungspunkt der Ellipse mit der Seite AC ist,

$$AI = y' = -\frac{D'}{A'}.$$

Ganz auf gleiche Art erhalten wir, wenn M der Berührungspunkt der Ellipse mit AB ist:

$$E^2 - CF = 0 \; \ldots . \quad (4)$$

und

$$AM = x' = -\frac{E}{C}.$$

Um die Ordinate BL des Berührungspunktes L der Ellipse mit der Seite BD zu erhalten, setzen wir in der Gleichung (2) $x' = a$, wodurch wir

$$y' = -\frac{B'a + D'}{A'} \pm \frac{\sqrt{\{B'a + D'\}^2 - A'\{Ca^2 + 2Ea + F\}}}{A'}$$

erhalten. Da aber auch in diesem Falle y' nur einen einzigen Werth haben kann, so muss die Gleichung

$$\{B'a + D'\}^2 - A'\{Ca^2 + 2Ea + F\} = 0 \; \ldots . \quad (5)$$

statt finden; daher wird

$$BL = y' = -\frac{B'a + D'}{A'}.$$

Ebenso bekommen wir für $y' = b$ die Gleichung

$$\{B'b + E\}^2 - C\{A'b^2 + 2D'b + F\} = 0 \; \ldots . \quad (6)$$

und wenn sich die Ellipse und die Seite CD in K berühren, so ist

$$CK = x' = -\frac{B'b + E}{C}.$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (3), (4), (5) und (6) ergeben sich folgende zwei:

$$\frac{1}{2F^2}\{B'^2F^2 - D'^2E^2\}\,a + \frac{1}{F}\{B'D'F - ED'^2\} = 0 \; \ldots . \quad (7)$$

$$\frac{1}{2F^2}\{B'^2F^2 - D'^2E^2\}\,b + \frac{1}{F}\{B'EF - D'E^2\} = 0 \; \ldots . \quad (8)$$

Vervielfachen wir die erste dieser Gleichungen mit b und die andere mit a, subtrahiren alsdann die Producte, so erhalten wir $D' = \frac{Ea}{b}$. Aus No. 7. ist aber $B' = -\frac{D'}{a} \pm \frac{D'}{aF}\{Ea + F\}$.

Führen wir in dieser Gleichung den Werth von D' ein, so haben wir für das Zeichen +

$$B' = \frac{E^2 a}{Fb} \ldots . \quad (9)$$

und für das Zeichen —

$$B' = -\frac{E}{Fb}\{Ea + 2F\} \ldots . \quad (10)$$

Werden die Werthe von A', C, D' und der letzte von B' in No. (2) eingeführt, so ist die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{E^2 a^2}{Fb^2} y'^2 - \frac{2E}{Fb}\{Ea + 2F\} x'y' + \frac{E^2}{F} x'^2 + \frac{2Ea}{b} y' + 2Ex' + F = 0 \ldots . \quad (11)$$

Aus dieser ist

$$y' = \frac{b}{Ea^2}\{(Ea + 2F)x' - Fa\} \pm \frac{2b}{Ea^2}\sqrt{F(Ea + F)(x'^2 - ax')} \ldots . \quad (12)$$

Wird diese Gleichung mit $\sin\alpha \,.\, dx'$ multiplicirt, alsdann integrirt, und das Integral von $x' = 0$ bis $x' = a$ genommen, so erhalten wir für das Zeichen + den Flächenraum der Figur $AIKLB$, und für das Zeichen — die Fläche der Figur $AIMBL$. Im ersten Falle erhalten wir:

$$\sin\alpha \int y' dx' = \frac{b \sin\alpha}{2Ea^2}\{(Ea + 2F)x'^2 - 2Fax'\}$$
$$+ \frac{b \sin\alpha}{2Ea^2}(2x' - a)\sqrt{F(Ea + F)(x'^2 - ax')}$$
$$- \frac{b \sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea + F)} \cdot \log\left\{\frac{2x' - a + 2\sqrt{x'^2 - ax'}}{a}\right\} + \text{Const.}$$

Für $x' = 0$ ist $\text{Const} = \frac{b \sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea + F)} \log(-1)$,

mithin ist

$$\sin\alpha \int_a^0 y' dx' = \frac{ba}{2}\sin\alpha + \frac{b \sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea + F)} \,.\, \log(-1),$$

folglich ist

die elliptische Fläche $AIKLB = \frac{ba}{2}\sin\alpha + \frac{b\sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea + F)} \,.\, \log(-1)$

Für das Zeichen — finden wir ebenso

die elliptische Fläche $AIMLB = \frac{ab}{2}\sin\alpha - \frac{b\sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea + F)} \,.\, \log(-1)$.

Daher ist die Fläche der Ellipse selbst $= \frac{b \sin\alpha}{2E}\sqrt{F(Ea + F)} \,.\, \log(-1)$.

etzen wir in diesem Ausdrucke $\frac{F}{E} = z$, differenziiren denselben, nd setzen alsdann das Differenzial desselben gleich Null, so eralten wir:

$$a + 2z = 0, \text{ also } z = -\frac{a}{2};$$

iithin wird der Ausdruck für die Fläche der Ellipse ein Maximum, 'enn $\frac{F}{E} = -\frac{a}{2}$ oder $F = -\frac{aE}{2}$ ist. Durch die Einführung dieses Verths von F in den letzten Ausdruck für den Inhalt der Ellipse rhalten wir, wenn wir jenen Ausdruck mit I bezeichnen:

$$I = \frac{ab}{4} \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1} \,.\, \log(-1) \ldots . \quad (13)$$

)a aber allgemein $\log\{\cos\varphi \mp \sin\varphi\sqrt{-1}\} = \pm(2k\pi - \varphi)\sqrt{-1}$ st, was auch k für eine positive ganze Zahl bedeutet, so ist, wenn 'ir $k = 1$ und $\varphi = \pi$ setzen:

$$\log(-1) = \pm\pi\sqrt{-1}.$$

'ehmen wir das untere Zeichen und substituiren diesen Werth von ›g (-1) in der Gleichung (13), so ist

$$I = \frac{ab\pi}{4} \sin\alpha \ldots . \quad (14)$$

'ühren wir endlich den obigen Werth von F in der Gleichung 11) ein, so erhalten wir:

$$4a^2y'^2 - 4a^2by' + 4b^2x'^2 - 4ab^2x' + a^2b^2 = 0,$$

der, wenn wir die Quadrate ergänzen, und $y' - \frac{b}{2} = u$, $x' - \frac{a}{2} = t$ setzen:

$$a^2u^2 + b^2t^2 = \frac{a^2b^2}{4} \ldots . \quad (15)$$

'.s sind also die durch den Mittelpunkt des Parallelogramms mit en Seiten desselben parallel gezogenen Linien IL und MK dieenigen zugeordneten Durchmesser der Ellipse, welche ihre Beührungspunkte mit den Seiten des Parallelogramms verbinden.

Endlich ist die Fläche des elliptischen Raumes

$$AIKLB = \frac{ab}{8}\{4 + \pi\} \sin\alpha$$

nd die Fläche des elliptischen Raumes

$$AIMBL = \frac{ab}{8}\{4 - \pi\} \sin\alpha.$$

Um die kleinste Ellipse um das Parallelogramm zu beschreiben, nehmen wir AB und AC zu Coordinatenachsen und behalten alle übrigen Annahmen wie im ersten Fall bei; alsdann finden wir leicht, dass

$$F=0,\ D'=-\frac{A'b}{2},\ E=-\frac{Ca}{2},\ B'=0;$$

so dass also die Gleichung der umschriebenen Ellipse

$$A'y'^2+Cx'^2-A'by'-Cax'=0\ \ldots\ (16)$$

ist. Bestimmen wir aus dieser Gleichung y', vervielfachen alsdann mit $\sin\alpha\,.\,dx'$ und integriren, so ist

$$\sin\alpha\int y'dx'=\frac{bx'}{2}\sin\alpha\pm\frac{\sin\alpha}{2}\left\{\frac{(2x'-a)}{4}\sqrt{b^2+\frac{4aCx'}{A'}-\frac{4Cx'^2}{A'}}\right.$$
$$\left.+\left(b^2+\frac{Ca^2}{A'}\right)Arctg\frac{(2x'-a)\sqrt{\frac{C}{A'}}}{\sqrt{b^2+\frac{4aCx'}{A'}-\frac{4Cx'^2}{A'}}}\right\}+\text{Const.}\ \ldots\ (17)$$

Um den Inhalt I' der Ellipse mittelst dieses Ausdrucks zu bestimmen, so müssen wir vorerst bemerken, dass die Seiten AC und BD des gegebenen Parallelogramms parallele Sehnen der zu bestimmenden Ellipse sind, und dass daher eine durch die Mitten dieser beiden Seiten gezogene Linie ein Durchmesser derselben ist; verbindet man daher die Gleichung $y'=\frac{b}{2}$ dieses Durchmessers mit der Gleichung

$$y'=\frac{b}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+4a\frac{C}{A'}x'-4\frac{C}{A'}x'^2},$$

die wir aus (16) erhalten, so erhalten wir die Abscissen AP und AQ der Durchschnittspunkte dieses Durchmessers mit der Ellipse, nämlich:

$$AP=x'_1=-\tfrac{1}{2}\{a-\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\}$$

und

$$AQ=x'_2=+\tfrac{1}{2}\{a+\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\}.$$

Das Integral zwischen diesen beiden Grenzen genommen und das obere Zeichen im Ausdruck (17) gebraucht, giebt die Fläche des elliptischen Raums $PNCSDOQ$. Das Integral von $x'=0$ bis $x'_1=-\frac{1}{2}\{a-\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\}$ genommen und das untere Zeichen in No. 17. gebraucht, giebt die elliptische Fläche APN. Nehmen wir ferner das Integral von $x'=a$ bis $x'=\frac{1}{2}\{a+\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\}$ ebenfalls mit dem untern Zeichen in No. 17, so er-

halten wir die Fläche des Raumes BOQ; endlich giebt das Integral von $x' = 0$ bis $x' = a$ mit Beibehaltung des Zeichens — die Fläche ARB.

Führen wir das so eben Angegebene aus und bemerken, dass die Fläche der umschriebenen Ellipse $RNSO$ = Raum $PNCSDOQ$ + Raum ARB — Raum APN — Raum BOQ ist, so erhalten wir für den Inhalt der Ellipse folgenden Ausdruck:

$$I' = \frac{\{b^2 + \frac{C}{A'}a^2\}\,\pi \sin\alpha}{4\sqrt{\frac{C}{A'}}} \ldots . \quad (18)$$

Setzen wir wieder $\frac{C}{A'} = z$, so ist

$$I' = \frac{\{b^2 + a^2 z\}\,\pi \sin\alpha}{4\sqrt{z}} \ldots . \quad (19)$$

mithin

$$\frac{dI'}{dz} = -\tfrac{1}{4}\left\{\frac{b^2 + a^2 z}{2z\sqrt{z}}\,\pi \sin\alpha - \frac{a^2\,\pi \sin\alpha}{\sqrt{z}}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist $z = \frac{b^2}{a^2} = \frac{C}{A'}$, mithin $C = \frac{A'b^2}{a^2}$; dadurch wird der Ausdruck für den Inhalt der Ellipse $RNSO$ in No. 18 oder (19) zu

$$I' = \frac{ab\pi}{2}\sin\alpha \ldots . \quad (20)$$

Weil nun die Grösse des Durchmessers $NO = AP + AQ = \sqrt{a^2 + \frac{A'}{C}b^2}$, so ist $NO = a\sqrt{2}$.

Setzen wir endlich in (16) $\frac{b^2}{a^2}$ statt $\frac{C}{A'}$, und $\frac{a}{2}$ statt x', so erhalten wir für die Grösse des Durchmessers RS, der dem NO zugeordnet ist, den Werth $b\sqrt{2}$. Die Gleichung der gesuchten Ellipse ist daher:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2by - ab^2x = 0,$$

oder

$$a^2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + b^2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{2},$$

und wenn wir u statt $y - \frac{b}{2}$ und t statt $x - \frac{a}{2}$ schreiben:

$$a^2u^2 + b^2t^2 = \frac{a^2b^2}{2} \ldots : \quad (21)$$

Aus (14), (15), (20) und (21) folgt:

a) dass die umschriebene Ellipse zweimal so gross ist als die einbeschriebene;

b) dass beide ähnliche und gleichliegende Ellipsen sind.

Der zweite Theil dieser Aufgabe, nämlich die kleinste Ellipse um das Parallelogramm $ABCD$ (Taf. VII. Fig. 8.) zu beschreiben, lässt sich auf viel kürzerem Wege auflösen. Ziehen wir nämlich durch den Mittelpunkt E des Parallelogramms mit AB und AC die parallelen Linien NO und SR, so geben diese die Lage zweier zugeordneter Durchmesser der zu suchenden Ellipse an. Bezeichnen wir nun NE und RE mit f und g, ferner den Winkel, den SR mit der grossen Achse $2A$ der Ellipse macht, mit ω, und den, welchen NO mit derselben bildet, mit φ; und ist endlich $2B$ die kleine Achse der zu bestimmenden Ellipse, so haben wir, nach den bekannten Sätzen von den Kegelschnitten, folgende Bestimmungsgleichungen:

$$4f^2g^2 = a^2g^2 + b^2f^2 \;\ldots\; (1)$$

$$f^2 = \frac{A^2 \sin\omega}{\cos(\alpha-\omega)\sin\alpha} \;\ldots\; (2)$$

$$g^2 = \frac{B^2\cos(\alpha-\omega)}{\sin\omega\,.\,\sin\alpha} \;\ldots\; (3)$$

$$A\,.\,B = fg\sin\alpha \;\ldots\; (4)$$

Bezeichnen wir endlich den Flächeninhalt der Ellipse wieder mit I', so ist

$$I' = AB\pi \;\ldots\; (5)$$

Drücken wir I' durch a, b, π und Functionen von α und ω aus, so finden wir:

$$I' = \frac{\pi}{4}\left\{a^2\sqrt{\frac{\sin 2(\alpha-\omega)}{\sin 2\omega}} + b^2\sqrt{\frac{\sin 2\omega}{\sin 2(\alpha-\omega)}}\right\}\sin\alpha \;\ldots\; (6)$$

mithin

$$\frac{dI'}{d\omega} = \frac{\pi}{4}\sin\alpha\left\{\frac{-a^2\sin 2\alpha}{\sin 2\omega^2\sqrt{\sin 2\alpha\,\mathrm{cotg}\,2\omega - \cos 2\alpha}} + \frac{b^2\sin 2\alpha}{\sin 2\omega^2\{\sin 2\alpha\,\mathrm{cotg}\,2\omega - \cos 2\alpha\}^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich Null, und bestimmen alsdann den Werth von $\mathrm{cotg}\,2\omega$, so erhalten wir:

$$\mathrm{cotg}\,2\omega = \frac{a^2\cos 2\alpha + b^2}{a^2\sin 2\alpha}.$$

Suchen wir mittelst dieses Werths die Ausdrücke $\sqrt{\frac{\sin 2(\alpha-\omega)}{\sin 2\omega}}$ und $\sqrt{\frac{\sin 2\omega}{\sin 2(\alpha-\omega)}}$, so erhalten wir:

$$I=\frac{abn}{2}\sin\alpha,$$

also dasselbe wie oben.

XLII.

Ueber eine neue geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die folgende Aufgabe ist, so viel wir wissen, noch niemals behandelt worden, dürfte aber sowohl in theoretischer als auch in praktischer Beziehung mehrfaches Interesse darbieten:

Aus vier in einer und derselben geraden Linie liegenden Punkten M, M_1, M_2, M_3, deren Entfernungen von einander bekannt sind, werden zwei andere mit jenen vier Punkten in einer Ebene liegende Punkte S und S_1 gesehen, und in den Punkten M, M_1, M_2, M_3 die 180° nicht übersteigenden Winkel SMS_1, SM_1S_1, SM_2S_1, SM_3S_1, welche die von einem jeden der Punkte M, M_1, M_2, M_3 nach S und S_1 gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, gemessen. Man soll die Lage der Punkte S und S_1 bestimmen.

Weil diese Aufgabe eigentlich nur ein specieller Fall einer weit allgemeinern Aufgabe ist, welcher wird bald eine besondere Abhandlung zu widmen hoffen, so wollen wir in den drei nächsten Paragraphen von einigen allgemeinern Betrachtungen ausgehen, welche uns späterhin bei der Auflösung des in Rede stehenden allgemeinen Problems von Nutzen sein werden, wenn dieselben auch für unsern nächsten Zweck eigentlich nicht in dieser Allgemeinheit angestellt zu werden brauchen.

§. 2.

Wir denken uns drei beliebige Punkte M und S, S_1 im Raume, und bezeichnen deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem respective durch a, b, c und

$x, y, z; x_1, y_1, z_1$. Ferner wollen wir die Entfernungen MS und MS_1 des Punktes M von den Punkten S und S_1 durch r und r_1, den von den Linien MS und MS_1 an dem Punkte M mit einander eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, unter denen die Linien MS und MS_1 gegen die positiven Theile dreier, durch den Punkt M gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen geneigt sind, respective durch φ, ψ, χ und $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ bezeichnen. Dies vorausgesetzt haben wir nach den Principien der analytischen Geometrie die Relationen

$$1)\quad \begin{cases} x = a + r\cos\varphi, \\ y = b + r\cos\psi, \\ z = c + r\cos\chi; \end{cases}$$

und

$$2)\quad \begin{cases} x_1 = a + r_1\cos\varphi_1, \\ y_1 = b + r_1\cos\psi_1, \\ z_1 = c + r_1\cos\chi_1; \end{cases}$$

so wie ferner die Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1, \\ \cos\varphi_1{}^2 + \cos\psi_1{}^2 + \cos\chi_1{}^2 = 1 \end{cases}$$

und

$$4)\ \cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\psi\cos\psi_1 + \cos\chi\cos\chi_1 = \cos\alpha.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt

$$5)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x-a}{r},\ \cos\psi = \dfrac{y-b}{r},\ \cos\chi = \dfrac{z-c}{r}; \\ \cos\varphi_1 = \dfrac{x_1-a}{r_1},\ \cos\psi_1 = \dfrac{y_1-b}{r_1},\ \cos\chi_1 = \dfrac{z_1-c}{r_1}; \end{cases}$$

also mittelst der Gleichungen 3) und 4)

$$6)\quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2, \\ (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2 = r_1{}^2 \end{cases}$$

und

$$7)\ (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) + (z-c)(z_1-c) = rr_1\cos\alpha.$$

Bezeichnet nun Δ den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks SMS_1, so ist bekanntlich

$$8)\ \Delta = rr_1\sin\alpha,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$9)\ (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) + (z-c)(z_1-c) = \Delta\cot\alpha$$

oder

$$10)\quad xx_1 + yy_1 + zz_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) - c(z + z_1) = \Delta \cot \alpha - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Liegen die drei Punkte M und S, S_1 in der Ebene der xy, so ist, wie sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt:

$$11)\quad xx_1 + yy_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) = \Delta \cot \alpha - (a^2 + b^2).$$

§. 3.

Wir wollen uns jetzt vier in der Ebene der xy liegende Punkte

$$M, M_1, M_2, M_3$$

denken, deren Coordinaten in Bezug auf das zum Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem respective

$$a, b;\ a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ a_3, b_3$$

sind; und S, S_1 sollen wieder zwei beliebige Punkte im Raume sein, deren Coordinaten in Bezug auf dasselbe rechtwinklige System

$$x, y, z \text{ und } x_1, y_1, z_1$$

sind. Bezeichnen wir nun die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

respective durch

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;$$

die doppelten Flächenräume der Dreiecke

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

respective durch

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3;$$

und setzen der Kürze wegen

$$12)\quad xx_1 + yy_1 + zz_1 = U,\ x + x_1 = X,\ y + y_1 = Y$$

und

$$13)\quad \begin{cases} \Delta \cot \alpha - (a^2 + b^2) = \Omega, \\ \Delta_1 \cot \alpha_1 - (a_1{}^2 + b_1{}^2) = \Omega_1, \\ \Delta_2 \cot \alpha_2 - (a_2{}^2 + b_2{}^2) = \Omega_2, \\ \Delta_3 \cot \alpha_3 - (a_3{}^2 + b_3{}^2) = \Omega_3; \end{cases}$$

so erhalten wir nach 10) die vier folgenden Gleichungen:

$$14)\quad \begin{cases} U - aX - bY = \Omega, \\ U - a_1 X - b_1 Y = \Omega_1, \\ U - a_2 X - b_2 Y = \Omega_2, \\ U - a_3 X - b_3 Y = \Omega_3. \end{cases}$$

Eliminiren wir nun aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen U, X, Y, so erhalten wir die bemerkenswerthe Relation

$$15)\quad \left.\begin{array}{l} \{(a_2 - a_3)(b_1 - b_2) - (a_1 - a_2)(b_2 - b_3)\}\,\Omega \\ + \{(a - a_2)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b - b_2)\}\,\Omega_1 \\ + \{(a_1 - a_3)(b - b_1) - (a - a_1)(b_1 - b_2)\}\,\Omega_2 \\ + \{(a - a_1)(b_1 - b_2) - (a_1 - a_2)(b - b_1)\}\,\Omega_3 \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$16)\quad \left.\begin{array}{l} \{(a_2 - a_3)b_1 + (a_3 - a_1)b_2 + (a_1 - a_2)b_3\}\,\Omega \\ - \{(a_2 - a_3)b + (a_3 - a)b_2 + (a - a_2)b_3\}\,\Omega_1 \\ + \{(a_1 - a_3)b + (a_3 - a)b_1 + (a - a_1)b_3\}\,\Omega_2 \\ - \{(a_1 - a_2)b + (a_2 - a)b_1 + (a - a_1)b_2\}\,\Omega_3 \end{array}\right\} = 0,$$

und folglich, wenn man für die Grössen Ω, Ω_1, Ω_2, Ω_3 ihre aus dem Obigen bekannten Werthe in diese Gleichung einführt:

$$\begin{array}{rl} 17) & \{(a_2 - a_3)b_1 + (a_3 - a_1)b_2 + (a_1 - a_2)b_3\}\,\Delta \cot \alpha \\ & - \{(a_2 - a_3)b + (a_3 - a)b_2 + (a - a_2)b_3\}\,\Delta_1 \cot \alpha_1 \\ & + \{(a_1 - a_3)b + (a_3 - a)b_1 + (a - a_1)b_3\}\,\Delta_2 \cot \alpha_2 \\ & - \{(a_1 - a_2)b + (a_2 - a)b_1 + (a - a_1)b_2\}\,\Delta_3 \cot \alpha_3 \\ = & \{(a_2 - a_3)b_1 + (a_3 - a_1)b_2 + (a_1 - a_2)b_3\}(a^2 + b^2) \\ & - \{(a_2 - a_3)b + (a_3 - a)b_2 + (a - a_2)b_3\}(a_1^2 + b_1^2) \\ & + \{(a_1 - a_3)b + (a_3 - a)b_1 + (a - a_1)b_3\}(a_2^2 + b_2^2) \\ & - \{(a_1 - a_2)b + (a_2 - a)b_1 + (a - a_1)b_2\}(a_3^2 + b_3^2). \end{array}$$

Wenn die vier in der Ebene der xy liegenden Punkte M, M_1, M_2, M_3 in einer und derselben geraden Linie liegen, und diese gerade Linie als Axe der x angenommen wird, so erhalten die vorhergehenden Gleichungen die identische Form $0 = 0$. In diesem Falle hat man aber, wenn man bloss drei in derselben geraden Linie, welche als Axe der x angenommen wird, liegende Punkte M, M_1, M_2 in Betrachtung zieht, nach 10) die drei Gleichungen

$$\begin{array}{l} U - aX = \Delta \cot \alpha - a^2, \\ U - a_1 X = \Delta_1 \cot \alpha_1 - a_1^2, \\ U - a_2 X = \Delta_2 \cot \alpha_2 - a_2^2; \end{array}$$

aus denen, wenn man sie nach der Reihe mit $a_1 - a_2$, $a_2 - a$, $a - a_1$ multiplicirt und dann zu einander addirt, sogleich die Relation

$$18)\quad (a_1-a_2)\Delta\cot\alpha+(a_2-a)\Delta_1\cot\alpha_1+(a-a_1)\Delta_2\cot\alpha_2$$
$$=(a_1-a_2)a^2+(a_2-a)a_1{}^2+(a-a_1)a_2{}^2$$

oder

$$19)\quad (a_1-a_2)\Delta\cot\alpha+(a_2-a)\Delta_1\cot\alpha_1+(a-a_1)\Delta_2\cot\alpha_2$$
$$=(a-a_1)aa_1+(a_1-a_2)a_1a_2+(a_2-a)a_2a$$

erhalten wird. Weil aber, wenn P, Q, R drei beliebige Grössen bezeichnen, wie man leicht findet, immer

$$20)\quad (Q-R)P^2+(R-P)Q^2+(P-Q)R^2$$
$$=-(P-Q)(Q-R)(R-P)$$

ist, so kann man die Gleichung 18) auch auf den Ausdruck

$$21)\quad (a_1-a_2)\Delta\cot\alpha+(a_2-a)\Delta_1\cot\alpha_1+(a-a_1)\Delta_2\cot\alpha_2$$
$$=-(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)$$

oder auf den Ausdruck

$$22)\quad \frac{\Delta\cot\alpha}{(a-a_1)(a_2-a)}+\frac{\Delta_1\cot\alpha_1}{(a_1-a_2)(a-a_1)}+\frac{\Delta_2\cot\alpha_2}{(a_2-a)(a_1-a_2)}=-1$$

bringen.

§. 4.

Ferner wollen wir jetzt fünf beliebige Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$$

im Raume betrachten, deren rechtwinklige Coordinaten respective

$$a,\ b,\ c;\ a_1,\ b_1,\ c_1;\ a_2,\ b_2,\ c_2;\ a_3,\ b_3,\ c_3;\ a_4,\ b_4,\ c_4$$

sein mögen; und S, S_1 sollen wieder zwei beliebige Punkte im Raume sein, deren Coordinaten in Bezug auf dasselbe System

$$x,\ y,\ z \text{ und } x_1,\ y_1,\ z_1$$

sind. Setzen wir nun der Kürze wegen auf ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen

$$23)\quad \begin{cases} xx_1+yy_1+zz_1=U \\ x+x_1=X,\ y+y_1=Y,\ z+z_1=Z \end{cases}$$

und, indem die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1,\ SM_4S_1$$

respective durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4;$$

die doppelten Flächenräume der Dreiecke

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1,\ SM_4S_1$$

respective durch

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4$$

bezeichnet werden,

$$24)\ \left\{\begin{array}{l} \Delta \cot \alpha - (a^2+b^2+c^2) = \Omega, \\ \Delta_1 \cot \alpha_1 - (a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2) = \Omega_1, \\ \Delta_2 \cot \alpha_2 - (a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2) = \Omega_2, \\ \Delta_3 \cot \alpha_3 - (a_3{}^2+b_3{}^2+c_3{}^2) = \Omega_3, \\ \Delta_4 \cot \alpha_4 - (a_4{}^2+b_4{}^2+c_4{}^2) = \Omega_4; \end{array}\right.$$

so haben wir nach 10) die fünf folgenden Gleichungen:

$$25)\ \left\{\begin{array}{l} U - aX - bY - cZ = \Omega, \\ U - a_1X - b_1Y - c_1Z = \Omega_1, \\ U - a_2X - b_2Y - c_2Z = \Omega_2, \\ U - a_3X - b_3Y - c_3Z = \Omega_3, \\ U - a_4X - b_4Y - c_4Z = \Omega_4; \end{array}\right.$$

aus denen sich durch Elimination der vier Grössen U, X, Y, Z ohne Schwierigkeit die folgende bemerkenswerthe Relation ergiebt:

$$26)\ 0 = \left\{\begin{array}{l} (a_1-a_2)\{(b_2-b_3)(c_3-c_4)-(b_3-b_4)(c_2-c_3)\} \\ +(a_2-a_3)\{(b_3+b_4)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b_1-b_2)(c_2-c_3)-(b_2-b_3)(c_1-c_2)\} \end{array}\right\}\Omega$$

$$-\left\{\begin{array}{l} (a-a_2)\{(b_2-b_3)(c_3-c_4)-(b_3-b_4)(c_2-c_3)\} \\ +(a_2-a_3)\{(b_3-b_4)(c-c_2)-(b-b_2)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b-b_2)(c_2-c_3)-(b_2-b_3)(c-c_2)\} \end{array}\right\}\Omega_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l} (a-a_1)\{(b_1-b_3)(c_3-c_4)-(b_3-b_4)(c_1-c_3)\} \\ +(a_1-a_3)\{(b_3-b_4)(c-c_1)-(b-b_1)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b-b_1)(c_1-c_3)-(b_1-b_3)(c-c_1)\} \end{array}\right\}\Omega_2$$

$$-\left\{\begin{array}{l} (a-a_1)\{(b_1-b_2)(c_2-c_4)-(b_2-b_4)(c_1-c_2)\} \\ +(a_1-a_2)\{(b_2-b_4)(c-c_1)-(b-b_1)(c_2-c_4)\} \\ +(a_2-a_4)\{(b-b_1)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)(c-c_1)\} \end{array}\right\}\Omega_3$$

$$+\left\{\begin{array}{l} (a-a_1)\{(b_1-b_2)(c_2-c_3)-(b_2-b_3)(c_1-c_2)\} \\ +(a_1-a_2)\{(b_2-b_3)(c-c_1)-(b-b_1)(c_2-c_3)\} \\ +(a_2-a_3)\{(b-b_1)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)(c-c_1)\} \end{array}\right\}\Omega_4$$

in die sich nun auch leicht noch die aus dem Obigen bekannten Werthe von

$$\Omega,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4$$

einführen lassen würden.

§. 5.

Indem wir der Aufgabe, welche den eigentlichen Gegenstand dieses Aufsatzes ausmachen soll, nun näher treten, wollen wir jetzt annehmen, dass aus vier in der Ebene der xy und in einer und derselben geraden Linie, welche als Axe der x angenommen werden soll, liegenden Punkten

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,$$

deren Coordinaten

$$a,\ 0;\ a_1,\ 0;\ a_2,\ 0;\ a_3,\ 0$$

sämmtlich als gegeben betrachtet werden, zwei in der Ebene der xy liegende Punkte S und S_1, deren unbekannte Coordinaten x, y und x_1, y_1 sein sollen, gesehen, und in den Punkten

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1,$$

welche durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

bezeichnet werden mögen, gemessen werden, und wollen nun untersuchen, ob sich aus diesen Datis die Lage der Punkte S und S_1 in der Ebene der xy, d. h. die Grösse der Coordinaten x, y und x_1, y_1 bestimmen lässt, wobei wir wie früher die doppelten Flächenräume der Dreiecke

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

respective durch

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$$

bezeichnen werden.

Nach 11) haben wir unter den gemachten Voraussetzungen zuvörderst die folgenden Gleichungen:

$$27)\ \begin{cases} xx_1+yy_1-a(x+x_1)=\Delta\cot\alpha-a^2, \\ xx_1+yy_1-a_1(x+x_1)=\Delta_1\cot\alpha_1-a_1{}^2, \\ xx_1+yy_1-a_2(x+x_1)=\Delta_2\cot\alpha_2-a_2{}^2, \\ xx_1+yy_1-a_3(x+x_1)=\Delta_3\cot\alpha_3-a_3{}^2; \end{cases}$$

und ein bekannter Satz der analytischen Geometrie [*]) liefert uns ferner die folgenden Gleishungen:

$$28)\quad \begin{cases} \Delta=(-1)^i\{xy_1-yx_1+a(y-y_1)\}, \\ \Delta_1=(-1)^{i_1}\{xy_1-yx_1+a_1(y-y_1)\} \\ \Delta_2=(-1)^{i_2}\{xy_1-yx_1+a_2(y-y_1)\}, \\ \Delta_3=(-1)^{i_3}\{xy_1-yx_1+a_3(y-y_1)\}. \end{cases}$$

in denen für

$$i,\ i_1,\ i_2,\ i_3$$

jede beliebige gerade oder ungerade ganze Zahl gesetzt werden kann, jenachdem man sich, um respective von dem Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

durch den Punkt S zu dem Punkte S_1' zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Setzen wir nun

$$29)\quad \begin{cases} x+x_1=2u,\ y+y_1=2v; \\ x-x_1=2u_1,\ y-y_1=2v_1; \end{cases}$$

also

$$30)\quad \begin{cases} x=u+u_1,\ y=v+v_1; \\ x_1=u-u_1,\ y_1=v-v_1 \end{cases}$$

und

$$31)\quad \begin{cases} xx_1+yy_1=u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2 \\ xy_1-yx_1=-2(uv_1-vu_1); \end{cases}$$

so werden die Gleichungen 27) und 28)

$$32)\quad \begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2-2au=\Delta\cot\alpha-a^2, \\ u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2-2a_1u=\Delta_1\cot\alpha_1-a_1{}^2, \\ u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2-2a_2u=\Delta_2\cot\alpha_2-a_2{}^2, \\ u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2-2a_3u=\Delta_3\cot\alpha_3-a_3{}^2; \end{cases}$$

und

$$33)\quad \begin{cases} \Delta=-(-1)^i.\,2(uv_1-vu_1-av_1), \\ \Delta_1=-(-1)^{i_1}.\,2(uv_1-vu_1-a_1v_1), \\ \Delta_2=-(-1)^{i_2}.\,2(uv_1-vu_1-a_2v_1), \\ \Delta_3=-(-1)^{i_3}.\,2(uv_1-vu_1-a_3v_1); \end{cases}$$

und nach gehöriger Substitution dieser Werthe von Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 in die Gleichungen 32) erhält man also die vier folgenden Gleichungen zwischen den Grössen u, v, u_1, v_1:

---

[*]) M. s. Archiv. Thl. III. S. 263.

$$34)\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^i.2\cot\alpha.(uv_1-vu_1) \\ -2au-(-1)^i.2a\cot\alpha.v_1 \end{array}\right\}=-a^2, \\ \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^{i_1}.2\cot\alpha_1.(uv_1-vu_1) \\ -2a_1u-(-1)^{i_1}.2a_1\cot\alpha_1.v_1 \end{array}\right\}=-a_1{}^2, \\ \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^{i_2}.2\cot\alpha_2.(uv_1-vu_1) \\ -2a_2u-(-1)^{i_2}.2a_2\cot\alpha_2.v_1 \end{array}\right\}=-a_2{}^2, \\ \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^{i_3}.2\cot\alpha_3.(uv_1-vu_1) \\ -2a_3u-(-1)^{i_3}.2a_3\cot\alpha_3.v_1 \end{array}\right\}=-a_3{}^2; \end{array}\right.$$

welche in Bezug auf die vier Grössen

$$u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2,\ uv_1-vu_1,\ u,\ v_1$$

vom ersten Grade sind.

Nach dem Obigen bezeichnen bekanntlich

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1.$$

Lässt man aber von jetzt an, so lange nicht etwas Anderes besonders bemerkt wird,

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

oder deren Ergänzungen zu 180° bezeichnen, jenachdem man sich, um respective von dem Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

durch den Punkt S zu dem Punkte S_1 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss, so kann man die vier obigen Gleichungen offenbar in völliger Allgemeinheit auf folgende Art schreiben:

$$35)\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha.(uv_1-vu_1) \\ -2au-2a\cot\alpha.v_1 \end{array}\right\}=-a^2, \\ \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha_1.(uv_1-vu_1) \\ -2a_1u-2a_1\cot\alpha_1.v_1 \end{array}\right\}=-a_1{}^2, \\ \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha_1.(uv_1-vu_1) \\ -2a_2u-2a_2\cot\alpha_2.v_1 \end{array}\right\}=-a_2{}^2, \\ \left.\begin{array}{l} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha_3.(uv_1-vu_1) \\ -2a_3u-2a_3\cot\alpha_3.v_1 \end{array}\right\}=-a_3{}^2. \end{array}\right.$$

Mittelst dieser vier Gleichungen kann man die Grössen

$$u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2,\ uv_1-vu_1,\ u,\ v_1$$

bestimmen, und ist also berechtigt:

$$36)\ \begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2=A, \\ uv_1-vu_1=B, \\ u=C, \\ v_1=D, \end{cases}$$

wo A, B, C, D bekannte Grössen bezeichnen, zu setzen. Aus diesen vier Gleichungen erhält man aber durch Elimination von u und v_1 leicht

$$37)\ \begin{cases} v^2-u_1{}^2=A-(C+D)(C-D), \\ vu_1=CD-B; \end{cases}$$

und hat daher, wie hieraus auf der Stelle folgt, zur Bestimmung von v und u_1 die beiden folgenden Gleichungen:

$$38)\ \begin{cases} v^4-\{A-(C+D)(C-D)\}v^2-(B-CD)^2=0, \\ u_1=-\dfrac{B-CD}{v}. \end{cases}$$

Da man jetzt die Grössen u, v, u_1, v_1 kennt, so kennt man auch die Coordinaten x, y und x_1, y_1 der beiden Punkte S und S_1, weil nach dem Obigen

$$39)\ \begin{cases} x=u+u_1,\ y=v+v_1; \\ x_1=u-u_1,\ y_1=v-v_1 \end{cases}$$

ist, und unsere Aufgabe ist daher jetzt als aufgelöst zu betrachten.

Löst man die erste der beiden Gleichungen 38) wie eine quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$40)\ v^2=\tfrac{1}{2}\{A-(C+D)(C-D)\} \\ \pm\sqrt{(B-CD)^2+\tfrac{1}{4}\{A-(C+D)(C-D)\}^2}$$

Weil aber unter der Voraussetzung, dass $B-CD$ nicht verschwindet, offenbar immer

$$\sqrt{(B-CD)^2+\tfrac{1}{4}\{A-(C+D)(C-D)\}^2}$$

grösser als der absolute Werth von

$$\tfrac{1}{2}\{A-(C+D)(C-D)\}$$

ist, so hat man bloss

$$41)\ v^2=\tfrac{1}{2}\{A-(C+D)(C-D)\} \\ +\sqrt{(B-CD)^2+\tfrac{1}{4}\{A-(C+D)(C-D)\}^2}$$

zu setzen, und v hat daher nur zwei reelle, dem Zeichen nach entgegengesetzte, absolut gleiche Werthe.

Verschwindet $B - CD$, so erhalten die Gleichungen 37) die Form

$$42) \begin{cases} v^2 - u_1^2 = A - (C + D)(C - D), \\ vu_1 = 0. \end{cases}$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ist nur dann erfüllt, wenn die eine der beiden Grössen v, u_1 verschwindet.

Ist nun $A - (C + D)(C - D) > 0$, so kann wegen der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen offenbar nicht $v = 0$ sein, und diese beiden Gleichungen werden daher nur durch

$$43) \begin{cases} v^2 = A - (C + D)(C - D), \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

erfüllt, so dass also in diesem Falle v zwei reelle, dem Zeichen nach entgegengesetzte, absolut gleiche Werthe hat.

Ist ferner $A - (C + D)(C - D) < 0$, so kann wegen der ersten der beiden Gleichungen offenbar nicht $u_1 = 0$ sein, und diese beiden Gleichungen werden daher nur durch

$$44) \begin{cases} v = 0, \\ u_1^2 = (C + D)(C - D) - A \end{cases}$$

erfüllt, so dass also in diesem Falle u_1 zwei reelle, dem Zeichen nach entgegengesetzte, absolut gleiche Werthe hat.

Ist endlich $A - (C + D)(C - D) = 0$, so werden die Gleichungen 42) nur durch

$$45) \begin{cases} v = 0, \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

erfüllt.

Setzt man der Kürze wegen

$$46) \begin{cases} A_1 = A - (C + D)(C - D), \\ B_1 = B - CD; \end{cases}$$

so ist nach 41)

$$47) \quad v^2 = \tfrac{1}{2}A_1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}A_1^2 + B_1^2},$$

und folglich

$$v^2 = \tfrac{1}{2}A_1 \pm \tfrac{1}{2}A_1 \sqrt{1 + \frac{4B_1^2}{A_1^2}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem A_1 eine positive oder eine negative Grösse ist. Berechnet man nun den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$48) \quad \tang \omega = \frac{2B_1}{A_1},$$

und nimmt denselben positiv und negativ, seinen absoluten Werth aber nie grösser als 90°, was offenbar verstattet ist, so ist nach dem Obigen

$$v^2 = \pm \tfrac{1}{2} A_1 \cdot \frac{1 \pm \cos\omega}{\cos\omega},$$

also, weil

$$1 + \cos\omega = 2\cos\tfrac{1}{2}\omega^2,\quad 1 - \cos\omega = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2$$

ist,

$$49)\quad v^2 = \begin{cases} \dfrac{A_1 \cos\frac{1}{2}\omega^2}{\cos\omega} \\ -\dfrac{A_1 \sin\frac{1}{2}\omega^2}{\cos\omega} \end{cases}$$

Weil nun aber nach 48)

$$A_1 = 2B_1 \cot\omega$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$50)\quad v^2 = \begin{cases} B_1 \cot\frac{1}{2}\omega \\ -B_1 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega \end{cases}$$

wo immer für v^2 der erste oder zweite Werth genommen werden muss, jenachdem A_1 eine positive oder eine negative Grösse ist. Mittelst der Formeln 48) und 50) kann v^2, und also auch v, sehr leicht berechnet werden.

Bezeichnet man die Entfernungen des Punktes S von den Punkten

$$M, M_1, M_2, M_3$$

respective durch

$$r, r_1, r_2, r_3;$$

die Entfernungen des Punktes S_1 von den Punkten

$$M, M_1, M_2, M_3$$

respective durch

$$r', r'_1, r'_2, r'_3;$$

die von den Linien

$$MS, M_1S, M_2S, M_3S$$

mit der Richtung der positiven x eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von der Richtung der positiven x an nach der Seite der positiven y hin von 0 bis 360° zählt, respective durch

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3;$$

und eben so die von den Linien

$$MS_1, M_1S_1, M_2S_1, M_3S_1$$

der Richtung der positiven x eingeschlossenen, auf dieselbe wie vorher genommenen Winkel durch

$$\Theta', \Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3;$$

st in völliger Allgemeinheit

$$51)\quad \begin{cases} x-a=r\cos\Theta,\ y=r\sin\Theta; \\ x-a_1=r_1\cos\Theta_1,\ y=r_1\sin\Theta_1; \\ x-a_2=r_2\cos\Theta_2,\ y=r_2\sin\Theta_2; \\ x-a_3=r_3\cos\Theta_3,\ y=r_3\sin\Theta_3; \end{cases}$$

$$52)\quad \begin{cases} x_1-a=r'\cos\Theta',\ y_1=r'\sin\Theta'; \\ x_1-a_1=r'_1\cos\Theta'_1,\ y_1=r'_1\sin\Theta'_1; \\ x_1-a_2=r'_2\cos\Theta'_2,\ y_1=r'_2\sin\Theta'_2; \\ x_1-a_3=r'_3\cos\Theta'_3,\ y_1=r'_3\sin\Theta'_3; \end{cases}$$

$$53)\quad \begin{cases} \tang\Theta=\frac{y}{x-a},\ \tang\Theta'=\frac{y_1}{x_1-a}; \\ \tang\Theta_1=\frac{y}{x-a_1},\ \tang\Theta'_1=\frac{y_1}{x_1-a_1}; \\ \tang\Theta_2=\frac{y}{x-a_2};\ \tang\Theta'_2=\frac{y_1}{x_1-a_2}; \\ \tang\Theta_3=\frac{y}{x-a_3},\ \tang\Theta'_3=\frac{y_1}{x_1-a_3}; \end{cases}$$

elst dieser Formeln lassen sich die Winkel

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$$

$$\Theta', \Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3.$$

alle Zweideutigkeit berechnen, wenn man nur die Vorzeichen rig beachtet, welche in Folge der Gleichungen 51) und 52) die s und Cosinus dieser Winkel haben müssen. Dann findet man ferner auch die Entfernungen

$$r, r_1, r_2, r_3$$

$$r', r'_1, r'_2, r'_3$$

it mittelst der Formeln

$$54)\quad \begin{cases} r = \dfrac{x-a}{\cos\Theta} = \dfrac{y}{\sin\Theta}, \\ r_1 = \dfrac{x-a_1}{\cos\Theta_1} = \dfrac{y}{\sin\Theta_1}, \\ r_2 = \dfrac{x-a_2}{\cos\Theta_2} = \dfrac{y}{\sin\Theta_2}, \\ r_3 = \dfrac{x-a_3}{\cos\Theta_3} = \dfrac{y}{\sin\Theta_3} \end{cases}$$

und

$$55)\quad \begin{cases} r' = \dfrac{x_1-a}{\cos\Theta'} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'}, \\ r'_1 = \dfrac{x_1-a_1}{\cos\Theta'_1} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'_1}, \\ r'_2 = \dfrac{x_1-a_2}{\cos\Theta'_2} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'_2}, \\ r'_3 = \dfrac{x_1-a_3}{\cos\Theta'_3} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'_3}, \end{cases}$$

Die doppelten Flächenräume

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$$

findet man mittelst der Formeln 33) oder auch mittelst der Formeln

$$56)\quad \begin{cases} \Delta = \pm rr' \sin(\Theta - \Theta'), \\ \Delta_1 = \pm r_1 r'_1 \sin(\Theta_1 - \Theta'_1); \\ \Delta_2 = \pm r_2 r'_2 \sin(\Theta_2 - \Theta'_2), \\ \Delta_3 = \pm r_3 r'_3 \sin(\Theta_3 - \Theta'_3); \end{cases}$$

in denen man jederzeit die Vorzeichen so zu nehmen hat, dass die Grössen Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 positiv werden.

Bezeichnet man die Entfernung der beiden Punkte S und S_1 von einander durch E, so ist

$$57)\quad E = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}.$$

Berechnet man aber den Hülfswinkel ξ mittelst der Formel

$$58)\quad \tang \xi = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

und nimmt, was offenbar verstattet ist, den Winkel ξ so, dass

$$\begin{aligned} 0 &< \xi < 90^\circ, \\ 90^\circ &< \xi < 180^\circ, \\ 180^\circ &< \xi < 270^\circ, \\ 270^\circ &< \xi < 360^\circ \end{aligned}$$

ist, jenachdem

$x - x_1$ positiv und $y - y_1$ positiv,
$x - x_1$ negativ und $y - y_1$ positiv,
$x - x_1$ negativ und $y - y_1$ negativ,
$x - x_1$ positiv und $y - y_1$ negativ

ist, so kann in völliger Allgemeinheit

$$59) \quad E = \frac{x - x_1}{\cos \xi}$$

gesetzt werden. Auch kann man auf vier verschiedene Arten E als die dritte Seite eines Dreiecks berechnen, in welchem die beiden andern Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel gegeben sind.

§. 6.

Wir wollen nun wieder zu den vier Gleichungen 35) des ersten Grades, auf deren Auflösung bekanntlich die ganze vorhergehende Auflösung unserer Aufgabe beruhet, zurückkehren.

Zieht man zuvörderst die zweite dieser vier Gleichungen von der ersten, die dritte von der zweiten, die vierte von der dritten ab, so erhält man die drei folgenden bloss noch die unbekannten Grössen $uv_1 - vu_1$, u, v_1 enthaltenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(\cot\alpha - \cot\alpha_1)(uv_1 - vu_1)\\ -(a - a_1)u\\ -(a\cot\alpha - a_1\cot\alpha_1)v_1\end{aligned}\right\} = -\tfrac{1}{2}(a^2 - a_1^2),$$

$$\left.\begin{aligned}(\cot\alpha_1 - \cot\alpha_2)(uv_1 - vu_1)\\ -(a_1 - a_2)u\\ -(a_1\cot\alpha_1 - a_2\cot\alpha_2)v_1\end{aligned}\right\} = -\tfrac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2),$$

$$\left.\begin{aligned}(\cot\alpha_2 - \cot\alpha_3)(uv_1 - vu_1)\\ -(a_2 - a_3)u\\ -(a_2\cot\alpha_2 - a_3\cot\alpha_3)v_1\end{aligned}\right\} = -\tfrac{1}{2}(a_2^2 - a_3^2).$$

Sind nun überhaupt

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}\mathfrak{Z} &= \mathfrak{K},\\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{X} + \mathfrak{B}_1\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}_1\mathfrak{Z} &= \mathfrak{K}_1,\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{X} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}_2\mathfrak{Z} &= \mathfrak{K}_2\end{aligned}$$

drei Gleichungen des ersten Grades zwischen den drei unbekannten Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; so ist bekanntlich

$$\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}_2) + \mathfrak{K}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_1\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}_2) + \mathfrak{A}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_1\mathfrak{C})},$$

$$\mathfrak{Y}=\frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2-\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1)+\mathfrak{K}_1(\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}-\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2)+\mathfrak{K}_2(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1-\mathfrak{C}_1\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2-\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1)+\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2)+\mathfrak{A}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1-\mathfrak{B}_1\mathfrak{C})},$$

$$\mathfrak{Z}=\frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2-\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1)+\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2)+\mathfrak{K}_2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1-\mathfrak{A}_1\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2-\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1)+\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2)+\mathfrak{A}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1-\mathfrak{B}_1\mathfrak{C})}.$$

Mittelst dieser Formeln erhält man, wenn

$$60)\quad \begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2=A=\dfrac{Z}{N}, \\ uv_1-vu_1=B=\dfrac{Z_1}{N}, \\ u=C=\dfrac{Z_2}{N}, \\ v_1=D=\dfrac{Z_3}{N} \end{cases}$$

gesetzt wird, aus den obigen Gleichungen ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 61)\quad N= & \,a\cot\alpha\,\{(a_2-a_3)\cot\alpha_1+(a_3-a_1)\cot\alpha_2+(a_1-a_2)\cot\alpha_3\} \\ & -a_1\cot\alpha_1\,\{(a_2-a_3)\cot\alpha+(a_3-a)\cot\alpha_2+(a-a_2)\cot\alpha_3\} \\ & +a_2\cot\alpha_2\,\{(a_1-a_3)\cot\alpha+(a_3-a)\cot\alpha_1+(a-a_1)\cot\alpha_3\} \\ & -a_3\cot\alpha_3\,\{(a_1-a_2)\cot\alpha+(a_2-a)\cot\alpha_1+(a-a_1)\cot\alpha_2\} \end{aligned}$$

oder, wie hieraus ferner leicht folgt:

$$\begin{aligned} 62)\quad N= & \,(a-a_1)(a_2-a_3)\cot\alpha\cot\alpha_1 \\ & +(a-a_2)(a_3-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_2 \\ & +(a-a_3)(a_1-a_2)\cot\alpha\cot\alpha_3 \\ & +(a_1-a_2)(a-a_3)\cot\alpha_1\cot\alpha_2 \\ & +(a_1-a_3)(a_2-a)\cot\alpha_1\cot\alpha_3 \\ & +(a_2-a_3)(a-a_1)\cot\alpha_2\cot\alpha_3. \end{aligned}$$

Ferner ergiebt sich leicht

$$\begin{aligned} 63)\quad Z_1= & -\tfrac{1}{2}a\cot\alpha\,\{(a_2-a_3)a_1{}^2+(a_3-a_1)a_2{}^2+(a_1-a_2)a_3{}^2\} \\ & +\tfrac{1}{2}a_1\cot\alpha_1\,\{(a_2-a_3)a^2+(a_3-a)a_2{}^2+(a-a_2)a_3{}^2\} \\ & -\tfrac{1}{2}a_2\cot\alpha_2\,\{(a_1-a_3)a^2+(a_3-a)a_1{}^2+(a-a_1)a_3{}^2\} \\ & +\tfrac{1}{2}a_3\cot\alpha_3\,\{(a_1-a_2)a^2+(a_2-a)a_1{}^2+(a-a_1)a_2{}^2\}. \end{aligned}$$

Weil nun aber nach 20)

$$\begin{aligned} & (a_2-a_3)\,a_1{}^2+(a_3-a_1)\,a_2{}^2+(a_1-a_2)\,a_3{}^2 \\ & \qquad =-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1), \\ & (a_2-a_3)\,a^2+(a_3-a)\,a_2{}^2+(a-a_2)\,a_3{}^2 \\ & \qquad =-(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a), \\ & (a_1-a_3)\,a^2+(a_3-a)\,a_1{}^2+(a-a_1)\,a_3{}^2 \\ & \qquad =-(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a), \end{aligned}$$

$$(a_1-a_2)a^2+(a_2-a)a_1^2+(a-a_1)a_2^2$$
$$=-(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)$$

so ist

$$64)\quad Z_1=\tfrac{1}{2}a(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot\alpha$$
$$-\tfrac{1}{2}a_1(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_1$$
$$+\tfrac{1}{2}a_2(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_2$$
$$-\tfrac{1}{2}a_3(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot\alpha_3.$$

eiter ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen

$$65)\quad Z_2=\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_2-a_3)(a_2+a_3)\cot\alpha\cot\alpha_1$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-a_2)(a_3-a_1)(a_3+a_1)\cot\alpha\cot\alpha_2$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-a_3)(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot\alpha\cot\alpha_3$$
$$+\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)(a-a_3)(a+a_3)\cot\alpha_1\cot\alpha_2$$
$$+\tfrac{1}{2}(a_1-a_3)(a_2-a)(a_2+a)\cot\alpha_1\cot\alpha_3$$
$$+\tfrac{1}{2}(a_2-a_3)(a-a_1)(a+a_1)\cot\alpha_2\cot\alpha_3.$$

ben so leicht erhält man

$$)\quad Z_3=-\tfrac{1}{2}\cot\alpha\,\{(a_2-a_3)a_1^2+(a_3-a_1)a_2^2+(a_1-a_2)a_3^2\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cot\alpha_1\,\{(a_2-a_3)a^2+(a_3-a)a_2^2+(a-a_2)a_3^2\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cot\alpha_2\,\{(a_1-a_3)a^2+(a_3-a)a_1^2+(a-a_1)a_3^2\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cot\alpha_3\,\{(a_1-a_2)a^2+(a_2-a)a_1^2+(a-a_1)a_2^2\},$$

nd folglich auf ganz ähnliche Art wie oben

$$67)\quad Z_3=\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot\alpha$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_1$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_2$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot\alpha_3.$$

Führt man nun endlich die gefundenen Werthe von uv_1-vu_1, u, v_1 in eine, etwa in die erste der Gleichungen 35) ein, so erhält man nach einigen keine Schwierigkeit darbietenden Reductionen:

$$68)\quad Z=a_2a_3(a-a_1)(a_2-a_3)\cot\alpha\cot\alpha_1$$
$$+a_1a_3(a-a_2)(a_3-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_2$$
$$+a_1a_2(a-a_3)(a_1-a_2)\cot\alpha\cot\alpha_3$$
$$+aa_3(a_1-a_2)(a-a_3)\cot\alpha_1\cot\alpha_2$$
$$+aa_2(a_1-a_3)(a_2-a)\cot\alpha_1\cot\alpha_3$$
$$+aa_1(a_2-a_3)(a-a_1)\cot\alpha_2\cot\alpha_3.$$

Uebrigens kann man, wie leicht erhellen wird, auch

$$69)\quad N = 2(a-a_1)(a_2-a_3)\cot\alpha\cot\alpha_1 \\ +2(a-a_2)(a_3-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_2 \\ +2(a-a_3)(a_1-a_2)\cot\alpha\cot\alpha_3 \\ +2(a_1-a_2)(a-a_3)\cot\alpha_1\cot\alpha_2 \\ +2(a_1-a_3)(a_2-a)\cot\alpha_1\cot\alpha_3 \\ +2(a_2-a_3)(a-a_1)\cot\alpha_2\cot\alpha_3,$$

$$70)\quad Z = 2a_2a_3(a-a_1)(a_2-a_3)\cot\alpha\cot\alpha_1 \\ +2a_1a_3(a-a_2)(a_3-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_2 \\ +2a_1a_2(a-a_3)(a_1-a_2)\cot\alpha\cot\alpha_3 \\ +2aa_3(a_1-a_2)(a-a_3)\cot\alpha_1\cot\alpha_2 \\ +2aa_2(a_1-a_3)(a_2-a)\cot\alpha_1\cot\alpha_3 \\ +2aa_1(a_2-a_3)(a-a_1)\cot\alpha_2\cot\alpha_3,$$

$$71)\quad Z_1 = a(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot\alpha \\ -a_1(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_1 \\ +a_2(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_2 \\ -a_3(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot\alpha_3$$

$$72)\quad Z_2 = (a-a_1)(a_2-a_3)(a_2+a_3)\cot\alpha\cot\alpha_1 \\ +(a-a_2)(a_3-a_1)(a_3+a_1)\cot\alpha\cot\alpha_2 \\ +(a-a_3)(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot\alpha\cot\alpha_3 \\ +(a_1-a_2)(a-a_3)(a+a_3)\cot\alpha_1\cot\alpha_2 \\ +(a_1-a_3)(a_2-a)(a_2+a)\cot\alpha_1\cot\alpha_3 \\ +(a_2-a_3)(a-a_1)(a+a_1)\cot\alpha_2\cot\alpha_3,$$

$$73)\quad Z_3 = (a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot\alpha \\ -(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_1 \\ +(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot\alpha_2 \\ -(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot\alpha_3$$

setzen, welche Formeln die leichteste Berechnung der Grössen

$$\frac{Z}{N},\ \frac{Z_1}{N_1},\ \frac{Z_2}{N_2},\ \frac{Z_3}{N_3}$$

oder

$$A,\ B,\ C,\ D$$

gestatten dürften.

§. 7.

Wenn wir jetzt wieder α, α_1, α_2, α_3 die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

ezeichnen lassen, so haben wir nach 21) die vier folgenden Glei-
hungen:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a_1-a_2)\,\Delta\cot\alpha+(a_2-a)\,\Delta_1\cot\alpha_1+(a-a_1)\,\Delta_2\cot\alpha_2\\
&\qquad=-(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a),\\
&(a_1-a_3)\,\Delta\cot\alpha+(a_3-a)\,\Delta_1\cot\alpha_1+(a-a_1)\,\Delta_3\cot\alpha_3\\
&\qquad=-(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a),\\
&(a_2-a_3)\,\Delta\cot\alpha+(a_3-a)\,\Delta_2\cot\alpha_2+(a-a_2)\,\Delta_3\cot\alpha_3\\
&\qquad=-(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a),\\
&(a_2-a_3)\,\Delta_1\cot\alpha_1+(a_3-a_1)\,\Delta_2\cot\alpha_2+(a_1-a_2)\,\Delta_3\cot\alpha_3\\
&\qquad=-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1);
\end{aligned}\right.$$

nd können uns in jedem Falle einer jeden dieser vier Gleichungen
ls einer Prüfungsgleichung für die Richtigkeit der ganzen geführ-
en Rechnung bedienen, was immer von besonderer Wichtigkeit ist.

§. 8.

Wir wollen nun nach den im Vorhergehenden entwickelten
'ormeln, um deren Anwendung zu zeigen, ein Beispiel berechnen,
nd wollen dabei annehmen, dass man sich, um von dem Punkte
M, M_1, M_2, M_3 durch den Punkt S zu dem Punkte S_1 zu ge-
ngen, immer nach derselben Richtung bewegen müsse, nach wel-
her man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der
xe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem posi-
iven Theile der Axe der y zu gelangen.

Sind nun die Abscissen der Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

nd die an denselben gemessenen, 180° nicht übersteigenden
Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

espective

$$+2,3;\ +5,6;\ +9,9,\ +15,7$$

und

$$99^\circ.25',\ 78^\circ.10',\ 60^\circ.54',\ 45^\circ.56';$$

so hat man unter der gemachten Voraussetzung im Folgenden immer

$$\begin{aligned}
a&=2,3 &&\text{und} & \alpha&=99^\circ.25'\\
a_1&=5,6 && & \alpha_1&=78\,.\,10\\
a_2&=9,9 && & \alpha_2&=60\,.\,54\\
a_3&=15,7 && & \alpha_3&=45\,.\,56
\end{aligned}$$

zu setzen.

Zuerst berechnet man die folgenden Grössen:

$$a_1 - a = 3{,}3; \qquad a + a_1 = 7{,}9$$
$$a_2 - a = 7{,}4; \qquad a + a_2 = 12{,}2$$
$$a_3 - a = 13{,}4; \qquad a + a_3 = 18{,}0$$
$$a_2 - a_1 = 4{,}3; \qquad a_1 + a_2 = 15{,}5$$
$$a_3 - a_1 = 10{,}1; \qquad a_1 + a_3 = 21{,}3$$
$$a_3 - a_2 = 5{,}8; \qquad a_2 + a_3 = 25{,}6$$

$$\log a = 0{,}3617278$$
$$\log a_1 = 0{,}7481880$$
$$\log a_2 = 0{,}9956352$$
$$\log a_3 = 1{,}1958997$$

$$\log (a_1 - a) = 0{,}5185139$$
$$\log (a_2 - a) = 0{,}8808136$$
$$\log (a_3 - a) = 1{,}1271048$$
$$\log (a_2 - a_1) = 0{,}6334685$$
$$\log (a_3 - a_1) = 1{,}0043214$$
$$\log (a_3 - a_2) = 0{,}7634280$$

$$\log (a + a_1) = 0{,}8977271$$
$$\log (a + a_2) = 1{,}0863598$$
$$\log (a + a_3) = 1{,}2552725$$
$$\log (a_1 + a_2) = 1{,}1903317$$
$$\log (a_1 + a_3) = 1{,}3283796$$
$$\log (a_2 + a_3) = 1{,}4082400$$

$$\log (-\cot \alpha) = 0{,}2197097 - 1$$
$$\log \cot \alpha_1 = 0{,}3212216 - 1$$
$$\log \cot \alpha_2 = 0{,}7455376 - 1$$
$$\log \cot \alpha_3 = 0{,}9858484 - 1$$

Man erhält nun leicht

$$(a - a_1)(a_2 - a_3) \cot \alpha \cot \alpha_1 = - \;\; 0{,}665$$
$$(a - a_2)(a_3 - a_1) \cot \alpha \cot \alpha_2 = + \;\; 7{,}086$$
$$(a - a_3)(a_1 - a_2) \cot \alpha \cot \alpha_3 = - \;\; 9{,}250$$
$$(a_1 - a_2)(a - a_3) \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 = + \;\; 6{,}719$$
$$(a_1 - a_3)(a_2 - a) \cot \alpha_1 \cot \alpha_3 = - 15{,}567$$
$$(a_2 - a_3)(a - a_1) \cot \alpha_2 \cot \alpha_3 = + 10{,}312$$
$$N = - 1{,}365 \;^{*)}$$

*) Die Rechnung ist nach den Formeln 62), 68), 64), 65), 67) bis auf drei Decimalen geführt worden.

$$a_2 a_3 (a - a_1)(a_2 - a_3) \cot \alpha \cot \alpha_1 = -103,373$$
$$a_1 a_3 (a - a_2)(a_3 - a_1) \cot \alpha \cot \alpha_2 = +622,974$$
$$a_1 a_2 (a - a_3)(a_1 - a_2) \cot \alpha \cot \alpha_3 = -512,808$$
$$a a_3 (a_1 - a_2)(a - a_3) \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 = +242,639$$
$$a a_2 (a_1 - a_3)(a_2 - a) \cot \alpha_1 \cot \alpha_3 = -354,461$$
$$a a_1 (a_2 - a_3)(a - a_1) \cot \alpha_2 \cot \alpha_3 = +132,814$$
$$Z = +\ 27,785$$

$$\tfrac{1}{2} a (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) \cot \alpha = -\ 48,042$$
$$-\tfrac{1}{2} a_1 (a - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a) \cot \alpha_1 = -\ 346,518$$
$$\tfrac{1}{2} a_2 (a - a_1)(a_1 - a_3)(a_3 - a) \cot \alpha_2 = +1230,504$$
$$-\tfrac{1}{2} a_3 (a - a_1)(a_1 - a_2)(a_2 - a) \cot \alpha_3 = -\ 819,434$$
$$Z_1 = +\ 16,510$$

$$\tfrac{1}{2}(a - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 + a_3) \cot \alpha \cot \alpha_1 = -\ 8,513$$
$$\tfrac{1}{2}(a - a_2)(a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \cot \alpha \cot \alpha_2 = +\ 75,463$$
$$\tfrac{1}{2}(a - a_3)(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) \cot \alpha \cot \alpha_3 = -\ 71,686$$
$$\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)(a - a_3)(a + a_3) \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 = +\ 60,475$$
$$\tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)(a_2 - a)(a_2 + a) \cot \alpha_1 \cot \alpha_3 = -\ 94,959$$
$$\tfrac{1}{2}(a_2 - a_3)(a - a_1)(a + a_1) \cot \alpha_2 \cot \alpha_3 = +\ 40,731$$
$$Z_2 = +\ 1,511$$

$$\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) \cot \alpha = -\ 20,888$$
$$-\tfrac{1}{2}(a - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a) \cot \alpha_1 = -\ 61,878$$
$$\tfrac{1}{2}(a - a_1)(a_1 - a_3)(a_3 - a) \cot \alpha_2 = +124,293$$
$$-\tfrac{1}{2}(a - a_1)(a_1 - a_2)(a_2 - a) \cot \alpha_3 = -\ 52,193$$
$$Z_3 = -\ 10,666$$

$$u^2 + v^2 - u_1^2 - v_1^2 = A = \frac{Z}{N} = -\frac{27,785}{1,365}$$
$$u v_1 - v u_1 = B = \frac{Z_1}{N} = -\frac{16,510}{1,365}$$
$$u = C = \frac{Z_2}{N} = -\frac{1,511}{1,365}$$
$$v_1 = D = \frac{Z_3}{N} = +\frac{10,666}{1,365}$$
$$C + D = +\frac{9,155}{1,365}$$
$$C - D = -\frac{12,177}{1,365}$$
$$A = -\ 20,355$$
$$B = -\ 12,095$$
$$C = -\ 1,107$$
$$D = +\ 7,814$$

$$(C+D)(C-D)=-\ 59{,}832$$
$$CD=-\ \ 8{,}650$$
$$A_1=A-(C+D)(C-D)=+\ 39{,}477$$
$$B_1=B-CD=-\ \ 3\ 445$$

Zur Bestimmung von v^2 haben wir in diesem Falle, wo A_1 posit ist, nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$\text{tang}\ \omega=\frac{2B_1}{A_1},\ v^2=B_1\ \cot\tfrac{1}{2}\omega.$$

$$\log 2=0{,}3010300$$
$$\log(-B_1)=\underline{0{,}5371892}$$
$$0{,}8382192$$
$$\log A_1=\underline{1{,}5963441}$$
$$\log(-\text{tang}\ \omega)=0{,}2418751-1$$
$$\omega=-9^0\ .\ 54'\ .\ 0'',813$$
$$\tfrac{1}{2}\omega=-4\ .\ 57\ .\ 0{,}407$$
$$\log(-\cot\tfrac{1}{2}\omega)=\begin{cases}1{,}0624350\\ \quad -100\\ \hline 1{,}0624250\end{cases}$$
$$\log(-B_1)=\underline{0{,}5371892}$$
$$\log.\ v^2=1{,}5996142\ ^*)$$
$$\tfrac{1}{2}\log.\ v^2=0{,}7998071$$
$$v=\pm\ 6{,}307$$
$$u_1=-\frac{B-CD}{v}=\pm 0{,}546.$$

Wir haben also

$$u=-\ 1{,}107 \qquad v=\pm\ 6{,}307$$
$$u_1=\pm 0{,}546 \qquad v_1=+\ 7{,}814$$

und weil nun bekanntlich

$$x=u+u_1,\ y=v+v_1;$$
$$x_1=u-u_1,\ y_1=v-v_1$$

---

*) Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, könnte man ausse $B_1\cot\frac{1}{2}\omega$ auch noch $-B_1\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\omega$ berechnen, wo dann immer

$$B_1\ \cot\tfrac{1}{2}\omega+(-B_1\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$=B_1\ (\cot\tfrac{1}{2}\omega-\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$=B_1\frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2-\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin\frac{1}{2}\omega\ \cos\frac{1}{2}\omega}$$
$$=2B_1\frac{\cos\omega}{\sin\omega}=2B_1\cot\omega=A_1$$

sein muss.

ist; so erhalten wir die beiden folgenden Auflösungen unserer Aufgabe:

Erste Auflösung.

$$x = -0,561 \qquad y = +14,121$$
$$x_1 = -1,653 \qquad y_1 = -1,507$$

Zweite Auflösung.

$$x = -1,653 \qquad y = +1,507$$
$$x_1 = -0,561 \qquad y_1 = -14,121$$

Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, berechne man zuerst mittelst der Gleichungen 33) die Grössen Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$uv_1 - vu_1 = - \ 12,095$$
$$av_1 = + \ 17,972$$
$$a_1v_1 = + \ 43,758$$
$$a_2v_1 = + \ 77,359$$
$$a_3v_1 = + 122,680$$
$$\Delta = 60,134$$
$$\Delta_1 = 111,706$$
$$\Delta_2 = 178,908$$
$$\Delta_3 = 269,550$$
$$\log \Delta = 1,7791201$$
$$\log \Delta_1 = 2,0480765$$
$$\log \Delta_2 = 2,2526297$$
$$\log \Delta_3 = 2,4306393$$

$$(a_1 - a_2)\,\Delta \cot a = + \ 42,884$$
$$(a_2 - a)\,\Delta_1 \cot a_1 = + 177,874$$
$$(a - a_1)\,\Delta_2 \cot a_2 = - 328,610$$
$$(a_1-a_2)\Delta\cot a + (a_2-a)\Delta_1\cot a_1 + (a-a_1)\Delta_2\cot a_2 = - 107,852$$
$$-(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a) = - 107,844$$
$$\text{Differenz} = \mp \ 0,008$$

woraus man sieht, wie genau die erste der vier Prüfungsgleichungen 74) erfüllt ist. Auf ähnliche Art könnte man auch jede andere dieser vier Prüfungsgleichungen entwickeln.

Die Berechnung der Grössen

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3; \Theta', \Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3$$

und

$$r, r_1, r_2, r_3; r', r'_1, r'_2, r'_3$$

so wie der Entfernung E der beiden Punkte S und S_1 von einander nach den im Obigen entwickelten Formeln können wir um so eher füglich dem eigenen Fleisse des Lesers überlassen, weil das vorher berechnete Beispiel nur die beste Form der Rechnung zu zeigen den Zweck hat.

Weitere Entwickelungen über die hier behandelte und ähnliche allgemeinere Aufgaben behalten wir spätern Aufsätzen vor.

XLIII.
Geodätische Aufgabe.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

Es sind die relative Lage und die Meereshöhen der beiden Punkte A und B (Taf. VII. Fig. 9.) gegeben; ferner kennt man den horizontalen Winkel bei N, welchen die Projectionen cN und mN der Linien AN und BN auf der Horizontalebene cNm mit einander bilden; endlich sind auch die Zenithdistanzen von A und B in N, mithin auch ihre Ergänzungen zu 90° gegeben. Man soll die relative Lage des Punktes N in Bezug auf A und B, nebst den Höhendistanzen finden *).

Denken wir uns eine durch N gelegte Horizontalebene cNm; ferner seien Aac und Bm senkrecht auf diese Ebene gezogen; endlich sei $aP \parallel cN$, $BP \parallel mN$, so wird auch PN senkrecht auf cNm und $\angle BPA = \angle mNc$ sein. Ziehen wir noch aus dem Durchschnitt D der Linien aP und AN die Linie $DQ \parallel PN$ und verbinden D mit B und Q mit m, und setzen der Kürze wegen:

$$Ba = a,\ Aa = h,\ \angle aPB = \angle cNm = \gamma;$$
$$\angle BNm = \beta,\ \angle ANc = \alpha;\ ac = y,\ \angle ANB = \varphi;$$

so reducirt sich die Aufgabe dahin: Aus den gegebenen Stücken $a, h, \alpha, \beta, \gamma$ die Grössen y und φ zu bestimmen, woraus sich alsdann alles Uebrige ergibt. Diesen Annahmen zufolge ist

$$DN = y \text{ cosec } \alpha,\ DP = y \text{ cotg } \alpha,\ AN = (h+y) \text{ cosec } \alpha,$$
$$cN = (h+y) \text{ cotg } \alpha,\ BP = y \text{ cotg } \beta,\ BN = y \text{ cosec } \beta.$$

---

*) Der Herr Verfasser des vorliegenden Aufsatzes schreibt mir bei der Uebersendung desselben, dass ihm die obige Aufgabe von dem ehemaligen preussischen Ingenieur: Herrn Hauptmann Michaelis bei Gelegenheit der Aufnahme der St. Gotthardsstrasse zur Auflösung vorgelegt worden sei. Uebrigens wünscht der Herr Verfasser, dass die Aufgabe, eben so wie der in No. XXXIV. mitgetheilte Satz, nur als eine Uebungsaufgabe für Schüler angesehen werde. G.

Ferner ist im Dreiecke DPB

$$BD^2 = DP^2 + BP^2 - 2DP\,.\,BP\cos\gamma$$

und im Dreiecke BDN

$$BD^2 = DN^2 + BN^2 - 2DN\,.\,BN\cos\varphi$$

oder, wenn wir die obigen Bezeichnungen gebrauchen, so ist

$$BD^2 = y^2\{\text{cotg}\,\alpha^2 + \text{cotg}\,\beta^2 - 2\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta\cos\gamma\} \,\ldots\ (1)$$
$$BD^2 = \{\text{cosec}\,\alpha^2 + \text{cosec}\,\beta^2 - 2\text{cosec}\,\alpha\,\text{cosec}\,\beta\cos\varphi\} \,\ldots\ (2)$$

Aus (1) und (2) finden wir nach einigen Reductionen:

$$\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta} = \text{tg}\,\delta$, so ist

$$\cos\varphi = \frac{\sin(\alpha+\delta)\sin\beta}{\cos\delta} \,\ldots\ (3)$$

Ferner ist im Dreiecke ABN

$$AB^2 = AN^2 + BN^2 - 2AN\,.\,BN\cos\varphi,$$

oder, wenn wir die oben angegebenen Werthe einführen:

$$a^2 + h^2 = (h+y)^2\,\text{cosec}\,\alpha^2 + y^2\,\text{cosec}\,\beta^2 - 2(h+y)y\,\text{cosec}\,\alpha\,\text{cosec}\,\beta\cos\varphi$$

oder

$$y^2\{\sin\beta^2 + \sin\alpha^2 - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi\} + 2hy\sin\beta.\{\sin\beta - \sin\alpha\cos\varphi\} = (a^2\sin\alpha^2 - h^2\cos\alpha^2)\sin\beta^2.$$

Aus dieser Gleichung finden wi:, mit Anwendung folgender goniometrischen Relationen:

$$\cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 - 1,$$
$$\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi = 4\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - \sin\alpha\sin\beta\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2\}$$
$$\sin\beta - \sin\alpha\cos\varphi = 2\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2\}$$

für y folgenden Werth:

$$y = -\frac{h\{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\alpha\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{2\{\sin\frac{1}{2}((\alpha+\beta)^2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - \sin\alpha\sin\beta\cos\frac{1}{2}\varphi^2\}}$$

$$\pm \frac{\sqrt{\begin{array}{c} a^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2 \{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - \sin\alpha \sin\beta \cos\tfrac{2}{2}\varphi^2\} \\ + h^2 \sin\beta^2 \{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\alpha \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2\} \end{array}}}{2\{\sin(\alpha+\beta)^2 \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - \sin\alpha \sin\beta \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2\}}$$

Da $\cos\varphi$ nach No. 3. bestimmt ist, so ist auch der Werth von y bestimmt; mithin können auch alle Stücke des Dreiecks ANB mittelst der obigen Annahmen gefunden werden.

XLIV.

Ueber die Auflösung der cubischen Gleichungen.

Von dem

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

Die bisher bekannten Auflösungsweisen der cubischen Gleichungen setzen sämmtlich eine ganz bestimmte Form der Gleichung voraus, indem entweder ein Glied fehlen, oder wenigstens eine bestimmte Relation zwischen den verschiedenen Coefficienten der einzelnen Glieder stattfinden muss, wenn die Endformeln sollen angewandt werden können. Es hat dies aber den Nachtheil, dass eine solche Auflösung dem Anfänger in der Algebra immer als eine Art Kunststück erscheint, das durch Zufall aufgefunden worden ist, und deshalb auch vorzugsweise das Gedächtniss in Anspruch nimmt. Ganz besonders gilt dies von der sogenannten Cardanischen Regel, die noch überdies an einer solchen Beschränktheit leidet, dass auch nicht einer der Fälle, in denen eine cubische Gleichung eine unmittelbare Angabe ihrer Wurzeln gestattet, in ihr enthalten ist. Dies hat mich veranlasst, eine Auflösung zu suchen, die gar keine besondere Form der Gleichung verlangt, dabei auf einem möglichst einfachen Wege gefunden werden kann und die bisher angegebenen Lösungen sämmtlich als specielle Fälle enthält. Was ich erhalten habe, scheint wenigstens für den Unterricht nicht unbrauchbar zu sein, weshalb die Mittheilung desselben an diesem Orte sich wohl rechtfertigen dürfte.

Es sei die Gleichung $x^3+c=0$ gegeben, so ergiebt sich unmittelbar $x=-\sqrt[3]{c}$, mithin $x+\sqrt[3]{c}$ als einer der zweitheiligen Faktoren der vorgegebenen Gleichung. Die beiden anderen findet man sogleich, wenn man x^3+c durch $(x+\sqrt[3]{c})$ dividirt. Man erhält dadurch $x^2-x\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{cc}=0$ und daraus die beiden anderen zweitheiligen Faktoren $x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}(1+i\sqrt{3})$ und $x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}(1-i\sqrt{3})$, wo $i=\sqrt{-1}$ gesetzt ist. Ist c negativ, so gehen die Vorzeichen von $\sqrt[3]{c}$ in die entgegengesetzten über, ohne dass sich in den gefundenen Ausdrücken sonst etwas änderte. Eine sogenannte reine cubische Gleichung hat demnach stets **eine** reelle und **zwei** imaginäre Wurzeln.

Soll nun die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ aufgelöst werden, so übersieht man sofort, dass dies am einfachsten dadurch geschehen kann, dass man sie in eine andere von der Form $y^3+c'=0$ umformt und letztere auf die so eben angegebene Weise löst. Es wird demnach für x eine solche Funktion von y gesetzt werden müssen, welche noch zwei von einander und von y völlig unabhängige Grössen u und v enthält, damit es möglich sei, die Werthe der letzteren so anzunehmen, dass dadurch die Coefficienten von y^2 und y gleich Null werden. Die einfachste Funktion dieser Art ist aber $x=\frac{u+vy}{1+y}$. Wird diese also in obige Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}0=&\,y^3(v^3+av^2+bv+c)\\&+y^2(v[3uv+a(u+v)+b]+[auv+b(u+v)+3c])\\&+y(u[3uv+a(u+v)+b]+[auv+b(u+v)+3c])\\&+(u^3+au^2+bu+c)\end{aligned}$$

und man hat nun u und v so zu bestimmen, dass die beiden mittelsten Glieder verschwinden. Es geschieht dies am einfachsten dadurch, dass man

$$\left.\begin{aligned}0&=3uv+a(u+v)+b\\0&=auv+b(u+v)+3c\end{aligned}\right\}\ (1)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left.\begin{aligned}0&=(b+au)+v(a+3u)=(b+av)+u(a+3v)\\0&=(3c+bu)+v(b+au)=(3c+bv)+u(b+av)\end{aligned}\right\}\ (2)$$

setzt. Damit erhält man sofort die Werthe:

$$\begin{aligned}3(v^3+av^2+bv+c)&=v^2(a+3v)+2v(b+av)+(3c+bv)\\&=v^2(a+3v)+(b+av)(2v-u)\\&=(a+3v)(v^2-2vu+u^2)\\&=(a+3v)(v-u)^2\end{aligned}$$

und auf ähnliche Weise

$$3(u^3+au^2+bu+c)=(a+3u)(v-u)^2.$$

Die transformirte Gleichung nimmt daher folgende Gestalt an:

$$0=y^3(a+3v)\frac{(v-u)^2}{3}+(a+3u)\frac{(v-u)^2}{3}$$

oder

$$0=y^3+\frac{a+3u}{a+3v}\ \ldots\ldots\ (3)$$

Setzt man nun der Kürze halber $a+3u=g^3$ und $a+3v=h^3$, so ergeben sich die drei Werthe von y folgendermaassen:

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{g}{h}\\ y&=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{g}{h}(1+i\sqrt{3})\\ y&=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{g}{h}(1-i\sqrt{3})\end{aligned}\right\}\ (4)$$

Für den Quotienten $\frac{g}{h}$ lassen sich mit Hülfe der Gleichungen (2) noch folgende Werthe aufstellen:

$$\frac{g^3}{h^3}=\frac{a+3u}{a+3v}=\frac{u}{v}\cdot\frac{b+au}{b+av}=\frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{3c+bu}{3c+bv}.$$

Werden nun diese Ausdrücke der Reihe nach in die Gleichung $x=\frac{u+vy}{1+y}$ gesetzt, so erhält man die drei Wurzeln der vorgegebenen cubischen Gleichung.

Zuvörderst ist, wenn man den reellen Werth von y nimmt, wegen

$$u=\tfrac{1}{3}(g^3-a)\ \text{und}\ v=\tfrac{1}{3}(h^3-a),$$

$$x=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(g^3-a)+(h^3-a)y}{1+y}=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{g^3+h^3y}{1+y}-\tfrac{1}{3}a,$$

also auch

$$\begin{aligned} x&=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}\,\frac{g^3h-h^3g}{h-g}\\ &=-\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{3}gh(g+h)\ \ldots\ldots\ (5)\end{aligned}$$

Substituirt man ferner die imaginären Werthe von y, nämlich $\frac{1}{2}\frac{g}{h}(1\pm i\sqrt{3})$, so bekommt man

$$x=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}gh\cdot\frac{2g^2+h^2(1\pm i\sqrt{3})}{2h+g(1\pm i\sqrt{3})}.$$

Wird der Bruch rechter Hand im Zähler und Nenner mit

$$(g-h)(2h+g(1\mp i\sqrt{3}))$$

multiplicirt, so erhält man nach einigen einfachen Reduktionen:

$$x=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}gh\frac{(g+h)\mp(g-h)i\sqrt{3}}{2}\ \ldots\ (6)$$

Es bleibt daher nur noch übrig, die Werthe von u, v, g und h durch die Coefficienten a, b, c auszudrücken. Es folgt aber aus (1), wenn man zur Abkürzung

$$a^2-3b=k,\ 9c-ab=m,\ b^2-3ac=n$$

setzt, sogleich

$$u+v=\frac{m}{k}\ \text{und}\ uv=\frac{n}{k},$$

und daraus auf bekannte Weise:

$$u=\frac{m+\sqrt{m^2-4nk}}{2k},\quad v=\frac{m-\sqrt{m^2-4nk}}{2k}$$

mithin:

$$g^3=\frac{2ak+3m+3\sqrt{m^2-4nk}}{2k},$$

$$h^3=\frac{2ak+3m-3\sqrt{m^2-4nk}}{2k}.$$

Es ergeben sich damit endlich die Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
x&=-\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{3}p-\tfrac{1}{3}q\\
x&=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(p+q)+(p-q)i\sqrt{3}}{2}\\
x&=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(p+q)-(p-q)i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}\right\}\ (7)$$

wo die Grössen p und q durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$2p^3=2ak+3m+3\sqrt{m^2-4nk},$$

$$2q^3=2ak+3m-3\sqrt{m^2-4nk}.$$

Setzt man statt k, m, n die entsprechenden Werthe, so verwandelt sich:

$$\left.\begin{aligned}
&2ak+3m\pm3\sqrt{m^2-4nk}=2a^3-9ab+27c\\
&\qquad\pm3\sqrt{3}\sqrt{27c^2-18abc+4a^3c-b^2(a^2-4b)}\\
&2c(2ak+3m\pm3\sqrt{m^2-4nk})\\
&\quad=b^2(a^2-4b)+\{3\sqrt{3}.c\pm\sqrt{27c^2-18abc+4a^3c-b^2(a^2-4b)}\}^2
\end{aligned}\right\}\ (8)$$

Ausdrücke, welche in einzelnen Fällen mit Nutzen gebraucht werden können. Man kann aber ausser den in (7) zusammengestellten Werthen der Wurzeln noch eine zweite Reihe solcher Werthe erhalten, wenn man anstatt x den Werth $\frac{1+y}{u_1+v_1 y}$ in die vorgegebene Gleichung substituirt, oder, was kürzer ist, nach den Formeln (7) die Wurzeln der Gleichung $x_1{}^3+\frac{b}{c}\,x_1{}^2+\frac{a}{c}\,x_1+\frac{1}{c}=0$ sucht, in welcher $x_1=\frac{1}{x}$ ist. Man erhält auf diese Weise noch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{3c}{b+p_1+q_1}\\ x&=-\frac{3c}{b-\frac{1}{2}(p_1+q_1)-\frac{1}{2}(p_1-q_1)i\sqrt{3}}\\ x&=-\frac{3c}{b-\frac{1}{2}(p_1+q_1)+\frac{1}{2}(p_1-q_1)i\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\ (9)$$

wo p_1 und q_1 aus den nachstehenden Gleichungen gefunden werden:

$$2p_1{}^3=2bn+3mc+3c\sqrt{m^2-4nk}$$
$$2q_1{}^3=2bn+3mc-3c\sqrt{m^2-4nk}$$

oder auch (10)

$$2(2bn+3mc\pm3c\sqrt{m^2-4nk}$$
$$=a^2(b^2\cdot4ac)+\{3\sqrt{3c}\pm\sqrt{27c^2\text{-}18abc+4b^3\text{-}a^2(b^2\text{-}4ac)}\}^2$$

Die in (8) und (10) zusammengestellten Werthe von p und q, so wie von p_1 und q_1, sind stets reell, so lange m^2-4nk positiv ist. Haben daher n und k ungleiche Vorzeichen, so hat die Gleichung immer nur eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Dasselbe ist der Fall, wenn n und k gleiche Vorzeichen besitzen und überdiess $m^2>4nk$ ist. Wird hingegen in diesem Falle $m^2<4nk$, so erscheinen alle drei Wurzeln unter imaginärer Form, obschon sie dann alle drei reell werden, wovon man sich augenblicklich überzeugt, wenn man die Werthe von p, q, p_1 und q_1 nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt. Denn dann heben sich die mit i behafteten Glieder sämmtlich auf. Im Allgemeinen hat also die Gleichung nur eine reelle Wurzel, wenn

$$27c^2+4a^3c+4b^3>a^2b^2+18abc,$$

und drei reelle Wurzeln, wenn

$$27c^2+4a^3c+4b^3<a^2b^2+18abc$$

ist. — Nachdem auf diese Weise die allgemeinen Werthe der sämmtlichen Wurzeln gefunden worden sind, so ist es nunmehr leicht, eine Reihe specieller Lösungen aus ihnen abzuleiten, von denen ein Theil auch bereits bekannt ist.

Fall I. Es sei $a = 0$.

Die Gleichungen (7) bis (10) geben unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}(p+q) \\ x &= \tfrac{1}{6}((p+q)+(p-q)i\sqrt{3}) \\ x &= \tfrac{1}{6}((p+q)-(p-q)i\sqrt{3}) \\ p &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+\tfrac{4}{27}b^3}} \\ p &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+\tfrac{4}{27}b^3}} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{c}{\tfrac{1}{3}b+p^2+q^2} \\ x &= \frac{c}{\tfrac{1}{3}b-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)-\tfrac{1}{2}(p^2-q^2)i\sqrt{3}} \\ x &= \frac{c}{\tfrac{1}{3}b-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}(p^2-q^2)i\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Die Werthe von p und q sind reell, wenn $c^2 + \frac{4}{27}b^3 > 0$, imaginär, wenn $c^2 + \frac{4}{27}b^3 < 0$ ist. Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat also nur **eine** reelle Wurzel, wenn b positiv, oder wenn b negativ, jedoch $c^2 > \frac{4}{27}b^3$ ist. Dagegen besitzt sie **drei** reelle Wurzeln, wenn b negativ und zugleich $c^2 < \frac{4}{27}b^3$ ist.

Die Formeln (11) bilden die sogenannte **Cardanische Formel**. Sie kann zur Auflösung aller cubischen Gleichungen dienen, la $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sich stets auf die Form $y^3 + By + C = 0$ bringen lässt, wenn man $x = y - \frac{1}{3}a$ setzt. Es wird lann

$$B = -\tfrac{1}{3}(a^2 - 3b)$$

$$C = \tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c = \tfrac{2}{27}a(a^2 - 3b) + \tfrac{1}{9}(9c - ab)$$

der mit den oben gebrauchten Bezeichnungen:

$$B = -\tfrac{1}{3}k$$

$$C = \tfrac{2}{27}ak + \tfrac{1}{9}m = \tfrac{1}{9}\{m - 2aB\}$$

Fall 2. Es sei $b = 0$.

Für diesen Fall erhält man die Werthe der Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a - (p^2+q^2) \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}\{(p^2+q^2)+(p^2-q^2)i\sqrt{3}\} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}\{(p^2+q^2)-(p^2-q^2)i\sqrt{3}\} \\ p &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}\sqrt{c+\tfrac{4}{27}a^3}} \\ q &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}\sqrt{c+\tfrac{4}{27}a^3}} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ingleichen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-\sqrt[3]{c^2}}{p+q} \\ x &= \frac{-2\sqrt[3]{c^2}}{(p+q)+(p-q)i\sqrt{3}} \\ x &= \frac{-2\sqrt[3]{c^2}}{(p+q)-(p-q)i\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} (14)$$

Die Werthe von p und q sind reell oder imaginär, je nachdem $c+\frac{4}{27}a^3$ positiv oder negativ ist. Die Gleichung $x^3+ax^2+c=0$ hat daher im ersten Falle nur **eine** reelle Wurzel, im zweiten dagegen **drei**.

Die Formeln (13) und (14) bilden gewissermaassen die Umkehrung der Cardanischen Formeln, und können gleichfalls zur Auflösung aller cubischen Gleichungen gebraucht werden, indem die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ sich immer auf die Form $y^3+Ay^2+C=0$ bringen lässt. Es geschieht dies, wenn man $x=y-\frac{1}{3}(a+\sqrt{a^2-3b})$ setzt, und man erhält:

$$A=-\sqrt{a^2-3b}$$

$$C=c+\frac{2(a^2-3b)(a+\sqrt{a^2-3b})-3ab}{9},$$

Ausdrücke, die denen des ersten Falles an Bequemlichkeit freilich nachstehen, jedenfalls aber dann mit Vortheil gebraucht werden können, wenn a^2-3b eine Quadratzahl ist.

Ausser den bisher gemachten beiden Annahmen können aber noch mehrere einzelne specielle Fälle entwickelt werden, die ebenfalls zu allgemeinen Auflösungen für die cubischen Gleichungen sich brauchen lassen. Die drei wichtigsten derselben bieten sich fast unmittelbar dar, indem man in den Gleichungen (8) und (10) successiv m, n, k gleich Null setzt. Man erhält dadurch die nachstehenden Formeln, in denen jedoch immer nur diejenige der beiden Wurzelformen (7) und (9) in Anwendung gebracht worden ist, welche im Resultate die grösste Einfachheit gewährt.

Fall 3. Es sei $a^2-3b=k=0$.

In diesem Falle wird $3n=-am$ und in (7) $p^3=3m$, $q^3=0$, $m=9c-\frac{1}{3}a^3$, und daher

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a-\sqrt[3]{c-\tfrac{1}{27}a^3} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{c-\tfrac{1}{27}a^3} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{c-\tfrac{1}{27}a^3} \end{aligned}\right\} (15)$$

Die Gleichung $x^3+ax^2+\frac{1}{3}a^2x+c=0$ hat daher stets nur **eine** reelle Wurzel.

Fall 4. Es sei $b^2 - 3ac = n = 0$.

Man erhält hier $m = -\frac{b}{a}k$, $p_1{}^3 = 3mc$, $q_1{}^3 = 0$, mithin ge-
n die Formeln (9)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b}{-a+\sqrt[3]{a(a^2-3b}} \\ x &= \frac{-b}{a+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{a(a^2-3b)}} \\ x &= \frac{-b}{a+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{a(a^2-3b)}} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

; hat also die Gleichung $x^3 + ax^2 + \sqrt{3ac}\,.\,x + c = 0$ gleich-
lls nur eine reelle Wurzel.

Fall 5. Es sei $9c - ab = m = 0$.

Hier ist $n = -\frac{1}{3}bk$ und $-4nk = +\frac{4}{3}bk^2$. Damit erhält man
is (7)

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{a^2-3b}\,(p+q) \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p+q)+(p-q)i\sqrt{3}\} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p+q)-(p-q)i\sqrt{3}\} \\ p &= \sqrt[3]{a+\sqrt{\tfrac{1}{3}b}} \qquad q = \sqrt[3]{a-\sqrt{\tfrac{1}{3}b}} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

gleichen ergiebt sich aus (9):

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a\sqrt{3b}}{\sqrt{3b}+\sqrt[3]{a^2-3b}(p_1+q_1)} \\ x &= -\tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a\sqrt{3b}}{\sqrt{3b}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p_1+q_1)+(p_1-q_1)i\sqrt{3}\}} \\ x &= -\tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a\sqrt{3b}}{\sqrt{3b}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p_1+q_1)-(p_1-q_1)i\sqrt{3}\}} \\ p_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{3b}+a} \qquad q_1 = \sqrt[3]{\sqrt{3b}-a} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Demnach hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + \frac{1}{9}ab = 0$ stets
ine reelle Wurzel, wenn b positiv ist, und drei, wenn b nega-
iv ist.

Fall 6. Es sei $c - ab = 0$.

Hier wird $m = 8ab$, $p = a + \sqrt{3b}$, $q = a - \sqrt{3b}$, und daher nach (7)

$$\left.\begin{aligned} x &= -a \\ x &= +\sqrt{-b} \\ x &= -\sqrt{-b} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Demnach hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$ stets eine oder drei reelle Wurzeln, je nachdem b positiv oder negativ ist.

Fall 7. Es sei $a^2 - 4b = 0$.

Die Gleichungen (7) geben hier die speciellen Werthe:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a - (p^2 + q^2) \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) + \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2)i\sqrt{3} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) - \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2)i\sqrt{3} \\ p &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\sqrt{c} + \tfrac{1}{2}\sqrt{c - \tfrac{1}{54}a^3}} \\ q &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\sqrt{c} - \tfrac{1}{2}\sqrt{c - \tfrac{1}{54}a^3}} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Demnach hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}a^2x + c = 0$ nur eine reelle Wurzel, wenn entweder c positiv und $c > \frac{1}{54}a^3$, oder wenn c negativ und $c < \frac{1}{54}a^3$ ist. In den entgegengesetzten Fällen kommen ihr drei reelle Wurzeln zu.

Fall 8. Es sei $b^2 - 4ac = 0$.

Die Formeln (9) und (10) geben für diesen Fall:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{c}{\frac{1}{3}b + p_1^2 + q_1^2} \\ x &= -\frac{c}{\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2}(p_1^2 - q_1^2)i\sqrt{3}} \\ x &= -\frac{c}{\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_1^2 - q_1^2)i\sqrt{3}} \\ p_1 &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{54}b^3}} \\ q_1 &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{54}b^3}} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Hiernach besitzt die Gleichung $x^3 + \frac{1}{4}\frac{b^2}{c}x^2 + bx + c = 0$ nur eine oder drei reelle Wurzeln, je nachdem $c^2 > \frac{1}{54}b^3$ oder $c^2 < \frac{1}{54}b^3$ ist.

Es lohnt nicht der Mühe, noch anderweiten speciellen Lösungen nachzutrachten, da die hier gegebenen ziemlich die einfachsten Resultate liefern. Die beiden zuletzt erwähnten Fälle werden durch die besondere Form der in (8) und (10) gegebenen Endausdrücke dargeboten.

Jeder aber der im Vorstehenden aufgeführten Fälle bietet eine allgemeine Auflösung der cubischen Gleichungen dar, wenn es möglich ist die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ so umzuformen, dass die Coefficienten der neuen Gleichung den Bedingungen entsprechen, welche der zu Grunde gelegte Fall verlangt. Setzt man in vorstehender Gleichung $x=y+z$, so geht dieselbe über in

$$\left.\begin{array}{l} y^3+y^2(3z+a)+y(3z^2+2az+b) \\ \qquad +(z^3+az^2+bz+c) \end{array}\right\}=0 \text{ oder } y^3+Ay^2+By+C=0$$

und man kann nun z so bestimmen, dass irgend eine vorgeschriebene Bedingung dadurch erfüllt wird. Setzt man $3z+a=0$ oder $3z^2+2az+b=0$, so bekommt man die schon in Fall 1. und 2. erwähnte Cardanische Auflösung sammt der mit ihr zusammenhängenden inversen. Will man den dritten speciellen Fall zu Grunde legen, so muss der Bedingung $A^2-3B=0$ genügt werden, d. h. es muss

$$(3z+a)^2=3(3z^2+2az+b)$$

sein. Die Entwickelung giebt aber nur die Form $a^2-3b=0$, indem z sich auf beiden Seiten vollständig hebt, mithin kann der Fall 3. einer allgemeinen Auflösung nicht zu Grunde gelegt werden, wenigstens nicht, so lange man für x keine andere Substitution macht.

Um den vierten Fall zu einer allgemeinen Auflösung zu erweitern, muss man B^2-3AC, d. h.

$$(3z^2+2az+b)^2=3(3z+a)(z^3+az^2+bz+c)$$

setzen. Hieraus folgt nach gehöriger Entwickelung:

$$z^2-z\frac{9c-ab}{a^2-3b}+\frac{b^2-3ac}{a^2-3b}=0$$

oder

$$z^2-z\frac{m}{k}+\frac{n}{k}=0$$

und daher

$$z=\frac{m+\sqrt{m^2-4nk}}{2k}.$$

Es ist dies die Auflösung, welche Cockle vor zwei Jahren bekannt gemacht und der Herausgeber dieses Journales im ersten Bande desselben mitgetheilt hat.

Die Anwendung des fünften Falles zu einer allgemeinen Auflösung der cubischen Gleichungen verlangt, dass $9C=AB$ oder

$$9(z^3+az^2+bz+c)=(3z+a)(3z^2+2az+b)$$

gesetzt werde. Die Entwickelung giebt $z = \frac{9c-ab}{2(a^2-3b)} = \frac{m}{2k}$, mithin einen recht einfachen Werth dieser Grösse, aus welchem sofort

$$A = \frac{2ak+3m}{2k},\ B = \frac{3(m^2-4nk)}{4k^2}$$

folgt. Es würde daher, wenn man statt der Cardanischen Formel irgend eine andere wählen wollte, die vorstehende eine ganz besondere Berücksichtigung verdienen. Der sechste Fall erfordert, wenn er verallgemeinert werden soll, dass $C = AB$, also

$$z^3 + az^2 + bz + c = (3z+a)(3z^2+2az+b)$$

sein muss. Die Entwickelung giebt jedoch die Gleichung:

$$8z^3 + 8az^2 + 2z(a^2+b) - (c+ab) = 0$$

verlangt also abermals die Lösung einer cubischen Gleichung und wird dadurch, wenigstens bei der angewendeten Substitution, zu einer Verallgemeinerung unbrauchbar.

Der siebente Fall würde erfordern, dass $A^2 = 4B$ oder

$$(3z+a)^2 = 4(3z^2+2az+b)$$

sei. Die Entwickelung giebt

$$3z^2 + 2az - (a^2-4b) = 0,$$

also

$$z = -\tfrac{1}{3}(a + 2\sqrt{a^2-3b})$$
$$A = -2\sqrt{a^2-3b}$$
$$C = \tfrac{2}{27}(a^3 - (a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}) - \tfrac{1}{3}ab + c$$

eine Auflösung, die ganz brauchbar ist, wenn $\sqrt{a^2-3b}$ eine rationale Zahl ist.

Der achte Fall endlich verlangt, dass $B^2 - 4AC$ oder

$$(3z^2+2az+b)^2 = 4(3z+a)(z^3+az^2+bz+c)$$

sein soll. Entwickelt giebt dieser Ausdruck die Gleichung:

$$3z^4 + 4az^3 + 6bz^2 + 12cz - (b^2-4ac) = 0$$

die gar vom vierten Grade ist, so dass also dieser Fall eine Verallgemeinerung gleichfalls nicht zulässt.

Das Vorstehende zeigt, dass es weiter keine grosse Schwierigkeit hat, neue Auflösungsweisen der cubischen Gleichungen aufzufinden. Soll jedoch die Wurzel einer unreinen cubischen Gleichung wirklich berechnet werden, so möchte die folgende Methode allen anderen vorzuziehen sein.

Man verwandele die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ durch die Substitution $x = y - \frac{1}{3}a$ in eine andere von der Form $y^3 + By$

$+C=0$, setze dann $y=\sqrt{B}\,.\,z$, so ergiebt sich $z^3+z+\frac{C}{B\sqrt{B}}=0$, eine Gleichung, für welche sich mittelst einer Tafel der Cubikzahlen die Wurzel fast ohne Rechnung auf die fünf ersten Ziffern finden lässt. Es wird auch sehr einfach sein, für die Werthe von

$$\frac{C}{B\sqrt{B}}=\frac{(9c-ab)-\frac{2}{3}a(3b-a^2)}{(3b-a^2)\sqrt{3(3b-a^2)}}$$

eine Tafel zu berechnen, mittelst welcher man die zu dieser Grösse gehörigen Werthe von z unmittelbar findet. Vielleicht finde ich in der Folge Zeit, eine solche Tafel zu berechnen.

XLV.

Ueber eine wesentliche Verallgemeinerung des Problems von den, den Kegelschnittten ein- oder umgeschriebenen Polygonen.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Die allgemeinste Form, welche das bezeichnete Problem zuletzt erhalten hat, ist bekanntlich: *a*) In einen gegebenen Kegelschnitt ein n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung durch n gegebene Punkte gehen; *b*) um einen gegebenen Kegelschnitt ein n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf k gegebenen Geraden liegen.

Im Laufe einer systematischen Darstellung der sogenannten Involutionen als eigenthümlicher Beziehungen projectivischer Gebilde auf einander begegnete ich einem Princip, durch welches nicht nur die innere Natur der obigen, sondern auch die einer weit allgemeineren Doppelaufgabe vollständig aufgehellt wird. Und hierbei überraschte mich die Bemerkung, dass zwei Aufgaben, welche beide von den Alten uns überliefert worden und wie keine das Interesse der Neueren in Anspruch genommen haben, nämlich die in Rede stehende des Pappus und die Tactionen des Apollonius, beide, wiewohl in ihrer ursprünglichen Gestalt ganz verschieden von einander,

nach einer Reihe von Verwandlungen in einer Weise sich darstellen, dass man versucht wird, sie für die Modifikationen einer und derselben Aussage zu halten.

Um mich kurz zu fassen, werde ich mich auf Steiner's Abhängigkeit geometrischer Gestalten u. s. w. und auf art. 418 und 424 des Traité des propriétés projectives des figures von Poncelet berufen. Ausserdem bemerke ich, dass zwei auf einander gelegte projectivische Gerade A, A_1, so wie zwei concentrische projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 involutorisch heissen, wenn dort die beiden Durchschnitte der Parallelstrahlen sich in einem Punkte vereinigen, hier die ungleichnamigen Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zusammenfallen; ferner dass, wie man sich aus §. 16. des Steiner'schen Werkes leicht überzeugen wird, bei zwei involutorischen Gebilden A, A_1 oder B, B_1 je zwei entsprechende Elemente sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. dass jedem Elemente, wenn es nach einander als beiden Gebilden angehörig betrachtet wird, in dem jedesmaligen andern Gebilde ein und dasselbe Element entspricht; und dass umgekehrt zwei auf einander gelegte oder concentrische projectivische Gebilde involutorisch sind, wenn ein einziges Elementenpaar sich in doppeltem Sinne entspricht. Auch soll der Kürze wegen die Eigenschaft, dass zwei Gebilde, z. B. A, A_1, in Ansehung der entsprechenden Elementenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ projectivisch sind, durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots),$$

sowie, dass sie in Ansehung derselben als zugeordneter Elementenpaare involutorisch sind, durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots)$$

bezeichnet werden.

§. 1.

a) Gehen durch einen beliebigen Punkt p_1 in der Ebene eines Kegelschnittes K zwei beliebige Gerade $B_1 B'_1$, $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$, welche den letzteren in den Punkten B_1, B'_1, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ schneiden; zieht man die Geraden $B_1 \mathfrak{a}_1$, $B'_1 \mathfrak{a}_2$; $B_1 \mathfrak{a}_2$, $B'_1 \mathfrak{a}_1$ oder a_1, a'_1; a_2, a'_2, die sich paarweise in $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$ schneiden, und verbindet die Punkte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$ durch eine Gerade A; legt man sodann durch B_1 beliebig viele Strahlen b_1, c_1, $d_1 \ldots$, welche den Kegelschnitt in $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1 \ldots$ und die Gerade A in $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$, $\mathfrak{d}'_1 \ldots$ schneiden, verbindet die letzteren Punkte mit B'_1 durch die Strahlen b'_1, c'_1, $d'_1 \ldots$, welche K in $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2 \ldots$ schneiden, diese wieder mit B_1 durch b_2, c_2, $d_2 \ldots$, welche die A in $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$, $\mathfrak{d}'_2 \ldots$, und diese mit B'_1 durch b'_2, c'_2, $d'_2 \ldots$, welche K in $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3 \ldots$ schneiden; und verbindet endlich auch diese Punkte mit B_1 durch die Strahlen b_3, c_3, $d_3 \ldots$, so ist erstens, wegen des perspectivischen Durchschnittes A

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots)$$
$$= B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots)$$

und zweitens wegen des Kegelschnittes K, nach Abh. geomet. Gest. §. 38, III. rechts:

$$B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots : a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots) \\ = B_1(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots . a_1, b_3, c_3, d_3 \ldots),$$

also auch, wenn man die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ ursprünglich einem Strahlbüschel B_1, und die Strahlen $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ nebst a_2(oder a_1), $b_3, c_3, d_3 \ldots$ einem mit B_1 concentrischen Strahlbüschel B_2 angehörig betrachtet, dann aber die $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ ebenfalls zu B_1 rechnet:

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots . a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) \\ = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots . a_1, b_3, c_3, d_3 \ldots).$$

Hier aber sind die Strahlen a_1, a_2 in doppeltem Sinne entsprechend, also gilt dasselbe von je zwei entsprechenden Strahlen, d. h. die Strahlen $b_3, c_3, d_3 \ldots$ sind mit den Strahlen $b_1, c_1, d_1 \ldots$, und folglich die Punkte $\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}_3 \ldots$ mit den Punkten $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ identisch.

Nach einem bekannten Satze schneiden nun die Diagonalen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots$ der vollständigen Vierseite $a_1a'_1a_2a'_2$, $b_1b'_1b_2b'_2$, $c_1c'_1c_2c'_2$, $d_1d'_1d_2d'_2 \ldots$ die allen gemeinschaftliche Diagonale $B_1B'_1$ in einem Punkte, welcher der vierte harmonische zu B_1, B'_1 und dem Durchschnitte von $B_1B'_1$ und A, einer ebenfalls gemeinschaftlichen Diagonale, und zwar der dem letzteren zugeordnete Punkt ist; also gehen die ersteren sämmtlich durch einen und denselben Punkt p_1.

Hieraus schliesst man sofort, da die Punkte $p_1, B_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ durchaus beliebig und von einander unabhängig sind, dass, wenn durch einen beliebigen Punkt p_1 die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots$ beliebig gezogen und sodann um einen beliebigen Punkt (B_1B_2) auf dem Umfange von K die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ bestimmt werden, die Beziehung

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots . a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) \\ = B_2(a_2, b_2, c_2, d_1 \ldots . a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots)$$

stattfinden muss.

Ferner: da der Punkt p_1 durch zwei Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ gegeben, und da das ganze System entsprechender Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde B_1, B_2 bestimmt ist, wenn drei dieser Paare a_1, b_1, a_2; a_2, b_2, a_1 beliebig gegeben sind, d. h. im hier betrachteten Falle zwei beliebige Paare zugeordneter Elemente a_1, b_1; a_2, b_2, so muss sich der vorige Schluss auch umkehren lassen.

b) Setzt man in *a*) überall, wo von Punkten und Geraden, Punkten auf dem Umfange von K, Verbindungslinien zweier Punkte, Durchschnitten zweier Geraden, Durchschnitten einer Geraden und des Kegelschnitts, projectivischen Strahlbüscheln, perspectivischem Durchschnitt die Rede ist, resp. Gerade und Punkte, Tangenten an K, Durchschnitte zweier Geraden, Verbindungslinien zweier Punkte, Tangenten von einem Punkte an den Kegelschnitt, pro-

jectivische Gerade, Projectionspunkt, und berücksichtigt Abh. geom. Gest. §. 38. III. links, so ergiebt sich die rechte Seite des folgenden Lehrsatzes:

Sämmtliche Punktenpaare, in welchen ein beliebiger Kegelschnitt von einem beliebigen ebenen Strahlbüschel geschnitten wird, bestimmen, wenn sie mit einem beliebigen Punkte seines Umfanges durch Gerade verbunden werden, die zugeordneten Strahlenpaare zweier involutorischer Strahlbüschel;

Die sämmtlichen Tangentenpaare, welche von den Punkten einer beliebigen Geraden an einen beliebigen Kegelschnitt gezogen werden, schneiden eine beliebige andere Tangente desselben in den zugeordneten Punktenpaaren zweier involutorischer Geraden;

und umgekehrt:

Liegt der gemeinschaftliche Mittelpunkt zweier involutorischer Strahlbüschel auf dem Umfange eines Kegelschnitts, so gehen alle Sehnen desselben, welche durch die zugeordneten Strahlenpaare der ersteren bestimmt werden, durch einen und denselben Punkt.

Liegen auf einer Tangente eines Kegelschnittes zwei involutorische Gerade, so liegen die Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare, welche von den zugeordneten Punktenpaaren der ersteren an den Kegelschnitt gezogen werden, auf einer geraden Linie.

Anmerkung 1. Die involutorischen Gebilde zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Klassen: entweder sind die beiden Gebilde ungleichliegend, und dann folgen je zwei zugeordnete Elemente unmittelbar auf einander, oder sie sind gleichliegend, und dann wechseln die Elemente jedes Paares mit denen der anderen Paare ab. Im ersten Falle giebt es allemal zwei Elemente (Hauptpunkte, Hauptstrahlen), welche mit je zwei zugeordneten harmonisch sind, im zweiten giebt es deren niemals. In a) tritt der erste und zweite Fall ein, jenachdem der Punkt p_1 ausserhalb oder innerhalb K liegt, und in b), jenachdem die Gerade P den Kegelschnitt schneidet oder nicht.

Anmerkung 2. Denkt man sich links in der Umkehrung den besonderen Fall einer Involution von lauter rechten Winkeln, so erhält man einen längst bekannten Satz.

Anmerkung 3. Das hier Gesagte giebt zugleich über die innere Natur der Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren, von welcher in §. 45. des Steiner'schen Werkes andeutend gesprochen wird, näheren Aufschluss.

§. 2.

Es ist ein beliebiger Kegelschnitt und in der Ebene desselben sind

n beliebige Punkte gegeben; in den ersteren ein einfaches n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung durch die gegebenen Punkte gehen.

n beliebige Gerade gegeben; um den ersteren ein einfaches n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf den gegebenen Geraden liegen.

Es sei der Kegelschnitt K und der Reihe nach

die Punkte $p_1, p_2, p_3 \ldots. p_k, p_{k+1} \ldots. p_n$ gegeben. Man denke sich durch einen beliebigen dieser Punkte, z. B. durch p_1, unzählige Gerade gelegt, welche K in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$; $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$; $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$; $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \ldots.$ schneiden, sodann einen Punkt jedes Paares, z. B. $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2 \ldots.$, mit dem auf p_1 folgenden Punkte p_2 durch Gerade verbunden, welche K zum zweitenmal in $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}_3 \ldots.$ schneiden, dann wieder diese letzteren Punkte mit p_3 durch Gerade, welche K in $\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_4, \mathfrak{d}_4 \ldots.$ schneiden, u. s. f. die Punkte $\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{c}_k, \mathfrak{d}_k \ldots.$ mit p_k, die Punkte $\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1}, \mathfrak{c}_{k+1}, \mathfrak{d}_{k+1} \ldots.$ mit $p_{k+1} \ldots.$, endlich die Punkte $\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{d}_n \ldots.$ mit dem letzten gegebenen Punkte p_n verbunden, wodurch man die Punkte $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}, \mathfrak{d}_{n+1} \ldots.$ erhält. Ferner denke man sich um einen beliebigen Punkt auf dem Umfange von K, als gemeinschaftlichen Mittelpunkt, $n+1$ Strahlenbüschel $B_1, B_2, B_3 \ldots. B_k, B_{k+1} \ldots. B_n, B_{n+1}$ gebildet, deren Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$; $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots.$, $a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots.$; $\ldots. a_k, b_k, c_k, d_k \ldots.$; $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1} \ldots.$; $\ldots. a_n, b_n, c_n, d_n \ldots.$; $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1} \ldots.$ nach den gleichnamigen und gleichmarkirten Punkten des Umfanges von K gerichtet sind, so sind, dem Satze links des §. 1. zufolge, je zwei dieser Strahlbüschel, welche unmittelbar auf einander folgen, z. B. B_k, B_{k+1}, in Ansehung der zugeordneten Strahlenpaare $a_k, b_k, c_k, d_k \ldots.$ und $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1} \ldots.$ involutorisch; folglich sind auch der erste und der letzte Strahlbüschel B_1, B_{n+1} in Ansehung der entsprechenden Strahlen

die Geraden $P_1, P_2, P_3 \ldots. P_k, P_{k+1} \ldots. P_n$ gegeben. Man denke sich von unzähligen Punkten einer beliebigen dieser Geraden, z. B. der P_1, an K die Tangentenpaare a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; $d_1, d_2 \ldots.$ gezogen, sodann von den Punkten, wo allemal die eine dieser Tangenten, z. B. $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots.$, die auf P_1 folgende Gerade P_2 schneidet, die neuen Tangenten $a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots.$, dann wieder von den Durchschnittspunkten der letzteren mit P_3 die Tangenten $a_4, b_4, c_4, d_4 \ldots.$, u. s. f. von den Durchschnittspunkten der Tangenten $a_k, b_k, c_k, d_k \ldots.$ mit P_k, der $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1} \ldots.$ mit $P_{k+1} \ldots.$, endlich der $a_n, b_n, c_n, d_n \ldots.$ mit der letzten gegebenen Geraden P_n die Tangenten $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1} \ldots.$ Ferner denke man sich längs einer beliebigen andern Tangente $n+1$ Gerade $A_1, A_2, A_3 \ldots. A_k, A_{k+1} \ldots. A_n, A_{n+1}$ auf einander gelegt, welche von jenen Tangenten in den gleichnamigen und gleichmarkirten Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$; $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2 \ldots.$; $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}_3 \ldots.$; $\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{c}_k, \mathfrak{d}_k \ldots.$; $\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1}, \mathfrak{c}_{k+1}, \mathfrak{d}_{k+1} \ldots.$; $\ldots. \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{d}_n \ldots.$; $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}, \mathfrak{d}_{n+1} \ldots.$ geschnitten werden, so sind, dem Satze rechts des §. 1. zufolge, je zwei dieser Geraden, welche unmittelbar auf einander folgen, z. B. A_k, A_{k+1}, in Ansehung der zugeordneten Punktenpaare $\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{c}_k, \mathfrak{d}_k \ldots.$ und $\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1}, \mathfrak{c}_{k+1}, \mathfrak{d}_{k+1} \ldots.$ involutorisch; folglich sind auch die erste und die letzte Gerade A_1, A_{n+1} in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ und $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}, \mathfrak{d}_{n+1} \ldots.$ projectivisch (Steiner. §. 11. III.).

$a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1} \ldots$ projectivisch (Steiner. §. 11. III.). Ist nun $(e_1\, e_{n+1})$ ein Strahl, in welchem sich zwei entsprechende e_1, e_{n+1} vereinigen, so enspricht demselben ein Punkt $(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1})$, welcher zum Ausgangspunkte $\mathfrak{e}_1$ der Punktenreihe $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3 \ldots \mathfrak{e}_n, \mathfrak{e}_{n+1}$ genommen, mit dem letzten Punkte $\mathfrak{e}_{n+1}$ zusammenfällt. Die Strahlbüschel B_1, B_{n+1} aber sind durch drei beliebige ihrer entsprechenden Strahlenpaare a_1, b_1, c_1 und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ vollkommen bestimmt. Also ist die Aufgabe gelöst, wenn man auf die oben angegebene Art, von drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ ausgehend, die Punktenreihen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$; $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3 \ldots \mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_{n+1}$; $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3 \ldots \mathfrak{c}_n, \mathfrak{c}_{n+1}$ bildet, die Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}$ mit einem beliebigen Punkte $(B_1 B_{n+1})$ des Umfanges von K durch die Strahlen a_1, b_1, c_1 und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ verbindet, und, indem man sich zwei Strahlbüschel B_1, B_{n+1} vorstellt, die in Ansehung dieser drei, als entsprechender Strahlenpaare projectivisch sind, diejenigen zwei Strahlen $(e_1 e_{n+1})$, (f_1, f_{n+1}) construirt, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen (Steiner. §. 17. II.). Nämlich jeder der Punkte $(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1})$, $(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_{n+1})$, wo diese Strahlen den Kegelschnitt schneiden, ist die mit p_1 zu verbindende Ecke eines der Aufgabe genügenden Polygons.

Ist nun $(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1})$ ein Punkt, in welchem sich zwei entsprechende $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1}$ vereinigen, so entspricht demselben eine Tangente $(e_1\, e_{n+1})$, welche zur ersten e_1 der Tangentenreihe $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n, e_{n+1}$ gewählt, mit der letzten Tangente e_{n+1} zusammenfällt. Die Geraden A_1, A_{n+1} aber sind durch drei beliebige ihrer entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}$ vollkommen bestimmt. Also ist die Aufgabe gelöst, wenn man auf die oben bezeichnete Weise, von drei beliebigen Tangenten a_1, b_1, c_1 ausgehend, die Tangentenreihen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, a_{n+1}$; $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n, b_{n+1}$; $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n, c_{n+1}$ bildet, sich längs einer beliebigen andern Tangente (A_1, A_{n+1}) zwei projectivische Gerade A_1, A_{n+1} auf einander gelegt denkt, welche von den Tangenten a_1, b_1, c_1 und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ in entsprechenden Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}$ geschnitten werden, und diejenigen zwei Punkte $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_{n+1})$, $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_{n+1})$ construirt, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen (Steiner. §. 17. II.). Nämlich jede der Tangenten (e_1, e_{n+1}), (f_1, f_{n+1}), welche von diesen Punkten ausgehen, ist die durch P_1 begrenzte Seite eines der Aufgabe genügenden Polygons.

Anmerkung 1. Lässt man bei der Bildung der Punkten- und der Tangentenreihen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$, $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, a_{n+1}$ u. s. w. $\mathfrak{a}_2, a_2$ die Stelle von $\mathfrak{a}_1, a_1$ vertreten, um sofort letztern auf p_2, P_2 zu beziehen, so ändert diess nichts im Resultate, weil die Gebilde $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n, B_{n+1}$; $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n, A_{n+1}$ nicht nur projectivisch, sondern involutorisch sind, folglich, wenn z. B. die Strahlen a_1, a_2 beide zu B_1 gerechnet werden, ihnen in B_2 die Strahlen a_2, a_1 entsprechen müssen; die Strahlbüschel B_1, B_{n+1} bleiben also identisch dieselben, nur erscheinen zu ihrer Bestimmung ein, zwei oder drei andere ihrer Strahlenpaare gegeben.

Anmerkung 2. Aus dem eben Bemerkten folgt, dass die Aufgabe links und rechts höchstens zweier Auflösungen fähig ist. Liegt ein einziger der gegebenen n Punkte p_k ausserhalb K, so

erzeugt er, wie gesagt, ungleichliegende Strahlbüschel B_k, B_{k+1}, und dadurch müssen auch B_1, B_{n+1} ungleichliegend werden. Wird dagegen zwischen B_1 und B_{n+1} die Lage der Gebilde 2, 4, 6 .... mal umgekehrt, so sind B_1, B_{n+1} nothwendig gleichliegend. Dasselbe gilt von A_1, A_{n+1}. Vergleicht man hiermit Steiner. §. 16. II., so folgt:

Die Aufgabe hat allemal zwei Auflösungen, wenn eine ungerade Anzahl

der gegebenen Punkte ausserhalb des Kegelschnittes liegt; und sie hat entweder zwei, oder nur eine oder keine Auflösung, wenn das Gegentheil stattfindet.

der gegebenen Geraden den Kegelschnitt durchschneidet; und sie hat entweder zwei, oder nur eine oder keine Auflösung, wenn das Gegentheil stattfindet.

Anmerkung 3. Führt man die Construction der Punkte $(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_{n+1})$, $(\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_{n+1})$, sowie der Tangenten $(e_1 e_{n+1})$, $(f_1 f_{n+1})$ wirklich aus, so zeigt es sich, dass man der Strahlbüschel B_1, B_{n+1} und der Geraden A_1, A_{n+1} gar nicht bedarf. Vielmehr hat man links nur die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_{n+1}$ und $\mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{b}_1$, die sich in $\mathfrak{b}_0$, und die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_{n+1}$ und $\mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{c}_1$, die sich in $\mathfrak{c}_0$ schneiden, und sofort die Gerade $\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$ zu ziehen, so schneidet sie K in den genannten Punkten; und rechts hat man den Durchschnitt der Tangenten a_1, b_{n+1} mit dem der Tangenten a_{n+1}, b_1 durch eine Gerade b_0, und den Durchschnitt der Tangenten a_1, c_{n+1} mit dem der Tangenten a_{n+1}, c_1 durch eine Gerade c_0 zu verbinden, so ist der Durchschnitt von b_0, c_0 zugleich der der erstgenannten Tangenten. (Vgl. Poncelet Traité art. 560 und 561.)

§. 3.

a) Hat ein beliebiger Kegelschnitt K mit einem andern beliebigen Kegelschnitte P_1 eine reelle oder ideale doppelte Berührung, und es schneidet eine beliebige Tangente des zweiten den ersteren in den Punkten B_1, B'_1, was aber nur dann möglich ist, wenn entweder P_1 von K umschlossen wird, oder wenn P_1 den K äusserlich berührt, ohne ihn zu umschliessen; wird ausserdem K von beliebig vielen anderen Tangenten des P_1 in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$; $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ .... geschnitten, wo die Punkte $\mathfrak{a}_2$. $\mathfrak{b}_2$. $\mathfrak{c}_2$ $\mathfrak{d}_2$ .... 1) übereinstimmend mit den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ .... liegen müssen, 2) aber nach einerlei oder nach entgegengesetzter Richtung auf dem Umfange von K zu nehmen sind, je nachdem P_1 innerhalb oder ausserhalb K liegt, und zieht man die Geraden $B_1\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{a}_2$, $B'_1\mathfrak{a}_1$, $B'_1\mathfrak{a}_2$; $B_1\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{b}_2$, $B'_1\mathfrak{b}_1$, $B'_1\mathfrak{b}_2$; $B_1\mathfrak{c}_1$, $B_1\mathfrak{c}_2$, $B'_1\mathfrak{c}_1$, $B'_1\mathfrak{c}_2$; $B_1\mathfrak{d}_1$, $B_1\mathfrak{d}_2$, $B'_1\mathfrak{d}_1$, $B'_1\mathfrak{d}_2$ .... oder a_1, a_2, a'_1, a'_2; b_1, b_2, b'_1, b'_2; c_1, c_2, c'_1, c'_2; d_1, d_2, d'_1, d'_2 ....; so weiss man aus Poncelet's Traité art. 424, dass entweder die Durchschnitte der Strahlenpaare a_1, a'_2; b_1, b'_2; c_1, c'_2; d_1, d'_2 oder der anderen a_2, a'_1; b_2, b'_1; c_2, c'_1; d_2, d'_1 auf der Berührungssehne A beider Kegelschnitte liegen müssen. Es sei das Letztere der Fall, und man denke sich die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 .... einem Strahlbüschel B_1 und die Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2 .... einem mit B_1 concentrischen

Strahlbüschel B_2 angehörig, so ist erstens wegen des perspectivischen Durchschnitts A

$$B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots.) = B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots.),$$

und zweitens wegen des Kegelschnittes K

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots. = B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots.),$$

also auch

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots.).$$

Und umgekehrt: bildet man um einen beliebigen Punkt $(B_1 B_2)$ eines Kegelschnittes K zwei concentrische projectivische Strahlbüschel B_1, B_2, so umhüllen die Sehnen des ersteren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, welche zunächst von **drei** bestimmten ihrer entsprechenden Strahlenpaare a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 begrenzt werden, vier Kegelschnitte, deren jeder K doppelt berührt (Poncelet. art. 424). Die Tangentenschaaren dieser vier Kegelschnitte bestimmen, indem sie K durchschneiden, vier Paar concentrische projectivische Strahlbüschel B_1, B_2, welche, wiewohl jedes die Strahlen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 enthält, durchaus von einander verschieden sein müssen. Diese Verschiedenheit aber ist nur möglich, wenn je zwei Strahlen a_1, a_2 verschieden unter B_1, B_2 vertheilt werden, wobei z. B. dem B_1 entweder die drei Strahlen a_1, b_1, c_1 oder a_1, b_1, c_2 oder a_1, b_2, c_1 oder a_2, b_1, c_1 zufallen. Also ist nothwendig eines dieser vier Paar Strahlbüschel mit dem von uns angenommenen identisch.

b) Durch dieselben Schlüsse wie in *a*) und durch dasselbe Verfahren wie in §. 1. *b*) wird man sich von der linken Seite des folgenden Satzes überzeugen:

Haben zwei beliebige Kegelschnitte mit einander eine reelle oder ideale doppelte Berührung, so bestimmen

die sämmtlichen Punktenpaare, in welchen die Tangenten des einen den anderen durchschneiden, wenn sie mit einem beliebigen Punkte auf dem Umfange des letzteren durch Gerade verbunden werden, die entsprechenden Strahlenpaare zweier concentrischer projectivischer Strahlbüschel;

die sämmtlichen Tangentenpaare, welche von den Punkten auf dem Umfange des einen an den anderen gezogen werden, auf einer beliebigen anderen Tangente des letzteren die entsprechenden Punktenpaare zweier aufeinander gelegter projectivischer Geraden;

und umgekehrt:

Bildet man um einen belie- en Punkt auf dem Um- eines Kegelschnittes entrische projecti- trahlbüschel, so

Legt man längs einer beliebigen Tangente eines Kegelschnittes zwei projectivische Gerade aufeinander, so liegen die Durchschnitte

umhüllen die Sehnen dieses Kegelschnittes, welche durch die entsprechenden Strahlenpaare begrenzt werden, einen zweiten Kegelschnitt, welcher den ersteren doppelt berührt.

der Tangentenpaare, welche von den entsprechenden Punktenpaaren an den Kegelschnitt gezogen werden, auf dem Umfange eines zweiten Kegelschnitts, welcher den ersteren doppelt berührt.

Anmerkung. Haben die beiden Gebilde B_1, B_2 oder A_1, A_2 Elemente e, f oder $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$, in denen sich zwei entsprechende vereinigen, so bestimmen diese resp. die gemeinschaftlichen Punkte oder Tangenten, und somit die Berührungssehne oder den Berührungspol der beiden Kegelschnitte. Also haben diese letzteren allemal einen reellen Contact, wenn die Gebilde B_1, B_2 oder A_1, A_2 ungleichliegend sind.

§. 4.

Es ist ein beliebiger Kegelschnitt und ausserdem sind n beliebige Kegelschnitte, welche den ersteren doppelt berühren, gegeben;

in den ersteren ein einfaches n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung die letzteren berühren.

um den ersteren ein einfaches n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf den Umfängen der letzteren liegen.

Die hier behufs der Auflösung anzustellende Betrachtung stimmt beiderseits mit der in §. 2 angestellten überein, nur dass hier die Verbindungslinien der Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \dots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$ u. s. w., statt durch gegebene Punkte zu gehen, gegebene Kegelschnitte $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ berühren, sowie dass die Durchschnitte der Tangenten a_1, a_2, $a_3 \dots a_n, a_{n+1}$ auf den Umfängen gegebener Kegelschnitte $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$, statt auf gegebenen Geraden liegen, und dass von jeder Ecke $\mathfrak{a}_k$ zu zwei Ecken $\mathfrak{a}_{k+1}$, sowie von jeder Tangente a_k zu zwei Tangenten a_{k+1} übergegangen werden kann, deren Wahl nur bei der Bildung der ersten Punktenreihe $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \dots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$ oder Tangentenreihe $a_1, a_2, a_3 \dots a_n, a_{n+1}$ beliebig, bei der Bildung der übrigen, von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \dots$ oder $b_1, c_1, d_1 \dots$ ausgehenden aber dadurch vollkommen bestimmt ist, dass die Gebilde B_k, B_{k+1} oder A_k, A_{k+1} allemal gleich- oder ungleichliegend werden müssen, jenachdem der Kegelschnitt p_k oder P_k den K innerlich oder äusserlich berührt.

Anmerkung 1. Da also der Ecke $\mathfrak{a}_1$ zwei Ecken $\mathfrak{a}_2$, jeder Ecke $\mathfrak{a}_2$ zwei Ecken $\mathfrak{a}_3$ u. s. f. folgen können, so müssen der Ecke $\mathfrak{a}_1 2^n$ Ecken $\mathfrak{a}_{n+1}$, und dem Strahlbüschel $B_1 2^n$ projectivische Strahlbüschel B_{n+1}, und ebenso der Geraden $A_1 2^n$ projectivische Gerade A_{n+1} entsprechen. Jede Combination des B_1 oder A_1 mit einem B_{n+1} oder A_{n+1} liefert zwei Polygone von einerlei Art, welche die Bedingungen der Aufgabe befriedigen; also ist dieselbe im Allgemeinen einer Anzahl von 2^{n+1} Auflösungen fähig. Statt eines oder mehrerer, z. B. m, Kegelschnitte p_k oder P_k können auch,

was aus §. 1. und §. 2. unmittelbar erhellet, m Punkte oder Gerade beliebig gegeben sein, und dann reducirt sich die Anzahl der möglichen Auflösungen auf 2^{n-m+1}.

Anmerkung 2. Ferner lässt sich hier, wie in §. 2. Anm. 2. darthun, dass diese 2^{n+1} Auflösungen alle wirklich statthaben, wenn eine ungerade Anzahl der Kegelschnitte $p_1 \ldots p_n$ oder $P_1 \ldots P_n$ den K äusserlich berühren, und dass sie nur im entgegengesetzten Falle sämmtlich oder zum Theil illusorisch werden können.

Anmerkung 3. Besondere Fälle treten ein, wenn ein Kreis K, m mit K concentrische Kreise und $n-m$ Punkte oder Gerade gegeben sind. Sehr leicht und für den Unterricht ganz besonders anzuempfehlen ist die erste der folgenden Doppelaufgaben:

Aufgaben für Schüler.

1. Es sind n concentrische Kreise und

ein Punkt beliebig gegeben; in den grössten Kreis ein n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung die übrigen Kreise berühren und wovon die letzte durch den gegebenen Punkt geht.

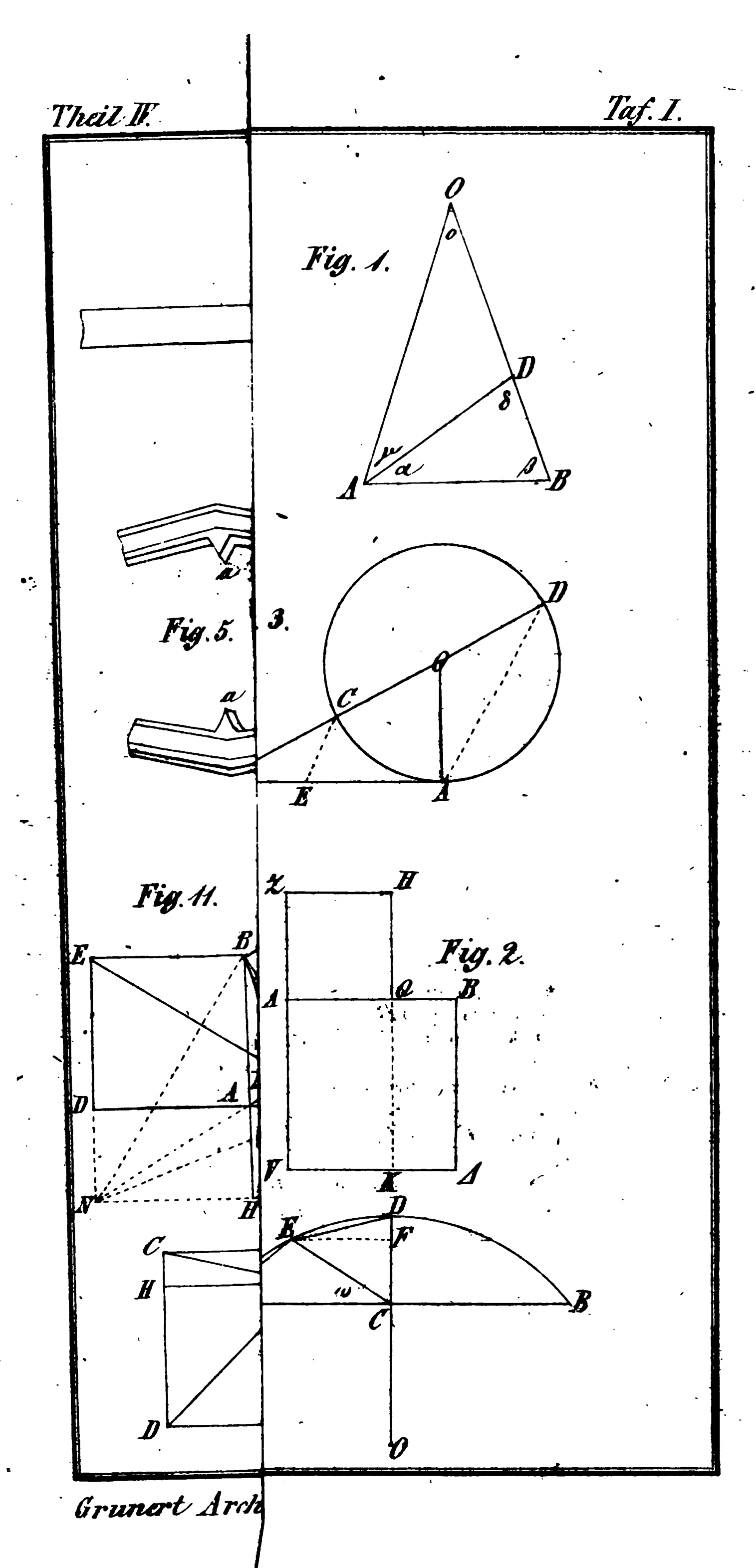
eine Gerade beliebig gegeben; um den kleinsten Kreis ein n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf den Umfängen der übrigen Kreise und, die letzte, auf der gegebenen Geraden liegen.

2. Es sind $m+1$ concentrische Kreise und

$n-m$ Punkte beliebig gegeben; in den grössten Kreis ein n-Eck zu beschreiben, von welchem m Seiten in gegebener Ordnung die übrigen Kreise berühren, und die übrigen $n-m$ Seiten in gegebener Ordnung durch die gegebenen Punkte gehen.

$n-m$ Gerade beliebig gegeben, um den kleinsten Kreis ein n-Seit zu beschreiben, von welchem m Ecken in gegebener Ordnung auf den Umfängen der übrigen Kreise, und die übrigen $n-m$ Ecken in gegebener Ordnung auf den gegebenen Geraden liegen.

Anmerkung 4. Denken wir uns in der allgemeinen Aufgabe nur 3 Kegelschnitte p_1, p_2, p_3 gegeben, und statt des n-Ecks oder n-Seits einen Kegelschnitt gesucht, der dem K eingeschrieben oder umschrieben sein, d. h. ihn doppelt berühren, und die drei andern einfach berühren soll, eine Operation, welche freilich noch des leitenden Principes ermangelt, so gelangen wir aus dem Gebiete des Pappusschen Problems in das eines andern, von welchem ich in einer, Seite 108 der No. VII. des literarischen Berichts angezeigten Abhandlung nachgewiesen habe, dass es die Tactionen des Apollonius in ihrer allgemeinsten und wesentlichsten Form darstellt.


Fig. 1.
O
D
A
B
Fig. 5.
3.
C
E
Fig. 11.
E
D
N
H
Fig. 2.
Z
A
B
V
K
F
C
O

$$\int X^p x^{m-1} dx = \frac{X^{p+1} x^{m-1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int X^p x^{m-n-1} dx.$$

Nehmen wir $a=1$, $b=-1$, so geht das vorstehende X in unser früheres über; nehmen wir ferner $x=1$, $x=0$ und bemerken, dass X^{p+1} sich für $x=1$ annullirt, so wird

$$\int_0^1 X^p x^{m-1} dx = \frac{m-n}{np+m} \int_0^1 X^p x^{m-n-1} dx.$$

Daraus erhält man, für $m=n+1$, $2n+1$ u. s. w. der Reihe nach

$$\int_0^1 X^p x^n dx = \frac{1}{np+n+1} \int_0^1 X^p dx,$$

$$\int_0^1 X^p x^{2n} dx = \frac{n+1}{np+2n+1} \int_0^1 X^p x^n dx$$

$$= \frac{(n+1)1}{(np+2n+1)(np+n+1)} \int_0^1 X^p dx \text{ u. s. f.,}$$

also:

$$\frac{\int_0^1 X^p x^n dx}{\int_0^1 X^p dx} = \frac{1}{np+n+1},$$

$$\frac{\int_0^1 X^p x^{2n} dx}{\int_0^1 X^p dx} = \frac{1.(1+n)}{(np+n+1)(np+2n+1)},$$

u. s. w.

Das Gesetz dieser Zahlen ist leicht zu erkennen. Bezeichnet nämlich $\frac{a}{b}$ irgend einen dieser Quotienten, so sind die nächstfolgenden

$$\frac{a(a+n)}{b(b+n)}, \ \frac{a(a+n)(a+2n)}{b(b+n)(b+2n)}, \text{ u. s. w.}$$

Führen wir jetzt die gefundenen Werthe in die Gleichung (2) ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f(p+q)}{f(p)} \\ &= q_0 - \frac{1}{2p+n+1} q_1 + \frac{1.(1+n)}{(2p+n+1)(2p+2n+1)} q_2 - \dots \end{aligned}\right\} (3)$$

Unsere Aufgabe ist aber noch einer ganz anderen Ansicht fähig.

Vermittelst der Euler'schen Integrale zweiter Art kennt man nämlich den Werth des Integrales

$$\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

woraus sich für $y=x^n$ ergiebt:

$$\int_0^1 (1-x^n)^{\alpha-1} x^{n\beta-1} dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

und für den speciellen Fall $\beta = \frac{1}{n}$:

$$\int_0^1 (1-x^n)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{n})}.$$

Hiernach lassen sich die Werthe der Integrale (1) leicht angeben, indem man einmal $\alpha = p+1$, dann $\alpha = p+q+1$ nimmt. Dann wird

$$f(p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(p+1+\frac{1}{n})}, \quad f(p+q) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(p+q+1+\frac{1}{n})},$$

$$\frac{f(p+q)}{f(p)} = \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+q+1+\frac{1}{n})} \cdot \frac{\Gamma(p+1+\frac{1}{n})}{\Gamma(p+1)}$$

und durch Vergleichung mit Formel (3)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+1+\frac{1}{n})}{\Gamma(p+q+1+\frac{1}{n})\Gamma(p+1)} \\ &= q_0 - \frac{1}{np+n+1} q_1 + \frac{1.(1+n)}{(np+n+1)(np+2n+1)} q_2 - \dots \end{aligned}\right\} (4)$$

Diese Gleichung gilt für ganz beliebige p, q und $n > 0$, und liefert je nach den speciellen Werthen dieser Grössen bemerkenswerthe Resultate, wie folgende Beispiele zeigen werden.

1) Nimmt man $n=1$, p, q ganz und positiv, so erhält man unter der Bemerkung, dass für jedes ganze positive m

$$\Gamma(m+1) = 1.2.3 \dots m$$

ist,

$$\frac{p}{p+q+1} - q_0 - \frac{1}{p+2} q_1 + \frac{1.2}{(p+2)(p+3)} q_2 - \dots$$

oder, $p-1$ für p gesetzt:

$$\frac{p-1}{p+q} = q_0 - \frac{1}{p+1} q_1 + \frac{1.2}{(p+1)(p+2)} q_2 - \dots \quad (5)$$

wobei die Reihe eine endliche ist.

2) Für $q=-1$ giebt die Gleichung (4) unter der Bemerkung, dass für jedes μ, $\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$ ist:

$$\frac{p+\frac{1}{n}}{p}=1+\frac{1}{np+n+1}+\frac{1.(1+n)}{(np+n+1)(np+2n+1)}+\ldots,$$

worin p und n ganz beliebig sind.

Für $n=\frac{1}{\alpha}$, $p=\beta-\alpha-1$ folgt daraus:

$$\frac{\beta-1}{\beta-\alpha-1}=1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\ldots \quad (6)$$

3) Wir nehmen p, q ganz und positiv, $n=2$. Vermöge der bekannten Eigenschaft der Gammafunktionen, dass

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2})=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}$$

ist, ergiebt sich nach leichter Reduktion:

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}{(p+\frac{3}{2})(p+\frac{5}{2})\ldots(p+\frac{2q+1}{2})}$$
$$=q_0-\frac{1}{2p+3}q_1+\frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}q_2-\ldots$$

oder $p-1$ für p gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+q-1)}{(p+\frac{1}{2})(p+\frac{3}{2})(p+\frac{5}{2})\ldots(p+\frac{2q-1}{2})}\\&=q_0-\frac{1}{2p+1}q_1+\frac{1.3}{(2p+1)(2p+3)}q_2-\ldots\end{aligned}\right\}(7)$$

4) Nehmen wir wieder n, p ganz und positiv, aber $q=m-\frac{1}{2}$, wo m ganz und positiv ist, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1.3.5\ldots(2p+2m-1)}{2.4.6\ldots(2p+2m)}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2p+1)}{2.4.6\ldots(2p)}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=(m-\tfrac{1}{2})_0-\frac{1}{2p+3}(m-\tfrac{1}{2})_1+\frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}(m-\tfrac{1}{2})_2-\ldots\end{aligned}\right\}(8)$$

z. B. für $m=0$, $m=1$:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)}\right)^2(2p+1)\frac{\pi}{2}\\&=(-\tfrac{1}{2})_0-\frac{1}{2p+3}(-\tfrac{1}{2})_1+\frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}(-\tfrac{1}{2})_2-\ldots\end{aligned}\right\}(9)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{3.5.7\ldots(2p+1)}{2.4.6\ldots(2p)}\right)^2\left(\frac{1}{2p+2}\right)\frac{\pi}{2}\\&=(\tfrac{1}{2})_0-\frac{1}{2p+3}(\tfrac{1}{2})_1+\frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}(\tfrac{1}{2})_2-\ldots\end{aligned}\right\}(10)$$

Von den beiden letzten Gleichungen lässt sich noch eine elegante Anwendung machen.

Denkt man sich nämlich die Zahl p von bedeutender Grösse, so kann man

$$\frac{3}{2p+5},\ \frac{5}{2p+7},\ \text{etc.}$$

durch $\frac{1}{2p+3}$ ersetzen. In diesem Falle wird die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (9)

$$(-\tfrac{1}{2})_0 - (-\tfrac{1}{2})_1 (\frac{1}{2p+3}) + (-\tfrac{1}{2})_2 (\frac{1}{2p+3})^2 - \ldots.$$

deren Summe gleich ist

$$(1 - \frac{1}{2p+3})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2p+3}{2p+2}}.$$

Wir haben daher aus (9) für ein sehr grosses p näherungsweise:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2p+1} \left(\frac{2.4.6\ldots.(2p)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\right)^2 \sqrt{\frac{2p+3}{2p+2}}. \quad (11)$$

Ebenso leicht ergiebt sich aus (10):

$$\frac{\pi}{2} = (2p+2) \left(\frac{2.4.6\ldots.(2p)}{3.5.7\ldots.(2p+1)}\right)^2 \sqrt{\frac{2p+2}{2p+3}} \quad (12)$$

Beide Gleichungen sind um so richtiger, je grösser p genommen wird, für unendliche p fallen sie mit den Ausdrücken (9) und (10) zusammen.

Einige der spezielleren Reihen unter den obigen sind schon bekannt, ohne dass ihre gemeinschaftliche Quelle (4) bemerkt worden ist. Die Näherungsformel (12) giebt ohne Beweis **Euler** in der **Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle .... St. Pétersbourg. 1843. Tome I. p. 47.**

XLVII.

Entwickelung der höheren Integrale von $\log x . dx$, nebst einer Anwendung auf die Summirung einer Reihe.

Von dem

Herrn Schulamtscandidaten F. Arndt

zu Greifswald.

Das erste Integral von $\log xdx$ findet man unmittelbar, wenn man auf dasselbe die allgemeinste Reductionsformel anwendet; denn es ist $\int \log xdx = \log x \int dx - \int \frac{dx}{x} \int dx = x \log x - x + c$, wo c die willkührliche Constante bezeichnet. Die Bestimmung des zweiten Integrals kommt hiernach auf die des Integrals $\int x \log xdx$ zurück, welches ebenfalls durch particulare Integration gefunden wird, indem $\int x \log xdx = \log x \int xdx - \int \frac{dx}{x} \int xdx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2$ ist, $\int^2 \log xdx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{3}{4}x^2 + cx + c_1$, wo c_1 die neue willkührliche Constante. Geht man diese Entwickelung aufmerksam durch, und setzt sie noch weiter fort, so sieht man, dass die Bestimmung von $\int^n \log xdx$ lediglich auf die von $\int x^m \log xdx$ zurückkommt, indem m eine positive ganze Zahl ist.

Nun ist $\int x^m \log xdx = \log x \int x^m dx - \int \frac{dx}{x} \int x^m dx$ $= \frac{x^{m+1} lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + \text{const.}$ Wendet man diese Formel wiederholt an, so entsteht nach und nach, wenn wir allgemein $\int^n \log xdx$ durch I_n bezeichnen:

$$I_1 = x \log x - x + c$$

$$I_2 = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{3x^2}{2^2} + cx + c_1$$

$$I_3 = \frac{x^3 \log x}{2.3} - \frac{11x^3}{(2.3)^2} + \frac{cx^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$I_4 = \frac{x^4 \log x}{2.3.4} - \frac{50x^4}{(2.3.4)^2} + \frac{cx^3}{2.3} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 + c_3$$

etc.

Daher ist allgemein

$$1.\quad I_n = \frac{x^n \log x}{1.2\ldots n} - \frac{p_n x^n}{(1.2\ldots n)^2} + \frac{c x^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \frac{c_1 x^{n-2}}{1\ldots(n-2)} \text{ etc.} + \frac{c_{n-2}x}{1} + c_{n-1},$$

indem $c, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ die n willkührlichen Constanten sind, und p_n ein von x unabhängiger Coefficient ist, auf dessen Bestimmung es lediglich ankommt. Ich integrire die Gleichung 1. noch einmal, und erhalte:

$$2.\quad I_{n+1} = \frac{x^{n+1}\log x}{1.2\ldots(n+1)} - \frac{\{1.2.3\ldots n + (n+1)p_n\}x^{n+1}}{\{1.2\ldots(n+1)\}^2} + \frac{cx^n}{1\ldots n} + \text{etc.} + c_n$$

$$= \frac{x^{n+1}\log x}{1.2\ldots(n+1)} - \frac{p_{n+1}x^{n+1}}{\{1.2\ldots(n+1)\}^2} + \frac{cx^n}{1\ldots n} + \text{etc.} + c_n.$$

Somit haben wir die Relation $p_{n+1} = (n+1)p_n + 1.2.3\ldots n$, oder es ist

$$3.\quad I_n = \frac{x^n \log x}{1.2\ldots n} - \frac{p_n x^n}{(1.2\ldots n)^2} + \frac{c x^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \frac{c_1 x^{n-2}}{1\ldots(n-2)} \text{ etc.} + \frac{c_{n-2}x}{1} + c_{n-1},$$

und dabei ist $p_1 = 1$ und

$$4.\quad p_{k+1} - (k+1)p_k = 1.2.3\ldots k.$$

Da nun aber $\frac{p_{k+1}}{\{1.2\ldots(k+1)\}^2} - \frac{(k+1)p_k}{\{1.2\ldots(k+1)\}^2} = \frac{1}{1.2\ldots k.(k+1)^2}$ oder $\frac{p_{k+1}}{\{1\ldots(k+1)\}^2} - \frac{1}{k+1}\cdot\frac{p_k}{(1\ldots k)^2} = \frac{1}{1\ldots k(k+1)^2}$ ist, so findet für $\frac{p_k}{(1\ldots k)^2} = q_k$ die Relation statt $q_{k+1} - \frac{q_k}{k+1} = \frac{1}{1\ldots k(k+1)^2}$.

Stellen wir also den Ausdruck 3. unter der Form dar:

$$5.\quad I_n = \frac{x^n \log x}{1\ldots n} - q_n x^n + \frac{cx^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \text{ etc.} + \frac{c_{n-2}x}{1} + c_{n-1},$$

so haben wir zur Bestimmung von q_n die Relationen:

$$q_{k+1} - \frac{q_k}{k+1} = \frac{1}{1\ldots k(k+1)^2}$$

$$q_{k+2} - \frac{q_{k+1}}{k+2} = \frac{1}{1\ldots(k+1)(k+2)^2}$$

u. s. w.

$$q_{k+\mu} - \frac{q_{k+\mu-1}}{k+\mu} = \frac{1}{1\ldots(k+\mu-1)(k+\mu)^2}.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch $(k+2)(k+3)\ldots(k+\mu)$, die zweite durch $(k+3)(k+4)\ldots(k+\mu)$ etc., und addirt dann alle zu einander, so wird

$$\frac{q_{k+\mu-1}}{k+\mu}-\frac{q_k}{(k+1)\dots(k+\mu)}=\frac{1}{1.2\dots(k+\mu)}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{k+\mu-1}\right\},$$

oder für $k=1$:

$$\frac{q_\mu}{\mu+1}-\frac{q_1}{1.2\dots(\mu+1)}=\frac{1}{1.2\dots(\mu+1)}\left\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\mu}\right\},$$

oder

$$6.\quad q_\mu=\frac{1}{1.2.3\dots\mu}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\mu}\right).$$

Daher wird endlich

$$7.\ I_n=\frac{x^n\log x}{1.2\dots n}-\sum_{g=1}^{g=n}\frac{1}{g}\cdot\frac{x^n}{1\dots n}+\frac{cx^{n-1}}{1\dots(n-1)}\text{ etc. }+c_{n-2}x+c_{n-1}$$

$$=\frac{x^n}{1\dots n}\left\{\log x-\sum_{g=1}^{g=n}\frac{1}{g}\right\}+\frac{cx^{n-1}}{1\dots(n-1)}\text{ etc. }+c_{n-2}x+c_{n-1}.$$

Die Constanten sind so lange willkührlich, als nicht angegeben ist, zwischen welchen Grenzen die Integrale genommen werden sollen.

Wir wollen nun sehen, was aus den Constanten wird, wenn alle Integrale für $x=1$ verschwinden, indem dieser Fall deshalb einer besondern Beachtung werth ist, weil er uns zur Summirung einer Reihe führen wird.

Nehmen wir also das Integral 7. zwischen den Grenzen 1 und x, so wird

$$\frac{c}{1\dots(n-1)}+\frac{c_1}{1\dots(n-2)}+\text{etc.}+\frac{c_{n-2}}{1}+c_{n-1}=\frac{1}{1\dots n}\Sigma_n,$$

wenn wir $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ durch Σ_n bezeichnen, oder für $\gamma_k=1.2.3\dots(k+1)c_k$:

$$\Sigma_n=n\gamma+n_2\gamma_1+n_3\gamma_2+n_4\gamma_3\text{ etc. }+n_{n-1}\gamma_{n-2}+\gamma_{n-1},$$

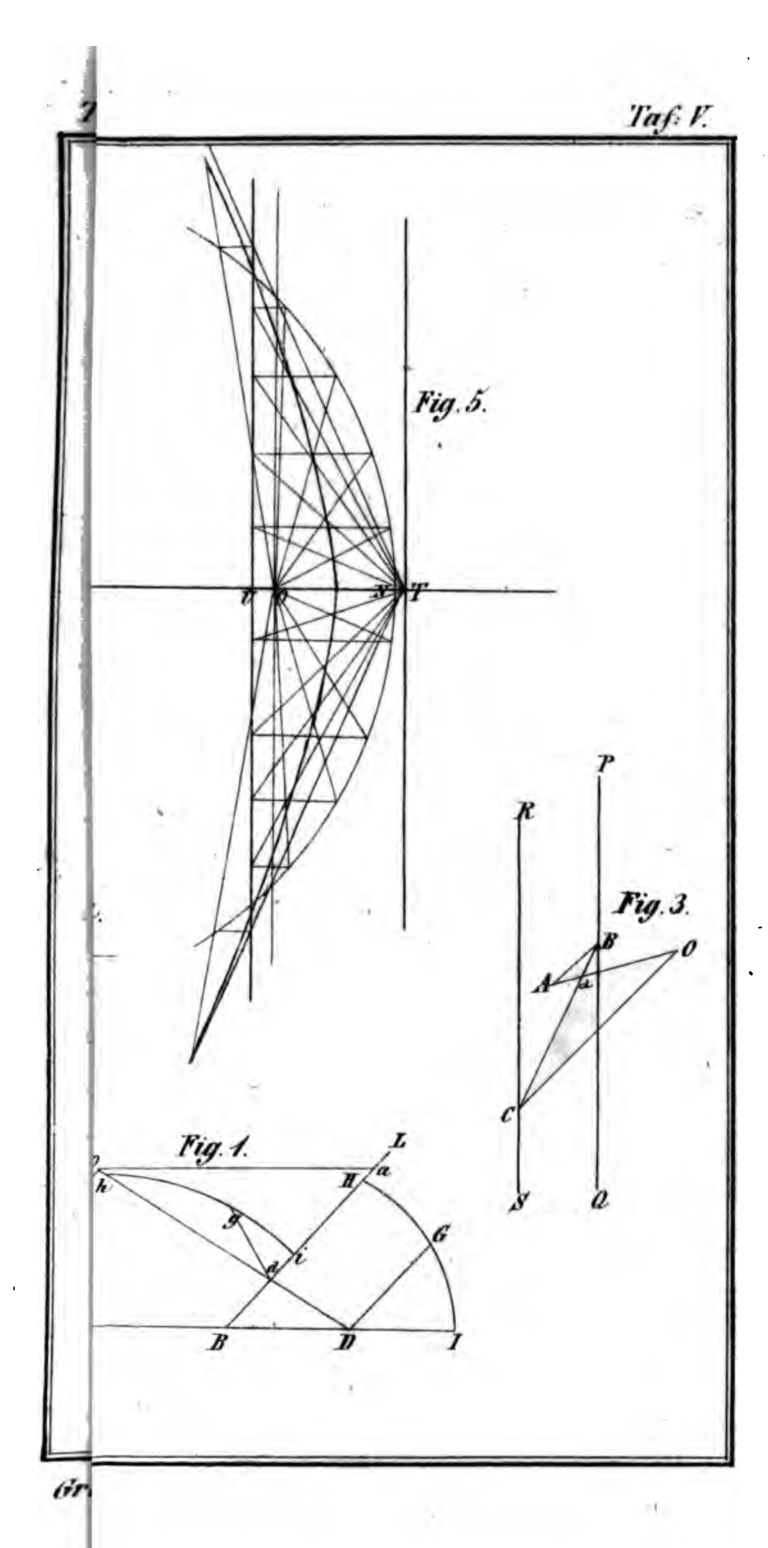
und ebenso

$$\Sigma_{n-1}=(n-1)\gamma+(n-1)_2\gamma_1+(n-1)_3\gamma_2+\dots+(n-1)_{n-2}\gamma_{n-3}+\gamma_{n-2}$$
$$\Sigma_{n-2}=(n-2)\gamma+(n-2)_2\gamma_1+(n-2)_3\gamma_2+\dots+(n-2)_{n-3}\gamma_{n-4}+\gamma_{n-3}$$

u. s. w.

$$\Sigma_2=2\gamma+\gamma_1$$
$$\Sigma_1=\gamma.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, -n_1, n_2, -n_3$ etc., und addirt sie nach der Multiplication zu einander, so wird



Gr

welche für jedes positive z convergirt, das die Einheit nicht übersteigt, und integrirt $n$mal hintereinander, so ist, da alle Integrale für $z=1$ verschwinden, nach 11:

$$\frac{(1-z)^{n+1}}{1\ldots(n+1)}+\frac{(1-z)^{n+2}}{2\ldots(n+2)}+\frac{(1-z)^{n+3}}{3\ldots(n+3)} \text{ etc.}$$

$$=(-1)^{n-1}\left\{(\log z-\Sigma n)\cdot\frac{z^n}{1\ldots n}+\frac{\Sigma_1}{1}\cdot\frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\right.$$
$$+\frac{\Sigma_2-2_1\Sigma_1}{1.2}\cdot\frac{z^{n-2}}{1\ldots(n-2)}$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$\left.+\frac{\Sigma_n-n_1\Sigma_{n-1}+\ldots\mp n_{n-1}\Sigma_1}{1\ldots n}\right\}$$

oder wenn man $1-z=x$ setzt:

$$12.\quad \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{2.3\ldots(n+2)}+\frac{x^{n+3}}{3.4\ldots(n+3)}+\text{ in inf.}$$

$$=(-1)^{n-1}\left[\{\log(1-x)-\Sigma_n\}\frac{(1-x)^n}{1\ldots n}+\frac{\Sigma_1}{1}\cdot\frac{(1-x)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\right.$$
$$+\frac{\Sigma_2-2\Sigma_1}{1.2}\cdot\frac{(1-x)^{n-2}}{1\ldots(n-2)}$$
$$+\ldots$$
$$\left.+\frac{\Sigma_n-n_1\Sigma_{n-1}+n_2\Sigma_{n-2}-\text{etc.}\mp n_{n-1}\Sigma_1}{1.2.3\ldots n}\right]$$

Der absolute Werth von x darf hier die Einheit nicht übersteigen. Für $x=1$ wird

$$13.\quad \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}+\frac{1}{2.3\ldots(n+2)}+\frac{1}{3.4\ldots(n+3)}+\text{ in inf.}$$
$$=(-1)^{n-1}\left[\frac{\Sigma_n-n_1\Sigma_{n-1}+\ldots\mp n_{n-1}\Sigma_1}{1.2.3\ldots n}\right]$$

XLVIII.

Entwickelung der Functionen $\frac{\cos nx}{\cos x^n}$ und $\frac{\sin nx}{\cos x^n}$ in Reihen, die nach den Potenzen von tang x aufsteigen, mit Hülfe des Maclaurinschen Theorems.

Von dem

Herrn Schulamts-Candidaten F. Arndt

zu Greifswald.

Zufolge des Maclaurinschen Lehrsatzes muss man, um $\frac{\cos nx}{\cos x^n}$ und $\frac{\sin nx}{\cos x^n}$ in Reihen, die nach den Potenzen von tang x fortschreiten, zu entwickeln, diese Grössen als Functionen von tang x betrachten, und ihre höhern Differentialquotienten nach jener Veränderlichen bestimmen.

Man setze also:

$$1.\quad f(\tan x) = \frac{\cos nx}{\cos x^n}.$$

Um diese Function nach tang x zu differenziiren, entwickele man zuerst ihren Differentialquotienten nach x, und multiplicire denselben mit dem Differentialquotienten von x nach tang x, d. h. mit $\cos x^2$, so erhält man

$$2.\quad f'(\tan x) = -n\,.\,\frac{\sin(n-1)x}{\cos x^{n-1}}.$$

Differenziirt man diese Function auf dieselbe Weise nach tang x, so wird

$$3.\quad f''(\tan x) = -n(n-1)\,.\,\frac{\cos(n-2)x}{\cos x^{n-2}}.$$

Da diese Function wieder dieselbe Form wie die Function 1. angenommen hat, so wird man, $f'''(\tan x)$ zu finden, in 2. $n-2$ für n setzen, und das Resultat mit $-n(n-1)$ multipliciren; dadurch wird

$$4. \quad f'''(\text{tang } x) = n(n-1)(n-2) \cdot \frac{\sin(n-3)x}{\cos x^{n-3}}.$$

Ferner wird man, diese Gleichung nach tang x zu differenziiren, in 3. $n-2$ für n setzen, und das Resultat mit $-n(n-1)$ multipliciren; dadurch wird

$$5. \quad f^{IV}(\text{tang } x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \frac{\cos(n-4)x}{\cos x^{n-4}}.$$

Auf diese Weise kann man immer weiter fortschreiten, und erhält allgemein

$$6. \quad f^{2k}(\text{tang } x) = (-1)^k \cdot n(n-1) \ldots (n-2k+1) \cdot \frac{\cos(n-2k)x}{\cos x^{n-2k}}$$

$$7. \quad f^{2k-1}(\text{tang } x) = (-1)^k \cdot n(n-1) \ldots (n-2k+2) \cdot \frac{\sin(n-2k+1)x}{\cos x^{n-2k+1}}.$$

Behandelt man die Function $\varphi(\text{tang } x) = \frac{\sin nx}{\cos x^n}$ auf ganz ähnliche Art, so entsteht

$$8. \quad \varphi^{2k}(\text{tang } x) = (-1)^k \cdot n(n-1) \ldots (n-2k+1) \cdot \frac{\sin(n-2k)x}{\cos x^{n-2k}}$$

$$9. \quad \varphi^{2k+1}(\text{tang } x) = (-1)^k \cdot n(n-1) \ldots (n-2k) \cdot \frac{\cos(n-2k-1)x}{\cos x^{n-2k-1}}.$$

Nun muss man die Werthe bestimmen, welche diese Differentialquotienten für tang $x = 0$ oder für $x = \pm \lambda\pi$ annehmen, wo λ eine positive ganze Zahl ist. Für diesen Werth von x ist aber nach 6. 7. 8. 9.

$$\frac{f^{2k}(0)}{1.2 \ldots 2k} = (-1)^k \cdot n_{2k}, \quad \frac{f^{2k-1}(0)}{1 \ldots (2k-1)} = 0;$$
$$\frac{\varphi^{2k}(0)}{1 \ldots 2k} = 0, \quad \frac{\varphi^{2k+1}(0)}{1 \ldots (2k+1)} = (-1)^k \cdot n_{2k+1}.$$

Daher ist nach Maclaurins Theorem

$$10. \quad \frac{\cos nx}{\cos x^n} = 1 - n_2 \text{tang } x^2 + n_4 \text{tang } x^4 - \ldots \pm n_{2k-2} \text{tang } x^{2k-2} + R,$$

$$11. \quad \frac{\sin nx}{\cos x^n} = n_1 \text{tang } x - n_3 \text{tang } x^3 + \ldots \pm n_{2k-1} \text{tang } x^{2k-1} + R',$$

und es ist

$$R = (-1)^k \cdot n_{2k-1} \text{ tang } x^{2k-1} \cdot \sin(n-2k+1)\vartheta x \cdot \cos(\vartheta x)^{2k-n-1}$$
$$R' = (-1)^k \cdot n_{2k} \text{ tang } x^{2k} \cdot \sin(n-2k)\vartheta^1 x \cdot \cos(\vartheta' x)^{2k-n},$$

wo ϑ, ϑ^1 zwischen 0 und 1 liegen.

Wenn nun n eine positive ganze Zahl ist, so brechen die Reihen von selbst ab, die Reste verschwinden, und die Gleichungen 10. und 11. gelten für jedes beliebige x.

Wenn aber n keine positive ganze Zahl ist, so darf man die Rei-

hen nur dann ins Unendliche fortgehen lassen, wenn R und R' sich der Null nähern, indem der Index ins Unendliche zunimmt.

Da nun in obigen Resten die Sinusse die Einheit nicht übersteigen, da ferner $\cos(\vartheta x)^{2k-n-1}$ ebenso wie $\cos(\vartheta' x)^{2k-n}$ sich bekanntermaassen der Null nähert, wenn $\cos(\vartheta x)$ oder $\cos(\vartheta' x)$ kleiner als die Einheit und constant bleibt, wenn dieser Cosinus $= 1$, so bleibt $\sin(n-2k+1)\vartheta x.\cos(\vartheta x)^{2k-n-1}$, so wie $\sin(n-2k)\vartheta' x.\cos(\vartheta' x)^{2k-n}$ mindestens endlich, und die Reste werden sich also mit n_{2k-1} tang x^{2k-1} oder n_{2k} tang x^{2k} zugleich der Null nähern.

Nun ist $n_{2k+2\lambda}$ tang $x^{2k+2\lambda}$

$$= n_{2k} \operatorname{tang} x^{2k}.\frac{(n-2k)(n-2k-1)....(n-2k-2\lambda+1)}{(2k+1)(2k+2)....(2k+2\lambda)}.\operatorname{tang} x^{2\lambda}$$

$$= n_{2k} \operatorname{tang} x^{2k}.(1-\frac{n+1}{2k+1})(1-\frac{n+1}{2k+2})....(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda}) \operatorname{tang} x^{2\lambda}.$$

Ist daher $n+1$ positiv, so ist

$$n_{2k+2\lambda} \operatorname{tang} x^{2k+2\lambda} < n_{2k} \operatorname{tg} x^{2k}.(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda})^{2\lambda} \operatorname{tg} x^{2\lambda}$$

$$< n_{2k} \operatorname{tg} x^{2k} \{(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda}) \operatorname{tg} x\}^{2\lambda}.$$

Ist aber $n+1$ negativ, so ist

$$n_{2k+2\lambda} \operatorname{tang} x^{2k+2\lambda} < n_{2k} \operatorname{tang} x^{2k} \{(1-\frac{n+1}{2k+1}) \operatorname{tang} x\}^{2\lambda}.$$

Ist endlich $n+1=0$, so hat man

$$n_{2k+2\lambda} \operatorname{tang} x^{2k+2\lambda} = n_{2k} \operatorname{tang} x^{2k}.\operatorname{tang} x^{2\lambda}.$$

Im ersten Falle nähert sich $n_{2k+2\lambda}$ tang $x^{2k+2\lambda}$, der Null oder wächst ins Unendliche, jenachdem tang $x \lessgtr 1$ (indem wir nur den absoluten Werth verstehen). Denn wenn tang $x < 1$, so ist auch $(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda})$ tang $x < 1$, nachdem k hinlänglich gross geworden; wenn aber tang $x > 1$, so kann man λ so gross nehmen, dass $(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda})$ tang x auch > 1, denn diese Bedingung erfordert, dass $\frac{2k+2\lambda}{n+1} > \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x - 1}$.

Im zweiten Falle kann man k so gross nehmen, dass, wenn tang $x < 1$, auch $(1-\frac{n+1}{2k+1})$ tang $x < 1$; indem diese Bedingung erfordert, dass $-\frac{n+1}{2k+1} < \frac{1-\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x}$. Wenn aber tang $x > 1$, so ist auch $(1-\frac{n+1}{2k+1})$ tang $x > 1$, da $n+1$ negativ.

Im dritten Falle nimmt tang $x^{2\lambda}$ mit $\frac{1}{\lambda}$ ins Unendliche ab, wenn tang $x < 1$. Ist tang $x > 1$, so nimmt es ins Unendliche zu.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass die Reihen 10. 11. convergiren oder divergiren, jenachdem der absolute Werth von tang x kleiner oder grösser als die Einheit ist.

Somit bleibt uns noch der Fall zu untersuchen übrig, in welchem der absolute Werth von tang $x = 1$.

Es wird hier auf die Grenze von

$$n_{2k+2\lambda} = n_{2k}(1 - \frac{n+1}{2k+1})(1 - \frac{n+1}{2k+2}) \ldots (1 - \frac{n+1}{2k+2\lambda})$$

ankommen für $\lambda = \infty$ und ein constantes k.

1. Wenn $n+1$ positiv, so ist

$$\log (1 - \frac{n+1}{2k+1}) < - \frac{n+1}{2k+1}$$

$$\log (1 - \frac{n+1}{2k+2}) < - \frac{n+1}{2k+2}$$

u. s. w.,

also

$$\log n_{2k+2\lambda} < \log n_{2k} - (n+1)(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+2\lambda}).$$

Daher nähert sich der Logarithmus von $n_{2k+2\lambda}$ der Grenze $-\infty$, wenn λ sich dem Unendlichen nähert, folglich hat $n_{2k+2\lambda}$ selbst die Null zur Grenze, und die Reihen 10. 11. convergiren.

2. Wenn $n+1$ negativ, so ist

$$\log (1 - \frac{n+1}{2k+1}) > - \frac{n+1}{2k+1} - \tfrac{1}{2} \cdot (\frac{n+1}{2k+1})^2$$

$$\log (1 - \frac{n+1}{2k+2}) > - \frac{n+1}{2k+2} - \tfrac{1}{2} \cdot (\frac{n+1}{2k+2})^2$$

u. s. w.

also

$$\log n_{2k+2\lambda} > \log n_{2k} - (n+1)(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+2\lambda})$$
$$- \tfrac{1}{2}(n+1)^2 \{\frac{1}{(2k+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2k+2\lambda)^2}\}.$$

Da aber die Summe $\frac{1}{2k+1} + \ldots + \frac{1}{2k+2\lambda}$ mit λ unendlich wird, und $\frac{1}{(2k+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2k+2\lambda)^2}$ bekanntermaassen endlich bleibt, so nähert sich der Logarithmus dem Unendlichen, also wird auch $n_{2k+2\lambda}$ mit λ unendlich, und die Reihe 10. oder 11. divergirt.

3. Wenn $n+1=0$, so bleibt der absolute Werth von $n_{2k+2\lambda}$ constant, und die obigen Reihen divergiren wieder.

Somit haben wir das folgende Resultat erhalten:

Die Gleichungen

$$\frac{\cos nx}{\cos x^n} = 1 - n_2 \text{ tang } x^2 + n_4 \text{ tang } x^4 - \text{etc.}$$

$$\frac{\sin nx}{\cos xn} = n_1 \text{ tang } x - n_3 \text{ tang } x_3 + n_5 \text{ tang } x^5 - \text{etc.}$$

gelten für jedes beliebige x, wenn n eine positive ganze Zahl ist, und in diesem Falle brechen die Reihen ab.

Ist aber n keine positive ganze Zahl, so convergiren obige Reihen, wenn der absolute Werth von tang x kleiner als die Einheit; ist der absolute Werth von tang $x=1$, so convergiren sie auch dann noch, wenn $n+1>0$. In allen übrigen Fällen findet Divergenz statt.

Multiplicirt man mit $\cos x^n$, so nehmen die Gleichungen die Gestalt an:

12. $\cos nx = \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - \text{etc.}$

13. $\sin nx = n_1 \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + \text{etc.}$

XLIX.

Miscellen.

Eine algebraisch-geometrische Aufgabe.

Von Herrn Albrecht von Graefe zu Berlin.

Es sei am Mittelpunkte O (Taf. VII. Fig. 10.) eines Kreises ein beliebiger Winkel $AOB=\alpha$, und auf der Peripherie ein willkührlicher Punkt P gegeben. Von P sind auf die Schenkel des Winkels AOB die senkrechten PC und PD gefällt. Es soll die Entfernung CD der beiden Fusspunkte C und D dieser Senkrechten von einander bestimmt werden.

Man ziehe den Halbmesser OP, den wir im Folgenden als Einheit annehmen werden, und bezeichne die beiden Winkel AOP und BOP mit β und γ. In dem Dreiecke COD ist

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO \,.\, DO \,.\, \cos\alpha,$$

und folglich, weil $CO=\cos\beta$, $DO=\cos\gamma$ ist,

$$CD^2 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

also

$$CD^2 = \cos^2\beta - \sin^2\gamma + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Es ist aber bekanntlich

$$\cos^2\beta - \sin^2\gamma = \cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$

und

$$2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma).$$

Mithin ist

$$CD^2 = \cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) + 1 - \cos\alpha\cos(\beta+\gamma)$$
$$- \cos\alpha\cos(\beta-\gamma),$$

also, weil $\alpha = \beta + \gamma$ ist,

$$CD^2 = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

und folglich $CD = \sin\alpha$.

Die Länge von CD ist daher unabhängig von der Lage des Punktes P, indem dieselbe lediglich von der Grösse des Winkels α abhängt.

Nehmen wir das Dreieck CDP zu Hülfe, so gelangen wir noch einfacher zu demselben Resultate. Denn in diesem Dreiecke ist

$$CD^2 = \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

da der Winkel $CPD = 180^\circ - \alpha$, und mithin sein Cosinus $= -\cos\alpha$ ist. Addiren wir diese Gleichung zu der aus dem Dreieck CDO sich ergebenden Gleichung

$$CD^2 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

so erhalten wir

$$2CD^2 = (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)$$
$$- 2\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma),$$

d. i.

$$2CD^2 = 2 - 2\cos^2\alpha,\quad CD^2 = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

also $CD = \sin\alpha$.

Auch durch Anwendung des Ptolemäischen Lehrsatzes würden wir unmittelbar zum Resultate gekommen sein. Denn da im Vierecke $OCPD$ die gegenüberliegenden Winkel sich einander supplementiren, so kann dasselbe als ein einem Kreise eingeschriebenes betrachtet werden, und der angeführte Satz liefert daher die Gleichung

$$CD \,.\, OP = CO \,.\, DP + DO \,.\, CP,$$

also, weil $OP = 1$, $CO = \cos\beta$, $DO = \cos\gamma$, $CP = \sin\beta$, $DP = \sin\gamma$ ist:

$$CD = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha.$$

Endlich ergiebt sich die Gleichheit von CD und $\sin\alpha$ auch leicht durch die Betrachtung, dass die Entfernung der durch Verlängerung der beiden Senkrechten PC und PD bis zur Peripherie entstandenen Durchschnittspunkte E und F (Taf. VII. Fig. 11.) einmal das Doppelte von CD ist, da man die Proportion

$$EF : CD = EP : CP = 2 : 1$$

















